Dumitru D. SANDU

# MICROUNDE
# Vol. I

Facultatea de Fizica
www.phys.uaic.ro
Universitatea “Alexandru Ioan Cuza”

IASI
Editura Victor

# MICROUNDE

## CUPRINS

### VOL. I. PRINCIPII FIZICE

## 0. INTRODUCERE


01. Generalităţi asupra criteriilor de clasificare a undelor electromagnetice ..……1
01.1. Harta generală a spectrului electromagnetic …….1
01.2. Benzi de microunde ……..3
02. Cuprins ……..5
02.1. Volumul I (Principii fizice) ……..5
02.2. Volumul II (Interacţiuni cu materia. Aplicaţii) …..……...6
03. În loc de prefaţă ……7
Bibliografie Introducere ...……...9


## CAP. 1. ECUAŢII ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC. PRIVIRE GENERALĂ


1.1. Câmpuri electromagnetice cu variaţie arbitrară în timp ……10
1.1.1. Ecuaţii Maxwell diferenţiale pentru câmpuri cu variaţie arbitrară în timp ……..10
1.1.2. Ecuaţii Maxwell integrale ……13
1.1.3. Ecuaţii de propagare. Potenţiale vectoriale şi scalare ……..15
1.2. Câmpuri electromagnetice cu variaţie armonică în timp ……20
1.2.1. Ecuaţii Maxwell diferenţiale pentru câmpuri electromagnetice armonice ……...20
1.2.2. Forma integrală a ecuaţiilor Maxwell pentru mărimi fazoriale ……....22
1.2.3. Ecuaţii de propagare pentru mărimi fazoriale. Potenţiale vectoriale şi scalare ....22
1.3. Parametrii mediului. Condiţii la limită ……...26
1.3.1. Parametrii constitutivi ai mediului ……...26
1.3.2. Condiţii la limită naturale ……30
1.4. Teorema conservării energiei electromagnetice. Vector Poynting ……35
1.4.1. Teorema conservării energiei electromagnetice pentru câmpuri fizice ……35
1.4.2. Teorema Poynting pentru câmpuri armonice ……...37
Bibliografie Cap.1. ……...……41


## CAP. 2. PROPAGAREA GHIDATĂ A MICROUNDELOR. GHIDURI DE UNDĂ METALICE


2.1. Introducere asupra undelor plane ……...42
2.2. Moduri de undă în ghidurile de undă metalice ……...44
2.2.1. Relaţii între componentele transversale şi longitudinale ……...44
2.2.2. Moduri de undă în ghidurile metalice .....47
2.3. Ghiduri de undă metalice de secţiune dreptunghiulară …… .49
2.3.1 Moduri transversal-magnetice *TM* (unde *E*). Expresii generale ale componentelor de câmp ……...49

2.3.2. Fenomene de dispersie în ghidurile de undă ……52
2.3.3. Configurații particulare de moduri $TM_{mn}$ (unde $E_{mn}$) ……56
2.3.4 Moduri transversal-electrice *TE* (unde *H*). Expresii generale ale componentelor de câmp ……...60
2.3.5. Configurații particulare de moduri $TE_{mn}$ (unde $H_{mn}$) ……62
2.4. Ghiduri de undă metalice de secțiune circulară ……..65
2.4.1. Moduri transversal electrice $TE_{nm}$ în ghidul de secțiune circulară ……...65
2.4.2. Moduri transversal magnetice $TM_{nm}$ în ghidul de secțiune circulară ……69
2.4.3. Configurații particulare de câmp în ghidurile cilindrice ……...70
2.5. Puterea transmisă prin ghidurile metalice. Pierderi ……78
2.5.1. Expresii generale ale puterii transmise ……..78
2.5.2. Aplicații la câteva moduri uzuale ……..80
2.5.3. Pierderi în ghidurile metalice ……84
Bibliografie Cap.2. ……...……90

## CAP. 3. STRUCTURI PARTICULARE DE PROPAGARE GHIDATĂ A MICROUNDELOR

3.1. Linii de transmisie bifilare ..……91
3.1.1. Ecuații de propagare ……..……91
3.1.2. Linii de lungime finită. Diagramă Smith ……...94
3.1.3. Parametrii liniilor bifilare ……101
3.2. Ghiduri de undă coaxiale ……..106
3.2.1. Ecuații de propagare. Configurații de câmp ……106
3.2.2. Parametrii lineici ai ghidurilor coaxiale. Puterea transmisă ……114
3.3. Ghiduri cu plăci metalice paralele ……117
3.4. Linii microstrip. Structuri şi relații generale ……123
3.4.1. Structuri stripline ……124
3.4.2. Structuri microstrip ……..127
3.4.2.1. Structură de bază şi metode de analiză ……127
3.4.2.2. Aproximația cvasistatică ……..128
3.4.2.3. Metoda transformărilor conforme (Wheeler) ……..131
3.4.2.4. Efecte de dispersie în liniile microstrip ……...134
3.4.2.5. Considerații asupra altor metode de analiză cvasistatică ……138
3.4.2.6. Analiză de undă totală ……140
Bibliografie Cap.3. ……...145

## CAP. 4. SISTEME DE PROPAGARE GHIDATĂ CU UNDE ELECTROMAGNETICE DE SUPRAFAȚĂ

4.1. Clasificarea undelor electromagnetice de suprafață. Definiții generale ……...…146
4.2. Unde de suprafață în plăci dielectrice cu substrat metalic ……...149
4.3. Ghidul dielectric plat ……155
4.4. Ghiduri dielectrice cilindrice ……160
4.4.1. Moduri *TM* şi *TE* pure ……161
4.4.2. Soluții generale pentru modurile hibride de propagare în ghidul dielectric cilindric ……..... 165
4.5. Fibre optice ……...168
4.5.1. Fibre optice cu variație abruptă a indicelui de refracție ……..169
4.5.2. Fibre optice cu variație graduală a indicelui de refracție ……173

4.5.3. Efecte de dispersie la propagarea pe fibre optice ……174
Bibliografie Cap.4. ……...179

## CAP. 5. CAVITĂȚI REZONANTE. REZONATOARE DIELECTRICE

5.1. Considerații generale asupra sistemelor electromagnetice rezonante ……..180
5.2. Cavități rezonante paralelipipedice ……..184
5.2.1. Moduri $TM_{mnp}$ ……..184
5.2.2. Moduri $TE_{mnp}$ ……...185
5.2.3. Configurații de câmp ale unor moduri particulare în cavitățile paralelipipedice.186
5.3. Cavități rezonante cilindrice ……192
5.3.1. Moduri $TE_{nmp}$ în cavitățile rezonante cilindrice …...……...192
5.3.2. Moduri $TM_{nmp}$ în cavitățile rezonante cilindrice ……....194
5.3.3. Configurații de câmp ale unor moduri particulare în cavitățile cilindrice …...…195
5.4. Factor de calitate ale cavităților rezonante metalice ……200
5.4.1. Relații generale ……200
5.4.2. Expresii ale factorului de calitate pentru diferite moduri ……203
5.4.3. Curbe de rezonanță. Circuite echivalente ……207
5.5. Rezonatoare dielectrice ……209
5.5.1. Soluții aproximative pentru moduri cu simetrie axială ……...210
5.5.2. Modelul „perete magnetic perfect” (PMP) ……..……212
5.6. Rezonatoare electromagnetice de tip Fabry – Pérot ……215
5.7. Cavități rezonante microstrip ……...218
5.8. Probleme de normare ale componentelor de câmp electromagnetic în ghiduri şi cavități rezonante ……...……225
5.8.1. Probleme de normare în ghiduri metalice ……...…225
5.8.2. Probleme de normare în unele structuri particulare de propagare ghidată …..…231
5.8.3. Probleme de normare în cavități rezonante ……..…234
5.9. Proprietăți de ortogonalitate ale modurilor ……...241
5.9.1. Ghiduri de undă metalice fără pierderi ……241
5.9.2. Generalizarea proprietăților de ortogonalitate ……..…243
Bibliografie Cap.5. ……..……247

## CAP. 6. SISTEME RADIANTE ÎN DOMENIUL MICROUNDELOR

6.1. Considerente fizice introductive ……..……248
6.2. Radiația de la surse elementare ……252
6.2.1. Radiația de la dipolul electric ……..……252
6.2.2. Radiația de la dipolul magnetic ……...…255
6.3. Parametrii fundamentali ai antenelor ……257
6.3.1. Diagrame de radiație ……257
6.3.2. Directivitate ……..…259
6.3.3. Câştigul antenei ……...……261
6.3.4. Impedanța de intrare a antenei ……..……262
6.3.5. Polarizare ……..……264
6.3.6. Arii echivalente ale antenei ……..……267
6.3.7. Ecuația de transmisie Friis ……..……269
6.4. Radiația de la o distribuție de surse. Zone de radiație ……...…271
6.5. Radiația de la aperturi ……...……274
6.5.1. Apertură dreptunghiulară. Relații generale ……..……274

6.5.2. Metoda transformărilor Fourier ……281
6.6. Antene horn ……285
6.6.1. Horn sectorial *E* ……286
6.6.2. Horn sectorial *H* ……292
6.6.3. Antene horn piramidal ……297
6.7. Antene microstrip ……300
6.7.1. Antene microstrip rectangulare ……300
6.7.2. Generalizare ……305
6.7.3. Antene microstrip circulare ……306
Bibliografie Cap.6. ……310

## CAP. 7. EXCITAREA CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎN SISTEMELE DE PROPAGARE GHIDATĂ

7.1. Excitarea câmpurilor electromagnetice în ghidurile metalice prin utilizarea sondelor.311
7.1.1. Relații generale ……311
7.1.2. Excitarea ghidurilor metalice cu ajutorul sondelor ……317
7.1.3. Utilizarea funcțiilor Green diadice ……321
7.2. Excitarea ghidurilor prin utilizarea buclelor ……327
7.3. Excitarea ghidurilor prin aperturi (fante) ……334
7.3.1. Relații generale introductive ……334
7.3.2. Cuplajul modului $TE_{10}$ prin aperturi eliptice ……341
7.3.3. Excitarea ghidurilor metalice prin intermediul aperturii în peretele transversal..344
7.4. Excitarea cavităților rezonante ……348
7.4.1. Considerente introductive referitoare la excitarea rezonatoarelor electrice ……348
7.4.2. Excitarea modului $TE_{101}$ ……351
Bibliografie Cap.7. ……356

## ANEXE

ANEXA AI Elemente de calcul vectorial. Sisteme de coordonate ……357
AI.1. Elemente de calcul vectorial ……357
AI.2. Sisteme de coordonate ……360
ANEXA AII Funcții speciale ……365
AII.1. Funcții delta $\delta$ (Dirac) ……365
AII.2. Funcții Bessel ……368
AII.2.1. Funcții Bessel cilindrice ……368
AII.2.2. Funcții Bessel modificate ……372
AII.2.3. Funcții Bessel sferice ……373
AII.3. Polinoame Legendre ……375
AII.4. Funcții gama ($\Gamma$) ……378
ANEXA AIII Teoreme ale câmpului electromagnetic ……379
AIII.1. Relații generale ……379
AIII.2. Câteva teoreme utilizate în teoria câmpului electromagnetic ……381
ANEXA AIV Funcții Green ……387
AIV.1. Funcții Green în spațiu liber ……387
AIV.2. Funcții Green diadice ……389
AIV.3. Funcții Green bidimensionale ……392
ANEXA V Transformarea Schwarz-Christoffel ……394
Bibliografie ANEXE ……401

# MICROWAVES

## CONTENTS

### VOL. I. PHYSICAL PRINCIPLES

## 0. INTRODUCTION


01. General Considerations Concerning the Classification of Electromagnetic Waves …….1
    01.1. General Chart of the Electromagnetic Spectrum ……..1
    01.2. Microwave Bands ……..……...3
02. About the Content ……5
    02.1. Volume I: Physical Principles ……..……5
    02.2. Volume II: Interaction with the Matter. Applications ……..6
03. Instead of Preface ……..7
References, Introduction ……..9


## CHAPTER 1. EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD. A GENERAL LOOK


1.1. Electromagnetic Fields with Arbitrary Time Variation ……10
    1.1.1. Differential Maxwell's Equations for Arbitrary Time-Varying Fields ……10
    1.1.2. Integral Maxwell's Equations ……13
    1.1.3. Equations of Propagation. Vector and Scalar Potentials ……...15
1.2. Time-Harmonic Electromagnetic Fields ……..……20
    1.2.1. Differential Maxwell's Equations for Time-Harmonic Fields ……..20
    1.2.2. Integral Maxwell's Equations for Time-Harmonic Fields ……22
    1.2.3. Equations of Propagation for Time-Harmonic Fields. Vector and Scalar Potentials ……..……22
1.3. Parameters of Media. Boundary Conditions ……..26
    1.3.1. Constitutive Relations ……...26
    1.3.2. Natural Boundary Conditions ……30
1.4. Conservation of Electromagnetic Energy. Poynting's Theorem ..……..35
    1.4.1. Conservation's Theorem for "Physical Fields" ……35
    1.4.2. Poynting's Theorem for Time-Harmonic Fields ……...37
References, Chapter 1 ……41


## CHAPTER 2. GUIDED PROPAGATION OF MICROWAVES. METALLIC WAVEGUIDES


2.1. Introduction on Plane Waves ……..42
2.2. Modes in Metallic Waveguides ……..44
    2.2.1. Relations between Transverse and Longitudinal Components ……44
    2.2.2. Transverse Magnetic (*TM*) and Transverse Electric (*TE*) Modes in Waveguides..47
2.3. Rectangular Metallic Waveguides ……..49
    2.3.1. *TM* Modes. General Relations for Field Components ……...49

2.3.2. Dispersion Phenomena in Waveguides ……52
2.3.3. Field Distribution for Some Particular $TM_{mn}$ Modes ……56
2.3.4. *TE* Modes. General Relations for Field Components ……60
2.3.5. Field Distribution for Some Particular $TE_{mn}$ Modes ……62
2.4. Circular Cross-Section Metallic Waveguides ……65
2.4.1. $TE_{nm}$ Modes in Circular Waveguides ……65
2.4.2. $TM_{nm}$ Modes in Circular Waveguides ……69
2.4.3. Some Particular Field Distribution in Circular Waveguides ……70
2.5. Power Flow in Metallic Waveguides. Losses ……78
2.5.1. General Relations for Transported Power ……78
2.5.2. Applications for Some Usual Modes ……80
2.5.3. Losses in Metallic Waveguides ……84
References, Chapter 2 ……90

## CHAPTER 3. SOME PARTICULAR STRUCTURES FOR GUIDED PROPAGATION OF MICROWAVES

3.1. Bifilar Transmission Lines ……91
3.1.1. Equations of Propagation ……91
3.1.2. Terminated (Finite-Length) Transmission Lines. Smith Chart ……94
3.1.3. Parameters of Bifilar Lines ……101
3.2. Coaxial Waveguides ……106
3.2.1. Equations of Propagation. Field Distribution ……106
3.2.2. The Parameters of Coaxial Waveguides. Power Flow ……114
3.3. Parallel-Plate Waveguide ……117
3.4. Microstrip Lines. Structure and General Relations ……123
3.4.1. Strip Lines ……124
3.4.2. Microstrip Structures ……127
3.4.2.1. Basic Structures and Methods of Analysis ……127
3.4.2.2. Quasi-Static Approximation ……128
3.4.2.3. Conformal Transformation Method ……131
3.4.2.4. Dispersion Phenomena in Microstrip Lines ……134
3.4.2.5. General Considerations on other Quasi-Static Methods ……138
3.4.2.6. Full-Wave Analysis ……140
References, Chapter 3 ……145

## CHAPTER 4. SYSTEMS FOR GUIDED PROPAGATION WITH SURFACE ELECTROMAGNETIC WAVES

4.1. Classifications of Surface Electromagnetic Waves. General Definitions ……146
4.2. Surface Waves in Dielectric Thin Plates Deposed on Metallic Substrates ……149
4.3. Plane Dielectric-Sheet Waveguides ……155
4.4. Circular Cross-Section Dielectric Waveguides ……160
4.4.1. Pure *TM* and *TE* Modes ……161
4.4.2. General Solutions for Hybrid Modes in Circular Waveguides ……165
4.5. Optical Fiber Cables ……168
4.5.1. Step-Index Optical Fibers ……169
4.5.2. Graded-Index Optical Fibers ……173
4.5.3. Dispersion Effects of the Propagation in Optical Fibers ……174
References, Chapter 4 ……179

## CHAPTER 5. RESONANT CAVITIES. DIELECTRIC RESONATORS


5.1. General Considerations on Resonant Electromagnetic Systems ……..……180
5.2. Rectangular Cavities ……..……184
5.2.1. $TM_{mnp}$ Modes ……...184
5.2.2. $TE_{mnp}$ Modes ……185
5.2.3. Field Distribution for Some Particular Modes in Rectangular Cavities …..……186
5.3. Circular Waveguide Cavities ……192
5.3.1. $TE_{nmp}$ Modes in Cylindrical Cavities ……...192
5.3.2. $TM_{nmp}$ Modes in Cylindrical Cavities ……..……194
5.3.3. Field Distribution for Some Particular Modes in Cylindrical Cavities ……...…195
5.4. Quality (Q) Factor of Metallic Resonant Cavities ……200
5.4.1. General Relations ……200
5.4.2. Formulas for the Q-Factor of Different Modes ……...203
5.4.3. Resonant Curves. Equivalent Circuits ……..……207
5.5. Dielectric Resonators ……209
5.5.1. Approximate Solutions for Modes with Axial Symmetry ……..……210
5.5.2. Perfect Magnetic Conductor (PMC) Model ……212
5.6. Fabry-Perot Electromagnetic Resonators ……..……215
5.7. Microstrip Resonant Cavities ……..……218
5.8. Normalization Problems of Electromagnetic Fields in Waveguides and Resonant Cavities ……225
5.8.1. Normalization in Metallic Waveguides ……...…225
5.8.2. Normalization in Some Particular Systems for Guided Propagation ……..……231
5.8.3. Normalization in Resonant Cavities ……234
5.9. Orthogonal Properties of Modes ……..……241
5.9.1. Metallic Waveguides without Losses ……..……241
5.9.2. Generalization of Orthogonal Properties ……..……...243
References, Chapter 5 ……..……247


## CHAPTER 6. RADIATING SYSTEMS IN THE MICROWAVE RANGE


6.1. Physical Introductory Considerations ……...…248
6.2. Radiation from Elementary Sources ……..……252
6.2.1. Radiation from the Electric Dipole ……..……252
6.2.2. Radiation from the Magnetic Dipole ……...……255
6.3. Fundamental Parameters of Antennas ……..……257
6.3.1. Radiation Pattern ……..……257
6.3.2. Directivity ……259
6.3.3. Gain ……..……261
6.3.4. Input Impedance of the Antenna ……262
6.3.5. Polarization ……..……264
6.3.6. Effective (Equivalent) Area of the Antenna ……267
6.3.7. Friis's Transmission Equation ……..……269
6.4. Radiation from a Distribution of Sources. Region Separation ……..……271
6.5. Radiation from Aperture Antennas ……..……274
6.5.1. Rectangular Aperture. General Relations ……274
6.5.2. Fourier Transform Method ……...…281
6.6. Horn Antennas ……..……285
6.6.1. E-Plane Sectorial Horn ……286

6.6.2. H-Plane Sectorial Horn ……292
6.6.3. Pyramidal Horn Antennas ……297
6.7. Microstrip Antennas ……300
6.7.1. Rectangular Patches ……300
6.7.2. General Relations for Field Components ……305
6.7.3. Circular Patch Antennas ……306
References, Chapter 6 ……310

## CHAPTER 7. EXCITATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS IN THE SYSTEMS OF GUIDED PROPAGATION

7.1. Excitation of Rectangular Waveguides by Probe Antennas ……311
7.1.1. General Relations ……311
7.1.2. Excitation of Metallic Waveguides by Probe Antennas ……317
7.1.3. Utilization of Diadic Green Functions ……321
7.2. Excitation of Waveguides by Loop Antennas ……327
7.3. Excitation of Waveguides by Small Apertures ……334
7.3.1. Introductory General Relations ……334
7.3.2. Coupling of the $TE_{10}$ by Elliptic Apertures ……341
7.3.3. Coupling of Two Waveguides by a Small Aperture in the Common Transverse Wall ……344
7.4. Excitation of Resonant Cavities ……348
7.4.1. Introductory Considerations Concerning the Excitation of Resonant Systems ...348
7.4.2. Excitation of the $TE_{101}$ Mode ……351
References, Chapter 7 ……356

## APPENDIXES

Appendix AI Elements of Vector Calculus. Coordinate Systems ……357
Appendix AII Special Functions: Dirac $\delta$-Functions; Bessel Functions; Legendre Polynomials; $\Gamma$-Functions ……365
Appendix AIII Some Theorems of the Electromagnetic Field ……379
Appendix AIV Green's Functions ……387
Appendix AV Schwarz-Christoffel Transformation ……394
References, Appendixes ……401

# INTRODUCERE

## 0.1. GENERALITĂȚI ASUPRA CRITERIILOR DE CLASIFICARE A UNDELOR ELECTROMAGNETICE

### 0.1.1. Harta generală a spectrului electromagnetic

În funcție de domeniul de interes, în literatura de specialitate sunt utilizate mai multe variante de clasificare a undelor electromagnetice. Harta generală a spectrului electromagnetic este prezentată in Fig. 0.1; această hartă este preluată din lucrarea [1], cu puține modificări de actualizare [2],[7]. Sunt utile câteva observații asupra hărții din Fig. 0.1: a) sub denumirea de bandă de radiodifuziune autorii Sears şi Zemansky includ domeniul de frecvență utilizat pentru emisie-recepție cu modulație de amplitudine; b) domeniul de „unde radio scurte" include în realitate două subdomenii: unde radio scurte şi ultrascurte şi benzile alocate emisiunilor de televiziune; domeniul propriu-zis al microundelor; c) suprapunere parțială a domeniilor de microunde (unde submilimetrice) şi a infraroşului îndepărtat; d) suprapunere parțială a domeniilor ultraviolet şi radiații X.

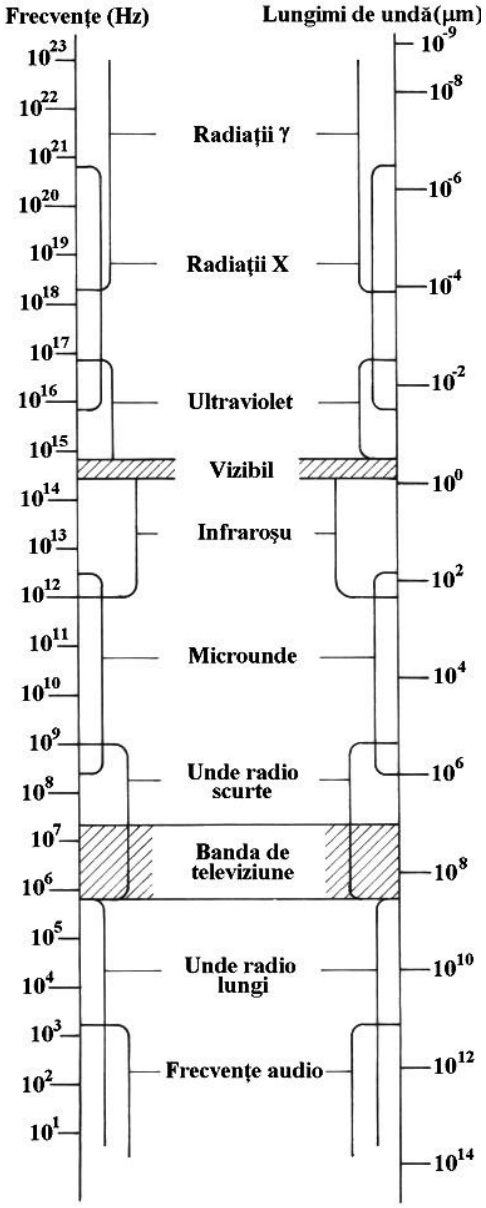



**Fig. 0.1. Harta generală a spectrului electromagnetic**

Având în vedere diversificarea continuă a domeniilor de utilizarea a undelor electromagnetice sunt propuse şi alte configuraţii de hărţi ale spectrului electromagnetic. Referindune la influenţa undelor electromagnetice asupra materiei în general şi a ţesuturilor vii în particular, este ilustrativă harta din Fig. 0.2, în care se marchează energiile corespunzătoare diferitelor tipuri de radiaţii, specificate prin lungimile de undă. Este detaliat intervalul spectrului din vecinătatea regiunii de ultraviolet cu scopul de a delimita două domenii importante din punctul de vedere al efectelor biologice [3], [4]: **1º. radiaţii ionizante** cu lungimi de undă $\lambda < 0{,}2\,\mu m$ ($200nm$) care dau efecte biologice similare cu cele produse de radiaţiile de înaltă energie (radiaţii $X$ şi $\gamma$); **2º. radiaţii neionizante** cu lungimi de undă $\lambda > 0{,}2\,\mu m$ **,** ale căror acţiune asupra ţesuturilor vii produc efecte „termice" şi „nontermice", în funcţie de lungimea de undă, puterea transportată şi natura ţesutului. Acţiunea radiaţiilor de microunde şi de frecvenţe înalte asupra mediului şi a organismelor vii este studiată în volumul II al lucrării.

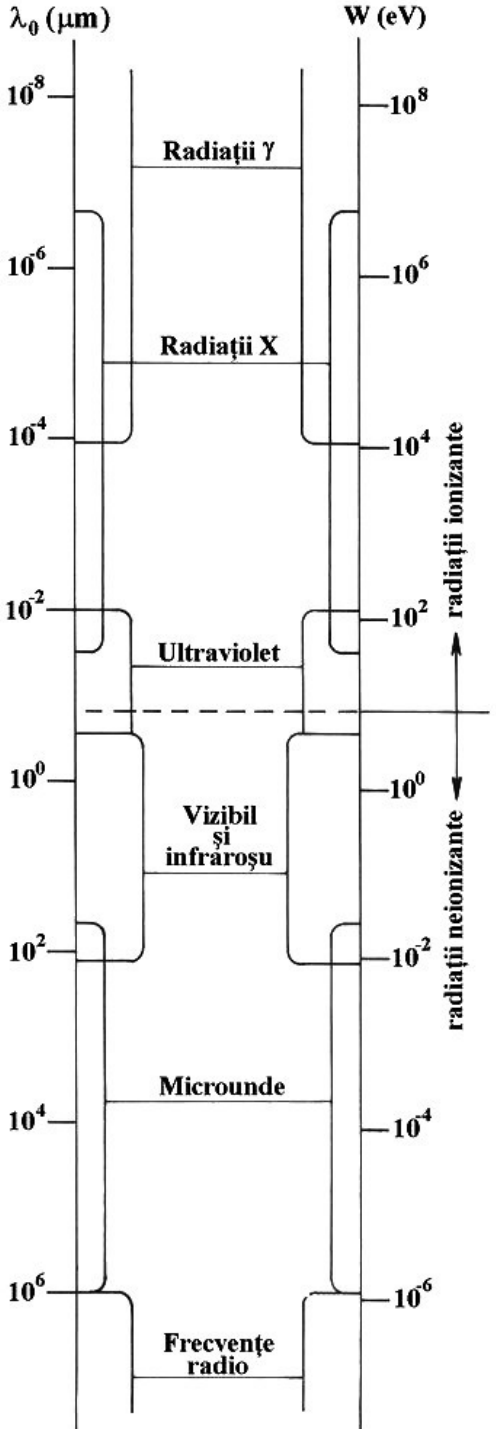



**Fig. 0.2. Spectrul energetic al diferitelor tipuri de radiaţii**

### 0.1.2. Benzi de microunde

Sub forma cea mai generală termenul de *microunde* defineşte banda de unde electromagnetice cuprinsă între frecvenţele $f = 0{,}3 - 6 \cdot 10^3\ GHz$ ; lungimile de undă în spaţiul liber sunt cuprinse între $\lambda_0 = 50\,\mu m - 1\,m$ . Ca urmare a aplicaţiilor multiple în diferite domenii şi a particularităţilor de realizare a echipamentelor de laborator, industriale şi de telecomunicaţii, a apărut necesitatea divizării spectrului de microunde în benzi. De-a lungul timpului au existat mai multe variante de împărţire şi de denumiri ale diferitelor benzi, care de regulă sunt identificate prin litere majuscule. În această secţiune prezentăm cele mai cunoscute variante. Prima împărţire completă a spectrului de microunde în benzi aparţine utilizatorilor de radare (militare), şi a fost propusă în etapa de început a celui de al doilea război mondial. Majoritatea utilizatorilor adoptă nomenclaturile propuse de IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) sau de firme importante producătoare de echipamente de microunde cum ar fi Hewlett-Packard.

În momentul de faţă se consideră valabile denumirile benzilor specificate în Tabelul 01. Identificarea benzilor din acest tabel respectă standardul „IEEE Standard Letter Designation for Radar-Frequency Bands" elaborat în 1976 (IEEE Std 521-1976) şi actualizat în 1984 prin introducerea a două noi litere de identificare, *V* şi *W*, din regiunea undelor milimetrice [5], [6]. Se poate observa că Tabelul 01 include şi benzile de frecvenţe înalte (High Frequency-HF), frecvenţe foarte înalte (Very High Frequency-VHF) şi frecvenţe ultraînalte (Ultra High Frequency-UHF); scopul constă în standardizarea denumirilor pentru acest spectru de frecvenţe.

**Tabel 01. Benzi de frecvenţe. Standard IEEE**

| Denumirea benzii | Domeniu de frecvenţe |
|---|---|
| Frecvenţe înalte (HF) | 3-30 MHz |
| Frecvenţe foarte înalte (VHF) | 30-300 MHz |
| Frecvenţe ultraînalte (UHF) | 300-1000 MHz |
| L | 1-2 GHz |
| S | 2-4 GHz |
| C | 4-8 GHz |
| X | 8-12 GHz |
| Ku | 12-18 GHz |
| K | 18-27 GHz |
| Ka | 27-40 GHz |
| V | 40-75 GHz |
| W | 75-110 GHz |
| Milimetrice | 110-300 GHz |
| Submilimetrice | >300 GHz (300-6000 GHz) |

**Tabel 02. Benzi de frecvenţe Standard Hewlett-Packard**

| Denumirea benzii | Domeniu de frecvenţe (GHz) |
|---|---|
| L | 1,00-2,60 |
| S | 2,60-3,95 |
| G | 3,95-5,85 |
| C | 4,90-7,05 |
| J | 5,30-8,20 |
| H | 7,05-10,00 |
| X | 8,20-12,40 |
| M | 10,00-15,00 |
| P | 12,40-18,00 |
| N | 15,00-22,00 |
| Ku | 15,30-18,00 |
| K | 18,00-26,50 |
| R | 25,50-40,00 |
| Milimetrice | 30,00-300,00 |
| Submilimetrice | >300,00 |

Pe lângă identificarea benzilor arătate în Tabelul 01 au existat şi alte standarde printre care foarte cunoscut este cel adoptat de firma Hewlett-Packard, Tabelul 02 [2], care este utilizat şi astăzi în multe domenii de aplicare a microundelor.

Pentru radiodifuziune, televiziune şi telecomunicaţii digitale sunt utile şi alte identificări (denumiri) ale benzilor de frecvenţe [6], [7]; câteva dintre acestea sunt date în Tabelul 03.

**Tabel 03. Benzi radio şi telefonie mobilă**

| Domenii de utilizare | Bandă de frecvenţe |
|---|---|
| 1. Radiodifuziune cu modulaţie de amplitudine | 0,535-1,605 MHz |
| 2. Radiodifuziune pe unde scurte | 3 – 30 MHz |
| 3. Radiodifuziune cu modulaţie de frecvenţă | 88 – 108 MHz |
| 4. Televiziune VHF (canale 2-13) | 54 – 216 MHz |
| 5. Televiziune UHF (canale 14-83) | 470 – 890 MHz |
| 6. Telefonie mobilă GSM<br>(Global System for Mobile communications, Europe-Asia ) | a) Celular-staţie<br>890 – 915 MHz<br>b) Staţie-celular<br>935-960 MHz |
| 7. Telecomunicaţii digitale fără fir<br>(Digital European Cordless Telecommunications DECT) | 1880-1990 MHz |

Atunci când se urmăreşte delimitarea microundelor propriu zise faţă de domeniile învecinate, este utilă harta din Fig. 0.3 [7], care permite o privire generală asupra undelor electromagnetice.

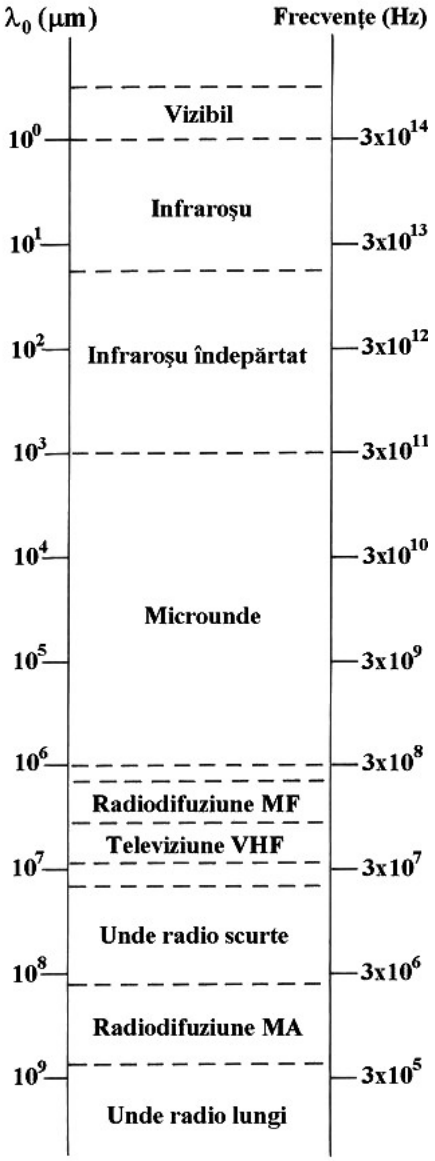



**Fig. 0.3. Harta de evidenţiere a microundelor faţă de domeniile învecinate**

## 0.2. CUPRINS

În sens strict termenul de „*microunde*” delimitează un domeniu de frecvenţe cuprins între $f = 0{,}3 - 6 \cdot 10^3\ GHz$, pentru care se observă o suprapunere parţială cu infraroşul îndepărtat; unii autori consideră că limita superioară trebuie fixată la *300 GHz* (vezi Fig. 03). În terminologia uzuală termenul de microunde, pe lângă delimitarea unui domeniu de frecvenţe, include multiple semnificaţii dintre care enumerăm: domeniu de învăţământ şi de cercetare; tehnici de studiu ale proprietăţilor electrice şi magnetice ale mediului şi materialelor; tehnici de telecomunicaţii; tehnologii de fabricare ale dispozitivelor, componentelor şi echipamentelor de microunde; aplicaţii industriale şi medicale.

Lucrarea de faţă, având titlul general „MICROUNDE”, este structurată în două volume: volumul I (subtitlu „Principii fizice”) se referă la principiile fizice generale privind propagarea ghidată a microundelor în diferite structuri şi în spaţiul liber; volumul II (subtitlu „Interacţiuni cu materia. Aplicaţii”) se referă la interacţiunea câmpurilor de frecvenţe înalte şi de microunde cu materia şi ţesuturile vii, precum şi la diferite aplicaţii specifice ce decurg din aceste interacţiuni. În mod deliberat lucrarea nu abordează probleme referitoare la tehnicile şi echipamentele de telecomunicaţii; cititorul interesat poate găsi aceste aspecte consultând lucrări dedicate subiectului.

### 0.2.1. Volumul I (subtitlu „Principii fizice”)

Aşa cum specifică subtitlul atenţia principală este acordată studierii unor aspecte fizice de bază care intervin în propagarea microundelor atât în sistemele clasice de propagare ghidată, cât şi în unele sisteme mai noi a căror utilizare s-a extins considerabil în ultimele decenii. Scurta prezentare a capitolelor se face prin referire la „Cuprinsul” volumului I, plasat la începutul lucrării.

Capitolul 1 are un caracter introductiv şi la prima vedere s-ar putea face observaţia că prezenţa sa este superfluă. Totuşi apreciez că utilitatea capitolului se justifică prin chestiunile incluse şi prin maniera de tratare. Primele două secţiuni (1.1 şi 1.2) reprezintă o succintă trecere în revistă a ecuaţiilor Maxwell pentru câmpuri fizice (valori instantanee) şi câmpuri armonice, precum şi a ecuaţiilor de propagare propriu zise (ecuaţiile undelor); dacă primele două ecuaţii Maxwell (de evoluţie) pot fi privite ca ecuaţii de propagare implicite, ecuaţiile undelor reprezintă ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea explicite. În secţiunea 1.3. sunt prezentate aspecte fundamentale privind condiţiile la interfaţa a două medii cu parametrii electromagnetici ($\varepsilon, \mu, \sigma$) diferiţi. În încheierea capitolului se prezintă o demonstraţie detaliată a teoremei conservării energiei electromagnetice (Poynting), luându-se în consideraţie toate tipurile de surse şi pierderi care pot exista într-un volum finit de mediu.

Capitolele 2, 3, şi 4 se ocupă de propagarea ghidată a undelor electromagnetice în diferite structuri. Capitolul 2 prezintă o tratare clasică a modurilor de propagare transversal-electrice *TE* şi transversal-magnetice *TM* în ghidurile metalice; o atenţie mai mare se acordă proceselor fizice legate de transmiterea puterii şi de pierderile din pereţii metalici şi în mediul dielectric. În capitolul 3 sunt studiate, pe un spaţiu relativ întins, câteva structuri particulare de propagare ghidată a microundelor: linii bifilare, ghiduri de undă coaxiale, plăci metalice paralele şi linii microstrip. Particularitatea deosebită a acestor structuri constă în faptul că suportă moduri dominante de propagare de tip transversal-electromagnetic *TEM*. Primele trei secţiuni (3.1, 3.2, 3.3) prezintă structurile metalice uzuale cu moduri *TEM*. În ultima secţiune (3.4) sunt prezentate principalele structuri microstrip şi metodele de analiză; unele din aceste metode sunt relativ complicate şi pentru abordarea lor sunt necesare cunoştinţe suplimentare referitoare la funcţiile matematice utilizate. Capitolul 4 are un caracter deosebit, incluzând principalele sisteme de propagare care suportă unde electromagnetice de suprafaţă; aceste sisteme conţin în mod obligatoriu cel puţin un mediu dielectric şi sunt deosebit de actuale. Ghidurile de undă formate din plăci dielectrice pe suport metalic (secţiunea 4.2) şi bare dielectrice plate (secţiune 4.3) au fost introduse pentru a pune în evidenţă principiile fizice şi ecuaţiile pe care se bazează analiza unor astfel de sisteme. Ghidurile dielectrice cilindrice (secţiunea 4.4) şi fibrele optice (secţiunea 4.5) sunt discutate în detaliu; aceste

sisteme au aplicații multiple în tehnicile actuale, în special în telecomunicații şi tehnologia informatică.

Capitolul 5 se referă la cavitățile rezonante şi rezonatoare dielectrice, precum şi la unele probleme de normare şi de ortogonalitate ale modurilor în ghiduri şi în cavități. Secțiunile 5.2, 5.3 şi 5.4 tratează într-o manieră clasică cavitățile rezonante metalice, paralelipipedice şi cilindrice, incluzând şi detalieri asupra factorului de calitate. În secțiunile următoare 5.5, 5.6 şi 5.7 sunt prezentate pe scurt câteva tipuri particulare de cavități şi rezonatoare electromagnetice. Tot în acest capitol sunt tratate probleme de normare şi ortogonalitate ale modurilor în structurile de propagare ghidată şi în cavitățile rezonante. Spre deosebire de alte metode cunoscute, în lucrarea de față drept referință de normare se adoptă densitatea de putere transportată $P_z$ prin structura de propagare (secțiunea 5.8), care are dimensiunea [$W/m^2$]; numai în acest caz mărimile de câmp au dimensiunile adecvate: [$V/m$] pentru $E_0$ şi [$A/m$] pentru $H_0$. În cazul cavităților metalice rezonante şi microstrip referința de normare este densitatea de energie înmagazinată cu dimensiunea [$J/m^3$]; drept urmare mărimile de câmp vor avea dimensiunile: $E_0$ [$V/m$], $H_0$ [$A/m$]. Relațiile de ortogonalitate prezentate în ultima secțiune (5.9) sunt utile la studiul unor sisteme mai complicate în care se pot propaga sau pot fi excitate concomitent mai mult moduri.

Capitolul 6 prezintă o tratare succintă a sistemelor radiante utilizate în domeniul microundelor. Tradițional se constată că problemele de antenistică ocupă un loc distinct în tehnica microundelor şi a frecvențelor înalte, şi de regulă sunt tratate separat; includerea acestui capitol în volumul I al lucrării urmăreşte în principal sublinierea proceselor fizice fundamentale care au loc, şi mai puțin enumerarea de tehnologii şi performanțe constructive. Având în vedere că se urmăreşte punerea în evidență a proprietăților fizice generale, în cadrul metodelor de analiză se utilizează potențiale vectoriale $\vec{A}(\vec{r})$, precum şi corespondența lor cu funcțiile Green de spațiu liber. La început se stabilesc ecuațiile şi parametrii fundamentali ai antenelor simple (dipol electric şi dipol magnetic). O extindere mai mare este alocată antenelor uzuale, larg răspândite, de tipul apertură, horn şi microstrip; pentru aceste tipuri de antene sunt prezentate relațiile de bază ce definesc câmpul radiat, precum şi aprofundări ale unor parametri fundamentali.

Capitolul 7 include subiecte referitoare la excitarea undelor şi câmpurilor electromagnetice în structurile de propagare ghidată şi în sistemele rezonante. Avertizăm cititorul că tratarea acestor subiecte comportă un grad ridicat de dificultate deoarece se bazează pe utilizarea unor relații şi funcții matematice relativ complicate. Sunt prezentate metode de excitare ale ghidurilor de undă cu ajutorul sondelor, buclelor şi aperturilor practicate în pereții longitudinali şi transversali. În cazul sondelor şi buclelor energia provine de regulă de la generatoarele de microunde; aperturile pot fi folosite atât pentru cuplajul generatoarelor la diferite structuri, cât mai ales la cuplajul între ghiduri sau între ghid şi cavitatea rezonantă. Procesele fizice care au loc la cuplajul prin aperturi sunt extrem de complicate datorită faptului că sunt prezente fenomene de transmisie şi reflexie; astfel este necesar calculul unor câmpuri rezultante (locale) pe baza cărora se determină momentele echivalente de dipol prin utilizarea conceptului de polarizare (echivalentă) electrică, respectiv magnetică. La excitarea cavităților rezonante prin aperturi trebuie ținut seama de câteva particularități: ca urmare a fenomenelor de rezonanță (în special pentru factor de calitate ridicat) „câmpul de reacție" cavitate-ghid este foarte important fapt ce duce la diminuarea polarizabilității echivalente, deci şi a dimensiunilor aperturii; există pericolul de a fi excitate concomitent mai multe moduri (superioare) care, deşi au un caracter evanescent, pot perturba procesele de excitare.

Lucrarea conține şi un număr de 9 Anexe, dintre care 5 sunt incluse în primul volum iar restul în volumul al doilea.

### 0.2.2. Volumul II (subtitlu „Interacțiuni cu materia. Aplicații")

La sfârşitul volumului I este prezentat sub formă sintetică şi cuprinsul celui de al doilea volum al lucrării. Prin includerea acestui cuprins se oferă cititorului posibilitatea să-şi facă o imagine de ansamblu asupra lucrării; subliniem totodată că capitolele aparținând volumului II sunt prezentate într-o formă mai condensată, detalierile urmând să fie făcute o dată cu apariția volumului respectiv.

Capitolul 8 se referă la interacțiune câmpurilor şi undelor electromagnetice cu materia. Sunt studiate tipurile importante de polarizare a dielectricilor în câmpuri de înaltă frecvență şi de microunde şi relațiile de bază corespunzătoare; sunt explicitate curbele generale de dispersie a permitivității electrice precum şi procedurile de reprezentare ale datelor experimentale (diagrame Debye, Cole-Cole, Cole-Davidson). De asemenea sunt abordate pe scurt proprietățile materialelor feritice şi fenomenele de rezonanță feromagnetică.

Capitolul 9 include o arie largă de probleme dintre care enumerăm: unde plane în medii cu pierderi, fenomene de reflexie şi transmisie la interfața a două medii dielectrice diferite, propagarea în medii anisotrope dielectrice şi magnetice. În ultima secțiune a capitolului, pe un spațiu mai extins, se prezintă fenomene de difracție (scattering) a undelor electromagnetice pe diferite tipuri de obstacole metalice şi dielectrice.

Capitolele 10 şi 11 tratează subiecte de mare actualitate referitoare la mecanismele de acțiune ale câmpurilor electromagnetice asupra țesuturilor vii, şi la efectele biologice ale acestor câmpuri. În capitolul 10 sunt tratate probleme de bază ce caracterizează acțiunile radiațiilor neionizante (unde electromagnetice) asupra țesuturilor: proprietățile dielectrice şi conductive ale țesuturilor vii, inclusiv lichide biologice, mecanisme de absorbție şi rată specifică de absorbție (SAR), modele teoretice în studiul interacțiunii, constante de propagare şi rezonanțe particulare. În capitolul 11 se prezintă principalele efecte biologice cauzate de radiațiile neionizante: adâncime de pătrundere, efecte termice şi nontermice, efecte asupra unor organe şi sisteme cum ar fi cel imunitar, nervos, circulator, endocrin: capitolul include, de asemenea, chestiuni referitoare la nivelele de expunere şi dozimetrie, şi la standardele de protecție.

Capitolul 12 are un caracter practic pronunțat, prezentând principalele metode de măsurare bazate pe tehnici de microunde. Sunt tratate metodele cu eşantion în ghid de undă, metode de perturbație a cavității rezonante, metode interferometrice şi reflectometrice şi metode de spațiu liber; sunt făcute particularizări pentru materiale dielectrice, ferite şi țesuturi vii.

Capitolul 13 descrie câteva aplicații mai importante ale microundelor şi frecvențelor înalte în domeniul industrial şi medical; dintre acestea enumerăm: industria alimentară (conservarea şi prepararea alimentelor); industria chimică, în particular industria farmaceutică; industria lemnului; metalurgie; metode de diagnoză şi tratament.

Capitolul 14 cuprinde descrieri ale unor componente şi instalații de microunde utilizate în laboratoare şi diferite aplicații; joncțiuni şi cuploare direcționale, dispozitive cu ferite, transformatoare de adaptarea şi elemente de filtre, generatoare de microunde şi sisteme de detecție, tipuri de antene de laborator.

Capitolul 15 prezintă o introducere generală asupra metodelor numerice utilizate la studiul câmpului electromagnetic: metoda diferențelor finite, metoda momentelor, metoda elementului finit şi metode iterative.

## 0.3. ÎN LOC DE PREFAȚĂ

Părți importante din materialul inclus în cele două volume ale lucrării constituiesc rezultate ale activității didactice şi de cercetare, depusă de autor pe o durată de peste 15 ani. Capitolele 1, 2, 3, 5 şi parțial 10 reprezintă prelucrări ale prelegerilor ținute de autor studenților de la Facultatea de Fizică din Iaşi în cadrul unor cursuri obligatorii sau opționale. Capitolele 4, 5, 6, 8, 9 şi parțial 11 reprezintă prelucrări ale cursurilor şi prelegerilor ținute de autor în cadrul studiilor aprofundate şi de masterat precum şi a unor programe intensive ERASMUS desfăşurate la ENSEEIHT Toulouse.

Apreciez că lucrarea este utilă unor categorii suficient de largi de cititori. Prin tematică şi nivel de tratare ea se adresează în primul rând studenților din anii superiori şi specializările master (studii aprofundate) de la Facultatea de Fizică şi Facultățile de profil tehnic unde sunt abordate capitole referitoare la câmpuri şi unde electromagnetice şi interacțiuni cu materia ale acestora; pot fi enumerate facultățile: Electronică şi Telecomunicații, Electrotehnică (şi Energetică), Automatizări şi Calculatoare, Facultatea de profil de la Academia Tehnică Militară. De asemenea, doctoranzii şi

tinerii cercetători din domeniile specificate mai sus vor găsi în lucrare capitole şi teme de interes pentru activitatea lor. Este posibil ca şi alte categorii de specialişti să fie interesaţi de temele tratate în lucrare; de exemplu cei care lucrează în unele domenii conexe cum ar fi: acţiunea radiaţiilor neionizante asupra ţesuturilor şi organismelor vii, fabricarea medicamentelor, aplicaţii ale microundelor în domenii industriale.

La elaborarea lucrării am beneficiat de sugestii şi observaţii utile din partea colegilor şi colaboratorilor; de asemenea la pregătirea tehnică a textului pentru tipărire am beneficiat de ajutorul studenţilor masteranzi de la specializarea Fizică Aplicată, precum şi al unor tineri doctoranzi. Tuturor le aduc cele mai profunde mulţumiri; totodată subliniez că în „Prefaţa" de la volumul II aceste mulţumiri vor fi detaliate şi personalizate.

Iaşi, octombrie 2003
Profesor D. D. Sandu

## Bibliografie Introducere

1. F.W. Sears, M.W. Zemansky „College Physics”, 3-rd edition, Addison-Wesley Book Co, (1960)
2. D.D.Sandu „Dispozitive electronice pentru microunde”, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, (1982)
3. S. Baranski, P. Czerski „Biological Effects of Microwaves”, Dowden, Hutchinson and Ross, Inc Stroudsburg-Pensilvania, (1976)
4. H. Moseley „Non-Ionising Radiation” (Medical Physics Handbooks, 18), Adam Hilger, Bristol and Philadelphia, (1988)
5. M.I. Skolnik „Special Issue on Radar”, Proc. of IEEE, (1985), vol. 73, No. 2
6. C.A. Balanis „Antenna Theory”, second edition, John Wiley and Sons, Inc, N.Y. (1997)
7. D.M. Pozar „Microwave Engineering”, Addison-Wesley, N.Y. (1996)

# CAPITOLUL 1

# ECUAȚII ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC. PRIVIRE GENERALĂ

## 1.1. CÂMPURI ELECTROMAGNETICE CU VARIAȚIE ARBITRARĂ ÎN TIMP

### 1.1.1. Ecuațiile Maxwell diferențiale pentru câmpuri cu variație arbitrară în timp

După cum s-a discutat în „Introducere”, prin expresia generală de „microunde” se înțeleg câmpuri şi unde electromagnetice de frecvențe înalte, cuprinse în banda $0{,}3-300\,GHz$. Comportarea acestor câmpuri şi unde în diferite medii şi structuri de propagare manifestă proprietăți specifice care sunt studiate în cuprinsul lucrării. În acest capitol introductiv sunt prezentate fenomenele fizice şi relațiile fundamentale referitoare la câmpurile şi undele electromagnetice.

Studiul câmpului electromagnetic include, în general, concepte teoretice şi aplicative. Conceptele teoretice sunt descrise de un set de legi fizice de bază, care au fost formulate, în mod experimental, de cercetători celebri ca Faraday, Ampère, Gauss, Coulomb, Volta etc.; aceste legi au fost combinate ingenios într-un set consistent de ecuații diferențiale vectoriale de către J.C. Maxwell. Conceptele aplicative sunt formulate atunci când conceptele teoretice sunt aplicate la proiectarea şi funcționarea unor sisteme practice din diferite domenii de activitate cum ar fi: radiocomunicații, radar, radioastronomie, sisteme de comandă la distanță, ştiința mediului, interacțiunea cu materia şi țesuturile vii, aplicații industriale.

În general, ecuațiile Maxwell pot fi scrise sub formă diferențială şi sub formă integrală; în această secțiune ne oprim asupra formei diferențiale. Ecuațiile Maxwell diferențiale descriu şi stabilesc legături între vectorii de câmp, densitățile de curent şi densitățile de sarcină în orice punct al spațiului şi la orice moment de timp. Pentru ca expresiile ce stabilesc aceste legături să fie valabile se admite că vectorii de câmp sunt funcții continue de poziție şi timp, univoce şi finite şi, de asemenea, posedă derivate continue. Aceste caracteristici sunt specifice şi vectorilor de câmp asociați undelor electromagnetice cu excepția cazurilor unde există variații abrupte ale densităților de sarcină şi curenți. Discontinuitățile de distribuție ale curenților şi sarcinilor survin de regulă la interfețele dintre medii unde au loc schimbări abrupte ale parametrilor electrici şi magnetici; variațiile vectorilor de câmp la astfel de interfețe sunt descrise prin condițiile la limită adecvate (vezi secțiunea 1.3). Se admite că mediile în care acționează câmpurile şi undele electromagnetice sunt caracterizate, în general, prin parametrii constitutivi: $\varepsilon$ - permitivitate electrică, $\mu$ - permeabilitate magnetică şi $\sigma$ - conductivitate electrică.

Ecuațiile Maxwell diferențiale pentru medii „macroscopice” (mediile sunt constituite din agregate macroscopice de atomi şi molecule; adică mărimile de câmp sunt mediate pe un volum suficient de mare în comparație cu volumele ocupate de un atom sau moleculă), sub formă clasică se scriu:

$$\nabla \times \vec{\mathscr{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathscr{B}}}{\partial t} \tag{1.1.1}$$

$$\nabla \times \vec{\mathscr{H}} = \frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} + \vec{\mathscr{J}} \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathscr{D}} = \rho \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathscr{B}} = 0 \tag{1.1.4}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathscr{J}} = -\partial\rho/\partial t \tag{1.1.5}$$

unde $\nabla$ este operatorul diferențial „nabla” (Hamilton).

Câmpurile vectoriale care intervin în aceste ecuații sunt funcții reale de coordonate şi de timp; de exemplu pentru vectorul câmp electric se va scrie $\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$, pentru vectorul câmp magnetic $\vec{\mathscr{H}} = \vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)$ etc.

Sub formă generală mărimile $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$, $\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)$, $\vec{\mathscr{D}}(\vec{r},t)$, $\vec{\mathscr{B}}(\vec{r},t)$, $\vec{\mathscr{J}}(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$ sunt funcții reale, dependente de coordonate şi de timp, şi mulți autori le numesc „câmpuri fizice” [1], [2], [7]. Ele au caracterul unor valori instantanee, şi conform regulilor din sistemul SI ar trebui notate cu litere mici, însă a fost convenită utilizarea literelor rond majuscule.

Înainte de a trece la anumite generalizări sunt utile câteva precizări: 1$^o$) se observă că ecuațiile (1.1.1) şi (1.1.2) reprezintă ecuații diferențiale vectoriale cuplate, de ordin 1 pentru câmpurile $\vec{\mathscr{E}}$ şi $\vec{\mathscr{H}}$ (densitatea de curent poate fi absorbită în parametrii mediului); ele se numesc ecuații de evoluție; 2$^o$) ecuațiile (1.1.3) şi (1.1.4) sunt numite ecuații de stare; 3$^o$) ecuația (1.1.5) reprezintă o ecuație de continuitate care leagă variațiile densității de curent de variația sarcinii $\rho$: curgerea netă a fluxului de curent dintr-un volum elementar este egală cu rata de descreştere în timp a sarcinii. Trebuie observat, de asemenea, că nu toate cele cinci ecuații diferențiale Maxwell sunt independente. Dacă se face divergența ecuației (1.1.1) şi se inversează ordinea operațiilor în membrul drept rezultă ecuația (1.1.4); într-adevăr, fiind dat că divergența oricărui rotor este identic egală cu zero, se va obține $\partial\left(\nabla \cdot \vec{\mathscr{B}}\right)/\partial t = 0$. În mod analog, dacă se face divergența ecuației (1.1.2) şi se ține seama de (1.1.5) rezultă ecuația (1.1.3). Prin urmare se poate trage concluzia că pentru câmpurile variabile de înaltă frecvență numai ecuațiile (1.1.1), (1.1.2), (1.1.5) sunt independente.

*Forma simetrică a ecuațiilor Maxwell diferențiale.* Deoarece până în prezent n-a fost pusă în evidență existența fizică a sarcinii magnetice în natură, ecuațiile Maxwell clasice conțin numai sarcini şi curenți electrici. Adesea însă pentru rezolvarea unor probleme practice este convenabilă introducerea conceptului de curent şi sarcină magnetică (o mică buclă închisă de curent electric este echivalentă cu un curent magnetic). Astfel de situații apar în special la studiul câmpului electromagnetic generat de o distribuție dată de sarcini şi curenți electrici; setul de surse existente fizic poate fi înlocuit printr-un set de surse echivalente, localizate pe suprafața ce delimitează o regiune de interes. În acest caz este necesar să fie satisfăcute condițiile la limită (continuitate pentru componentele tangențiale $\vec{\mathscr{E}}$ şi pentru componentele normale $\vec{\mathscr{B}}$) pe suprafața de limitare; satisfacerea acestor condiții necesită introducerea unei distribuții de densități de curenți şi sarcini magnetice fictive ($\vec{\mathscr{J}}_m, \rho_m$) care nu sunt fizic realizabile; introducerea mărimilor fictive ($\vec{\mathscr{J}}_m, \rho_m$) constituie doar o convenție matematică utilă în rezolvarea unor probleme de condiții la limită şi de radiație a câmpului electromagnetic. Ecuațiile Maxwell diferențiale sub formă simetrică (generalizată) pot fi scrise după cum urmează:

$$\nabla \times \vec{\mathscr{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathscr{B}}}{\partial t} - \vec{\mathscr{J}}_m \tag{1.1.6}$$

$$\nabla \times \vec{\mathscr{H}} = \frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} + \vec{\mathscr{J}}_c + \vec{\mathscr{J}}_s = \frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} + \vec{\mathscr{J}}_t \tag{1.1.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathscr{D}} = \rho + \rho_s = \rho_t \tag{1.1.8}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathscr{B}} = \rho_m \tag{1.1.9}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}_t + \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = 0 \tag{1.1.10}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0 \tag{1.1.11}$$

Sunt necesare explicitări suplimentare asupra naturii curenților şi sarcinilor care intervin în ecuațiile (1.1.6) – (1.1.11). Astfel trebuie făcută distincție între curenți-sursă $\vec{\mathcal{J}}_s$ şi sarcini sursă $\rho_s$ (numite adesea mărimi „*impregnate*") care constituie sursele câmpurilor $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$, şi curenți $\vec{\mathcal{J}}_c$ şi surse $\rho$ care apar datorită prezenței (acțiunii) câmpurilor $\vec{\mathcal{E}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$ într-un mediu cu conductivitate finită. Curenții şi sarcinile care sunt cauzate de prezența câmpului electromagnetic în mediul respectiv se numesc curenți şi sarcini *induse*, care de regulă, pot fi absorbite (încorporate) în parametrii constitutivi ai mediului (vezi secțiunea 1.3).

Precizări utile pot fi făcute în legătură cu interpretarea fizică a termenilor ($\partial\vec{\mathcal{D}}/\partial t$) şi ($\partial\vec{\mathcal{B}}/\partial t$). Față de legea Ampère $\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}}$ pentru câmpuri cvasi-statice, Maxwell a adăugat termenul $\left(\partial\vec{\mathcal{D}}/\partial t\right) = \vec{\mathcal{J}}_d$ unde $\vec{\mathcal{J}}_d$ reprezintă densitatea curentului de deplasare, şi are o importanță deosebită la descrierea câmpurilor electromagnetice cu variație rapidă în timp. Inițial s-a presupus că $\vec{\mathcal{J}}_d$ este rezultatul mişcării „sarcinilor legate" din *eterul universal* – un fluid ideal, imponderabil, care umple întreg spațiul; întrucât prezența eterului universal n-a putut fi demonstrată convingător (prezența eterului n-a putut fi detectată) şi în plus acest concept n-a fost în concordanță totală cu teoria relativității, s-a renunțat la această ipoteză. Dacă însă se presupun medii dielectrice, între mărimile $\vec{\mathcal{D}}$, $\vec{\mathcal{E}}$ şi permitivitatea electrică $\varepsilon$ există relația de definiție

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \tag{1.1.12}$$

unde $\vec{\mathcal{P}}$ este vectorul polarizare electrică; prin urmare se poate scrie

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{\partial t} = \vec{\mathcal{J}}_{em} + \vec{\mathcal{J}}_{pol} = \vec{\mathcal{J}}_d \tag{1.1.13}$$

Se observă că curentul de deplasare are două componente: $\vec{\mathcal{J}}_{pol}$, determinat de procesele de polarizare electrică a mediului; $\vec{\mathcal{J}}_{em}$, numit curent electromagnetic, având semnificația că orice variație în timp a vectorului $\vec{\mathcal{E}}$ în spațiul liber cauzează apariția vectorului $\vec{\mathcal{H}}$ conform relației (1.1.7); astfel se poate considera că acest termen explică propagarea câmpului electromagnetic în spațiul liber. În mod similar se poate interpreta termenul ($\partial\vec{\mathcal{B}}/\partial t$). În medii magnetice, având permeabilitatea magnetică $\mu$, prezența câmpului produce fenomenul de polarizare magnetică, definită prin vectorul polarizare magnetică $\vec{\mathcal{M}}$; între mărimile $\vec{\mathcal{H}}$, $\vec{\mathcal{B}}$ şi $\mu$ există relația

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu\vec{\mathcal{H}} = \mu_0\left(\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}}\right) \tag{1.1.14}$$

Mărimea

$$\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t} = \vec{\mathcal{J}}_{md} = \mu_0\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} + \mu_0\frac{\partial\vec{\mathcal{M}}}{\partial t} \tag{1.1.15}$$

este numită densitate a curentului de deplasare magnetică şi face parte din categoria mărimilor induse.

Trebuie subliniat că în general mărimile $\vec{\mathcal{J}}$ şi $\vec{\mathcal{J}}_m$ reprezintă sume de mărimi sursă (impregnate) şi mărimi induse (de conducție)

$$\vec{\mathscr{J}} = \vec{\mathscr{J}}_s + \vec{\mathscr{J}}_c = \vec{\mathscr{J}}_s + \sigma\vec{\mathscr{E}} \tag{1.1.13a}$$

$$\vec{\mathscr{J}}_m = \vec{\mathscr{J}}_{ms} + \vec{\mathscr{J}}_{mc} = \vec{\mathscr{J}}_{ms} + \sigma_m\vec{\mathscr{H}} \tag{1.1.15a}$$

unde $\sigma_m$ reprezintă o conductivitate de curent magnetic [$\Omega/m$].

Definițiile şi unitățile de măsurare ale mărimilor în SI care intră în ecuațiile Maxwell diferențiale generalizate sunt date în tabelul 1.1.

**Tabelul 1.1. – Definiții şi unități de măsurare în SI ale mărimilor electrice şi magnetice**

| Mărime | Definiție | Unitate de măsurare |
|---|---|---|
| $\vec{\mathscr{E}}$ | intensitatea câmpului electric | $V/m$ |
| $\vec{\mathscr{H}}$ | intensitatea câmpului magnetic | $A/m$ |
| $\vec{\mathscr{D}}$ | densitatea de flux electric (vector deplasare electrică) | $C/m^2$ |
| $\vec{\mathscr{B}}$ | densitatea de flux magnetic (vector inducție magnetică) | $Wb/m^2 = T$ |
| $\vec{\mathscr{J}}_c$ | densitatea curentului electric de conducție | $A/m^2$ |
| $\vec{\mathscr{J}}_s$ | densitatea curentului electric sursă (impregnat) | $A/m^2$ |
| $\vec{\mathscr{J}}_m$ | densitatea curentului magnetic sursă (impregnat) | $V/m^2$ |
| $\vec{\mathscr{J}}_d$ | densitatea curentului electric de deplasare | $A/m^2$ |
| $\vec{\mathscr{J}}_{md}$ | densitatea curentului magnetic de deplasare | $V/m^2$ |
| $\rho$ | densitatea de sarcină electrică | $C/m^3$ |
| $\rho_s$ | densitatea de sarcină electrică – sursă | $C/m^3$ |
| $\rho_m$ | densitatea de sarcină magnetică | $Wb/m^3$ |
| $\varepsilon$ | permitivitatea electrică | $F/m; \varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}\ F/m$ |
| $\mu$ | permeabilitatea magnetică | $H/m; \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ H/m$ |
| $\vec{\mathscr{P}}$ | densitatea de polarizare electrică | $C/m^2$ |
| $\vec{\mathscr{M}}$ | densitatea de polarizare magnetică | $A/m$ |
| $\sigma$ | conductivitatea electrică | $S/m = 1/\Omega m$ |
| $\sigma_m$ | conductivitate de curent magnetic | $\Omega/m$ |

## 1.1.2. Ecuații Maxwell integrale

Formele integrale ale ecuațiilor Maxwell descriu legăturile dintre vectorii de câmp, densitățile de curenți şi densitățile de sarcini pe o regiune extinsă de spațiu; aceste ecuații au o sferă limitată de aplicații şi sunt utilizate în special pentru rezolvarea unor probleme de condiții la limită. Ca particularitate poate fi subliniat faptul că nu este necesar ca câmpurile şi derivatele lor să posede distribuții continue. Ecuațiile Maxwell integrale pot fi deduse din cele diferențiale prin utilizarea teoremelor Stokes şi a teoremei divergenței.

1°. **Teorema Stokes** pentru un vector arbitrar $\vec{A}$ se scrie (A III, (III.1.4))

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{s};\ d\vec{s} = \hat{n}ds \tag{1.1.16}$$

şi are următorul enunț: integrala liniară a unui vector arbitrar $\vec{A}$ în lungul unui contur închis *C* (Fig. 1.1) este egală cu integrala de suprafață a produsului scalar dintre $rot\vec{A}$ şi normala la suprafața *S*, care are drept limită conturul *C*.

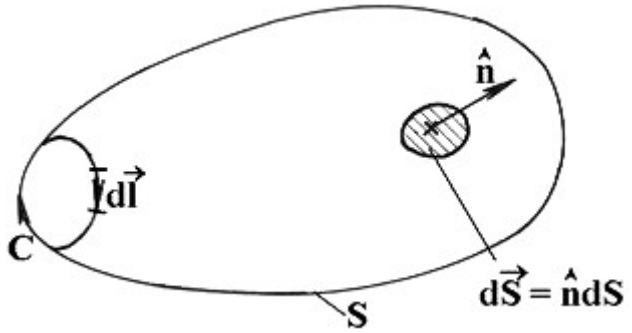



**Fig. 1.1. Ilustrarea teoremei Stokes**

2°. **Teorema divergenței** se scrie (A III, (III.1.1))

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{A} dV \tag{1.1.17}$$

şi are enunțul: integrala pe o suprafață închisă *S* a componentei normale a vectorului arbitrar $\vec{A}$ este egală cu integrala de volum a vectorului , pe întreg volumul închis de *S*.

Ne referim la ecuațiile diferențiale Maxwell clasice (1.1.1) – (1.1.5). Integrând ecuația (1.1.1) pe o suprafață deschisă se obține

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{\mathscr{E}}\right) \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{\mathscr{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \tag{1.1.18}$$

Prin aplicarea teoremei Stokes termenului stâng rezultă

$$\oint_C \vec{\mathscr{E}} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{\mathscr{B}}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \tag{1.1.19}$$

expresie ce reprezintă prima ecuație Maxwell integrală, numită adesea legea Maxwell – Faraday, deoarece, în realitate, reprezintă legea inducției electromagnetice Faraday: tensiunea electromotoare indusă la terminalele unei spire deschise este egală cu rata de descreştere (variație) în timp a fluxului magnetic care străbate aria limitată de spiră.

Procedând analog şi pentru ecuația diferențială (1.1.2) se pot scrie relațiile

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{\mathscr{H}}\right) \cdot d\vec{s} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} + \vec{\mathscr{J}}\right) \cdot d\vec{s} \tag{1.1.20}$$

$$\oint_C \vec{\mathscr{H}} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} + \vec{\mathscr{J}}\right) \cdot d\vec{s} \tag{1.1.21}$$

Ultima expresie reprezintă a doua ecuație Maxwell integrală şi este adesea numită ecuația Maxwell - Ampère deoarece derivă din legea Ampère: integrala liniară a câmpului magnetic pe un drum închis este egală cu curentul total care circulă în mediul înconjurat de acest drum.

Ne referim acum la ecuațiile de stare (1.1.3) şi (1.1.4). Considerăm o suprafață *S* care închide o regiune de volum *V*. Integrând ecuația (1.1.3) pe volumul *V* se obține

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathscr{D}} dV = \int_V \rho dV \tag{1.1.22}$$

Prin aplicarea teoremei divergenței termenului stâng rezultă

$$\int_S \vec{\mathscr{D}} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\mathscr{D}} \cdot \hat{n} ds = \int_V \rho dV = Q_e \tag{1.1.23}$$

unde $Q_e$ este sarcina electrică totală cuprinsă în volumul $V$. Expresia (1.1.23) reprezintă ecuația Maxwell integrală pentru câmpul electric, care derivă din legea Gauss pentru fluxul electric; această lege afirmă că fluxul electric total ce străbate o suprafață închisă este egal cu sarcina totală din volumul închis de suprafață. Procedând similar, din ecuația (1.1.4) se obține

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathscr{B}} dV = 0; \quad \oint_S \vec{\mathscr{B}} \cdot \hat{n} ds = 0 \tag{1.1.24}$$

Dacă se presupune că există sarcini magnetice fictive de densitate $\rho_m$, se poate scrie

$$\oint_S \vec{\mathscr{B}} \cdot \hat{n} ds = \int_V \rho_m dV = Q_m \tag{1.1.25}$$

Ultimele două expresii reprezintă ecuația integrală Maxwell pentru câmpul magnetic şi derivă din legea Gauss pentru fluxul magnetic care afirmă: fluxul magnetic total ce străbate o suprafață închisă $S$ este egal cu zero (cu $Q_m$ dacă se admite prezența sarcinii fictive $\rho_m$).

În fine ne referim la ecuația diferențială de continuitate (1.1.5). Prin integrarea pe volumul $V$ rezultă

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathscr{J}} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \tag{1.1.26}$$

şi aplicând teorema divergenței termenului stâng se obține legea conservării sarcinii (ecuația de continuitate) sub formă integrală

$$\oint_S \vec{\mathscr{J}} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \tag{1.1.27}$$

### 1.1.3. Ecuații de propagare. Potențiale vectoriale şi scalare

După cum s-a specificat în secțiunea (1.1.1) ecuațiile Maxwell diferențiale (1.1.1) şi (1.1.2) reprezintă ecuații de evoluție şi descriu sub formă generală fenomene de propagare ale câmpului electromagnetic din aproape în aproape, cu viteză finită; ele se numesc ecuații de propagare cuplate (implicite), întrucât fiecare ecuație conține ambele componente de câmp. Totodată aceste ecuații permit deducerea unor ecuații de propagare explicite (decuplate) pentru vectorii $\vec{\mathscr{E}}$ şi $\vec{\mathscr{H}}$, precum şi pentru anumite potențiale vectoriale şi scalare.

Se presupun medii liniare, isotrope, omogene şi nedispersive, caracterizate prin parametrii constitutivi $\varepsilon$, $\mu$, $\sigma$. De asemenea, se impun precizări asupra densităților de curenți şi de sarcini; de regulă în ecuațiile de propagare se iau în considerare numai curenții – sursă şi sarcinile – sursă ($\vec{\mathscr{J}}_s, \rho_s$) din ecuațiile (1.1.6) – (1.1.10); curentul $\vec{\mathscr{J}}_c$ (densitatea de curent indus) care este datorat prezenței câmpului în mediul de conductivitate finită $\sigma$ are expresia $\vec{\mathscr{J}}_c = \sigma \vec{\mathscr{E}}$ şi poate fi luat în considerare prin introducerea unei permitivități echivalente a mediului; afară de cazuri speciale se va presupune că sarcina indusă $\rho$ este egală cu zero. Pentru simplificarea scrierii se înlătură indicele „*s*" (cu excepția cazurilor unde pot interveni confuzii), astfel în ecuația (1.1.7) se va scrie $\vec{\mathscr{J}}_t = \vec{\mathscr{J}}_c + \vec{\mathscr{J}}_s = \vec{\mathscr{J}}$ iar în (1.1.8) se va pune $\rho_t = \rho + \rho_s = \rho$; de asemenea se admite că $\mu$ şi $\varepsilon$ sunt constante scalare.

Ecuația de propagare (de undă) pentru câmpul electric $\vec{\mathscr{E}}$ se obține prin efectuarea produsului vectorial al operatorului $\nabla$ cu ecuația (1.1.1)

$$\nabla \times \left( \nabla \times \vec{\mathscr{E}} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \vec{\mathscr{H}} \right) \tag{1.1.28}$$

După dezvoltarea dublului produs vectorial (AI,(I.25)) şi luarea în considerare a ecuației (1.1.2) sau (1.1.7), cu precizările făcute mai sus, se obține

$$\nabla^2\vec{\mathscr{E}} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathscr{E}}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{\mathscr{J}}}{\partial t} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathscr{E}}\right) \tag{1.1.29}$$

unde $\nabla^2$ este operatorul Laplace.
Printr-o procedură similară se obține ecuația de propagare pentru câmpul magnetic

$$\nabla^2\vec{\mathscr{H}} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathscr{H}}}{\partial t^2} = -\nabla\times\vec{\mathscr{J}} \tag{1.1.30}$$

Având în vedere expresia vitezei de fază $v=(\mu\varepsilon)^{-1/2}$, ultimele două ecuații reprezintă într-adevăr *ecuații de propagare* ale câmpului electromagnetic; ele reprezintă ecuații vectoriale diferențiale de ordinul al doilea decuplate (explicite).

*Potențiale $\vec{\mathscr{A}}$ şi $\Phi$.* Atât ecuațiile Maxwell cât şi ecuațiile de undă (1.1.29) şi (1.1.30) sunt ecuații diferențiale vectoriale; fiecare ecuație vectorială poate fi descompusă în trei ecuații scalare pe componentele cartesiene ale mărimilor. În general se urmăreşte reducerea ecuațiilor vectoriale la un sistem de ecuații scalare având mai puține ecuații decât $3n$, unde $n$ este numărul de mărimi vectoriale $\left(\vec{\mathscr{E}},\ \vec{\mathscr{H}},\ \vec{\mathscr{J}}\right)$; în acest scop este convenabilă introducerea unor potențiale vectoriale şi scalare *auxiliare*. Mai întâi au fost introduse potențialul vectorial $\vec{\mathscr{A}}$ şi potențialul scalar $\Phi$, definite prin relațiile

$$\vec{\mathscr{B}} = \nabla\times\vec{\mathscr{A}} \tag{1.1.31}$$

$$\vec{\mathscr{E}} = -\left(\frac{\partial\vec{\mathscr{A}}}{\partial t} + \nabla\Phi\right) \tag{1.1.32}$$

Introducerea acestor potențiale poate fi justificată prin două identități vectoriale:
1°) divergența rotorului oricărui vector este egală cu zero, de exemplu $\nabla\cdot\nabla\times\vec{\mathscr{A}} = 0$, astfel egalitatea (1.1.31) verifică ecuația Maxwell (1.1.4); 2°) rotorul gradientului oricărei funcții scalare este zero, de exemplu $\nabla\times\nabla\Phi = 0$. Ținând cont de (1.1.31) ecuația Maxwell (1.1.1) devine

$$\nabla\times\left(\vec{\mathscr{E}} + \frac{\partial\vec{\mathscr{A}}}{\partial t}\right) = 0 \tag{1.1.33}$$

astfel se poate scrie $\vec{\mathscr{E}} + \partial\vec{\mathscr{A}}/\partial t = -\nabla\Phi$, fapt ce justifică relația (1.1.32).

Dacă scriem ecuația Maxwell (1.1.2)sub forma

$$\nabla\times\vec{\mathscr{B}} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{\mathscr{E}}}{\partial t} + \mu\vec{\mathscr{J}} \tag{1.1.34}$$

şi introducem (1.1.31) şi (1.1.32) rezultă

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{\mathscr{A}}\right) = \mu\vec{\mathscr{J}} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathscr{A}}}{\partial t^2} - \mu\varepsilon\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t}; \tag{1.1.35}$$

după efectuarea dublului produs vectorial şi rearanjarea termenilor rezultă

$$\nabla^2\vec{\mathscr{A}} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathscr{A}}}{\partial t^2} = -\mu\vec{\mathscr{J}} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{\mathscr{A}} + \mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{1.1.36}$$

Introducând (1.1.32) în ecuația Maxwell (1.1.3) se obține

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial\left(\nabla\cdot\vec{\mathscr{A}}\right)}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{1.1.37}$$

Prin urmare utilizarea potențialelor auxiliare $\vec{\mathcal{A}}$ şi $\Phi$ definite de relațiile (1.1.31) şi (1.1.32) a permis obținerea ecuațiilor vectoriale diferențiale (1.1.36) şi (1.1.37). Aceste ecuații sunt cuplate (implicite) în sensul că $\vec{\mathcal{A}}$ şi $\Phi$ intră concomitent în ambele ecuații; de asemenea, fiecare ecuație este echivalentă cu trei ecuații scalare care se leagă între ele pentru mărimi scalare $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{A}_z$, $\Phi$. Aceste inconveniente pot fi înlăturate prin alegerea adecvată a potențialelor $\vec{\mathcal{A}}$ şi $\Phi$ , astfel încât să fie satisfăcută *condiția de calibrare (etalonare) Lorentz*

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{A}} + \mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{1.1.38}$$

în acest caz ecuațiile (1.1.36), (1.1.37) devin

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} = -\mu \vec{\mathcal{J}} \tag{1.1.39}$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.1.40}$$

Condiția de calibrare (gauge) Lorentz poate fi justificată după cum urmează. Potențialele $\vec{\mathcal{A}}$ şi $\Phi$ din relațiile de definiție (1.1.31) şi (1.1.32) sunt arbitrare; dacă se adoptă transformările simultane

$$\vec{\mathcal{A}}_1 = \vec{\mathcal{A}} + \nabla \Lambda, \qquad \Phi_1 = \Phi - \left(\partial \Lambda / \partial t\right) \tag{1.1.41}$$

se observă invarianța câmpurilor $\vec{\mathcal{B}}$ şi $\vec{\mathcal{E}}$ definite prin aceste relații. Într-adevăr sunt uşor de verificat relațiile

$$\nabla \times \vec{\mathcal{A}}_1 = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}; \quad -\left(\partial \vec{\mathcal{A}}_1 / \partial t + \nabla \Phi_1\right) = -\left(\partial \vec{\mathcal{A}} / \partial t - \nabla \Phi\right) \tag{1.1.42}$$

care asigură invarianța câmpurilor $\vec{\mathcal{B}}$ şi $\vec{\mathcal{E}}$, astfel transformările (1.1.41) asigură invarianța de calibrare (gauge) a acestor câmpuri. Dacă $\vec{\mathcal{A}}$ şi $\Phi$ sunt soluțiile ecuațiilor (1.1.39) şi (1.1.40) iar $\Phi$ este legat de $\vec{\mathcal{A}}$ prin relația de calibrare (1.1.38), atunci vectorii $\vec{\mathcal{B}}$ şi $\vec{\mathcal{E}}$ pot fi exprimați numai în funcție de potențialul vector $\vec{\mathcal{A}}$,

$$\vec{\mathcal{B}} = \nabla \times \vec{\mathcal{A}} \tag{1.1.43}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \frac{1}{\mu\varepsilon} \nabla \left( \nabla \cdot \int \vec{\mathcal{A}} dt \right) \tag{1.1.44}$$

*Potențialul* $\vec{\pi}_e$. Potențialele $\vec{\mathcal{A}}$ şi $\Phi$ care satisfac condiția de calibrare Lorentz (1.1.38) pot fi exprimate cu ajutorul unui singur potențial vector $\vec{\pi}_e$, numit vector Hertz electric (uneori potențial de polarizare electrică), definit prin relațiile

$$\vec{\mathcal{A}} = \mu\varepsilon \frac{\partial \vec{\pi}_e}{dt} \tag{1.1.45}$$

$$\Phi = -\nabla \cdot \vec{\pi}_e \tag{1.1.46}$$

Introducând (1.1.45) în (1.1.39) şi integrând o singură dată după $t$, se obține ecuația de propagare pentru vectorul Hertz electric

$$\nabla^2 \vec{\pi}_e - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \int \vec{\mathcal{J}} \, dt \tag{1.1.47}$$

După găsirea soluției acestei ecuații se pot scrie expresiile câmpurilor $\vec{\mathcal{H}}$ şi $\vec{\mathcal{E}}$

$$\vec{\mathcal{H}} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{\Pi}_e\right) \tag{1.1.48}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{\Pi}_e\right) \tag{1.1.49}$$

Dacă se ține seama de ecuația Maxwell (1.1.2) pentru câmpul $\vec{\mathcal{E}}$ se poate scrie expresia

$$\vec{\mathcal{E}} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e - \frac{1}{\varepsilon}\int \vec{\mathcal{J}}\, dt \tag{1.1.50}$$

Asupra ecuației (1.1.47) se pot face comentarii pentru cazul particular al unui mediu fără surse ($\rho = 0,\ \vec{\mathcal{J}} = 0$) şi având $\mu = \mu_0,\ \varepsilon \neq \varepsilon_0$ (mediu cu proprietăți dielectrice pronunțate); în acest caz se poate arăta că sursa pentru vectorul Hertz electric este vectorul polarizare electrică $\vec{\mathcal{P}}$. Ținând cont de (1.1.12) şi (1.1.13) singura componentă de curent care rămâne în ecuația Maxwell (1.1.7) este $\vec{\mathcal{J}}_{pol}$. Drept urmare ecuația (1.1.47) devine

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_e - \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\int \vec{\mathcal{J}}_{pol} dt = -\frac{\vec{\mathcal{P}}}{\varepsilon} \tag{1.1.51}$$

iar vectorul $\vec{\mathcal{E}}$ va avea expresia

$$\vec{\mathcal{E}} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e - \vec{\mathcal{P}}/\varepsilon \tag{1.1.52}$$

*Potențialul* $\vec{\Pi}_h$. Introducerea potențialului vector $\vec{\Pi}_h$, numit vector Hertz magnetic, deşi utilă în multe situații practice, ne apare pronunțat arbitrară.

O primă modalitate de introducere a potențialului vector $\vec{\Pi}_h$ are un caracter formal şi se bazează pe proprietatea de simetrie a ecuațiilor Maxwell (1.1.6) – (1.1.11). Ca urmare a simetriei acestor ecuații există posibilitatea să se efectueze trecerea de la setul de valori $(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{J}}_m, \rho, \rho_m, \varepsilon, \mu, \sigma)$, presupus cunoscut, la un alt set de valori $(\vec{\mathcal{E}}_1, \vec{\mathcal{H}}_1, \vec{\mathcal{J}}_1, \vec{\mathcal{J}}_{m1}, \rho_1, \rho_{m1}, \varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ prin intermediul relațiilor de dualitate (AIII, (III.2.9))

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{H}}_1,\ \ \vec{\mathcal{H}} \to -\vec{\mathcal{E}}_1,\ \ \vec{\mathcal{J}} \to \vec{\mathcal{J}}_{m1},\ \ \vec{\mathcal{J}}_m \to -\vec{\mathcal{J}}_1, \\ &\rho \to \rho_{m1},\ \ \rho_m \to -\rho_1,\ \ \mu \to \varepsilon_1,\ \ \varepsilon \to \mu_1 \end{aligned} \tag{1.1.53}$$

Mărimile notate cu indici „1” satisfac aceleaşi ecuații Maxwell (1.1.6) – (1.1.11). În general relațiile de dualitate (1.1.53) permit şi alte transformări utile precum şi formularea unor principii de echivalență ale câmpului electromagnetic. De exemplu, în cazul mediilor cu parametrii constitutivi $(\varepsilon, \mu)$ pot fi utilizate transformările (AIII, (III.2.10))

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{E}} \to (\mu/\varepsilon)^{1/2}\vec{\mathcal{H}}_1,\ \ \vec{\mathcal{H}} \to -(\varepsilon/\mu)^{1/2}\vec{\mathcal{E}}_1,\ \ \vec{\mathcal{J}} \to (\varepsilon/\mu)^{1/2}\vec{\mathcal{J}}_{m1}, \\ &\vec{\mathcal{J}}_m \to -(\mu/\varepsilon)^{1/2}\vec{\mathcal{J}}_1,\ \ \rho \to (\varepsilon/\mu)^{1/2}\rho_{m1},\ \ \rho_m \to -(\varepsilon/\mu)^{1/2}\rho_1, \end{aligned} \tag{1.1.54}$$

care nu afectează ecuațiile Maxwell şi nu impun schimbarea reciprocă a parametrilor $\varepsilon$ şi $\mu$.

Procedând similar ca pentru vectorul $\vec{\Pi}_e$ şi ținând cont de ultimele două relații, se ajunge la ecuația de propagare pentru vectorul Hertz magnetic [5]

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_h - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu}\int \vec{\mathcal{J}}_m dt \tag{1.1.55}$$

Întrucât $\vec{\mathcal{J}}_m$ este o mărime fictivă, uzual se consideră medii fără surse

( $\rho = 0, \rho_m = 0, \vec{\mathscr{J}} = 0, \vec{\mathscr{J}}_m = 0$ ) şi având $\varepsilon = \varepsilon_0,\ \mu \neq \mu_0$ (medii cu proprietăți magnetice pronunțate); în acest caz se poate arăta că sursa pentru vectorul Hertz magnetic este polarizarea magnetică $\vec{\mathscr{M}}$ . Ținând cont de relațiile (1.1.14) şi (1.1.15) singura componentă de curent magnetic care rămâne în ecuația Maxwell (1.1.6) este cea de polarizare

$$\vec{\mathscr{J}}_{mpol} = \mu\, \partial \vec{\mathscr{M}} / \partial t\,; \tag{1.1.56}$$

prin urmare ecuația de propagare (1.1.55) devine

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_h - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_h}{\partial t^2} = -\vec{\mathscr{M}} \tag{1.1.57}$$

Plecând de la relațiile de dualitate (1.1.53), prin comparație cu (1.1.48) şi (1.1.52) se poate scrie

$$\vec{\mathscr{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{\Pi}_h\right) \tag{1.1.58}$$

$$\vec{\mathscr{H}} = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_h - \vec{\mathscr{M}} \tag{1.1.59}$$

O altă modalitate de introducere a vectorului Hertz magnetic este următoarea [1]. Într-un mediu isotrop, omogen şi fără surse avem $\nabla \cdot \vec{\mathscr{E}} = 0$, astfel $\vec{\mathscr{E}}$ poate fi dedus din rotorul unui potențial vector arbitrar $\vec{\Pi}_h$, numit vectorul Hertz magnetic

$$\vec{\mathscr{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{\Pi}_h\right) \tag{1.1.60}$$

Ecuația Maxwell (1.1.7) devine

$$\nabla \times \vec{\mathscr{H}} = \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathscr{E}}}{\partial t} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\nabla \times \vec{\Pi}_h\right) \tag{1.1.61}$$

deci se poate scrie

$$\vec{\mathscr{H}} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_h}{\partial t^2} + \nabla \Phi \tag{1.1.62}$$

unde $\Phi$ este o funcție scalară arbitrară; întrucât atât $\Phi$ cât şi $\nabla \cdot \vec{\Pi}_h$ sunt arbitrare, pentru satisfacerea unei condiții de calibrare de tip Lorentz se poate lua $\Phi = \nabla \cdot \vec{\Pi}_h$. Dacă se introduce (1.1.60) în ecuația Maxwell (1.1.6) rezultă

$$\nabla \times \vec{\mathscr{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_h\right) = -\mu \frac{\partial \vec{\mathscr{H}}}{\partial t} - \vec{\mathscr{J}}_m \tag{1.1.63}$$

Dezvoltând dublul produs vectorial, introducând expresia câmpului magnetic dată de (1.1.62) şi efectuând o singură integrare după $t$, rezultă

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_h - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_h}{\partial t^2} = -\frac{1}{\mu} \int \vec{\mathscr{J}}_m dt \tag{1.1.64}$$

Dacă se consideră medii fără surse şi cu proprietăți magnetice pronunțate, se ajunge la ecuația (1.1.57).

*Observație***.** Se poate observa că toate ecuațiile de propagare pentru câmpuri fizice (1.1.29), (1.1.30), (1.1.39), (1.1.40), (1.1.47), (1.1.51), (1.1.55) şi (1.1.57), pot fi puse sub forma generală

$$\nabla^2 \vec{\Theta} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\Theta}}{\partial t^2} = -\vec{\xi} \tag{1.1.65}$$

în care: $\Theta(\vec{r},t)$ poate fi una din mărimile $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$, $\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)$, $\vec{\mathscr{A}}(\vec{r},t)$, $\Phi(\vec{r},t)$, $\vec{\pi}_e(\vec{r},t)$ sau $\vec{\pi}_h(\vec{r},t)$; $\vec{\xi}(\vec{r},t)=\vec{\xi}\left(\vec{\mathscr{J}},\vec{\mathscr{J}}_m,\rho,\vec{\mathscr{P}},\vec{\mathscr{M}}\right)$ este funcție de structura surselor; $v=(\mu\varepsilon)^{-1/2}$ reprezintă viteza de propagare a undelor electromagnetice. Ecuația (1.1.65) este o ecuație de tip D'Alembert neomogenă şi se scrie condensat

$$\Box\vec{\Theta}+\vec{\xi}=0 \tag{1.1.66}$$

unde operatorul

$$\Box=\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{1.1.67}$$

reprezintă D'Alembertianul ecuației de propagare.

## 1.2. CÂMPURI ELECTROMAGNETICE CU VARIAȚIE ARMONICĂ ÎN TIMP

### 1.2.1. Ecuații Maxwell diferențiale pentru câmpuri electromagnetice armonice

În general în domeniul microundelor şi al frecvențelor foarte înalte câmpurile electromagnetice au variație armonică în timp, astfel dependența de timp poate fi reprezentată prin funcția exponențială complexă $exp(j\omega t)$; pierderea în generalitate prin această restricție este neînsemnată întrucât orice variație în timp fizic realizabilă poate fi descompusă într-un spectru de funcții armonice cu ajutorul seriilor Fourier.

Pentru câmpurile cu variație armonică, numite adesea câmpuri „monocromatice" este foarte convenabilă notația fazorială, astfel se presupune că toate mărimile de câmp sunt fazori vectoriali complecşi, asociați cu o variație de timp de tipul $exp(j\omega t)$; fazorii vectoriali se notează cu litere romane majuscule şi sunt funcții numai de coordonatele spațiale. La fel ca în majoritatea tratatelor şi în lucrarea de față se va presupune o dependență de timp de tip *cosinus* a fazorilor vectoriali; astfel pentru vectorul câmp electric $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$ în medii liniare, isotrope, omogene şi nedispersive se scrie

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=Re\left[\underline{\vec{E}}(\vec{r})e^{j\omega t}\right] \tag{1.2.1}$$

unde $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ reprezintă un *fazor vectorial complex*, caracterizat prin modul şi fază. Deşi $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ este o mărime complexă, pentru simplificarea scrierii se elimină bara de subliniere; de asemenea, trebuie avut în vedere că $\underline{\vec{E}}(\vec{r})$ din (1.2.1) reprezintă amplitudinea câmpului (valoarea maximă $\vec{E}_m(\vec{r})$) şi nu valoarea efectivă. De exemplu pentru componenta după $x$ a câmpului electric, se poate scrie

$$\mathscr{E}_x(\vec{r},t)=Re\left[\underline{E}_{mx}(\vec{r})e^{j\omega t}\right]=E_{mx}(\vec{r})\cos(\omega t+\Phi_x) \tag{1.2.2}$$

prin urmare $\underline{E}_{mx}(\vec{r})=E_{mx}(\vec{r})exp(j\Phi_x)$ reprezintă un fazor scalar complex, iar $E_{mx}(\vec{r})$ reprezintă într-adevăr o amplitudine.

În scrierea uzuală se renunță la specificația $Re$ din (1.2.1), astfel se va scrie simplificat

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{1.2.3}$$

dar se subînțelege că în final, după rezolvarea unor ecuații scrise pentru mărimi fazoriale, câmpurile fizice (valorile instantanee) se determină prin relații de tipul (1.2.1).

În secțiunea 1.2 se prezintă ecuațiile Maxwell diferențiale şi integrale şi ecuațiile de propagare pentru câmpuri armonice; ori de câte ori este necesar se vor face referiri directe la relațiile prezentate în secțiunea 1.1. Pe baza relației (1.2.3) se observă că relația de derivare după $t$ se reduce la înmulțirea funcției cu $j\omega$, iar operația de integrare se reduce la împărțirea la $j\omega$, prin urmare avem $\partial/\partial t\rightarrow j\omega t,\ \int\rightarrow 1/j\omega$.

Ecuațiile diferențiale vectoriale Maxwell pentru medii liniare, isotrope, omogene şi nedispersive, scrise pentru mărimi fazoriale, au forma

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{B}(\vec{r}) \tag{1.2.4}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = j\omega\vec{D}(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \tag{1.2.5}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \tag{1.2.6}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \tag{1.2.7}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = -j\omega\rho(\vec{r}) \tag{1.2.8}$$

Trebuie precizat că $\vec{J}(\vec{r})$ $\left[A/m^2\right]$ şi $\rho(\vec{r})$ $\left[C/m^3\right]$ au semnificația unor densități de curenți şi sarcini; se admite că atât $\vec{J}(\vec{r})$ şi $\rho(\vec{r})$ au variații în timp de tipul $exp(j\omega t)$; în urma acestor precizări rezultă că toate mărimile din ecuațiile (1.2.4) – (1.2.8) sunt însoțite de factorul $exp(j\omega t)$, care s-a simplificat. De asemenea, trebuie observat că numai ecuațiile (1.2.4), (1.2.5) şi (1.2.8) sunt independente; dacă se face divergența ecuației (1.2.4) şi se inversează ordinea operațiilor rezultă (1.2.7); în mod analog, dacă se face divergența ecuației (1.2.5) şi se ține seama de ecuația (1.2.8), rezultă ecuația (1.2.6).

Ecuațiile diferențiale Maxwell în forma simetrică (completă) pentru mărimi fazoriale, pot fi scrise prin analogie cu (1.1.6) – (1.1.11); se obține

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{B}(\vec{r}) - \vec{J}_{ms}(\vec{r}) - \vec{J}_{mc}(\vec{r}) \tag{1.2.9}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = j\omega\vec{D}(\vec{r}) + \vec{J}_c(\vec{r}) + \vec{J}_s(\vec{r}) \tag{1.2.10}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) + \rho_s(\vec{r}) = \rho_t(\vec{r}) \tag{1.2.11}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \rho_m(\vec{r}) \tag{1.2.12}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) + j\omega\rho_t(\vec{r}) = 0 \tag{1.2.13}$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_m(\vec{r}) + j\omega\rho_m(\vec{r}) = 0 \tag{1.2.14}$$

unde $\vec{J}_c(\vec{r})$ şi $\rho_c(\vec{r})$ sunt mărimi induse, care în anumite situații pot fi absorbite în parametrii constitutivi ai mediului; $\vec{J}_s(\vec{r})$ şi $\rho_s(\vec{r})$ sunt mărimi sursă; $\vec{J}_m(\vec{r})$ şi $\rho_c(\vec{r})$ sunt mărimi magnetice fictive.

Este necesar să fie explicitați termenii $j\omega\vec{B}(\vec{r})$ şi $j\omega\vec{D}(\vec{r})$, având în vedere relațiile (1.1.12) – (1.1.15). Vectorul densitate de flux electric are expresia

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \tag{1.2.15}$$

iar derivata sa este

$$j\omega\vec{D}(\vec{r}) = j\omega\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r}) + j\omega\vec{P}(\vec{r}) = \vec{J}_{em}(\vec{r}) + \vec{J}_{pol}(\vec{r}) = \vec{J}_d(\vec{r}) \tag{1.2.16}$$

În mod similar, vectorul densitate de flux magnetic (vectorul inducție magnetică) are expresia

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu\vec{H}(\vec{r}) = \mu_0\left[\vec{H}(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r})\right] \tag{1.2.17}$$

iar derivata sa este

$$j\omega\vec{B}(\vec{r}) = j\omega\mu_0\vec{H}(\vec{r}) + j\omega\mu_0\vec{M}(\vec{r}) = \vec{J}_{mh}(\vec{r}) + \vec{J}_{mpol}(\vec{r}) = \vec{J}_{mb}(\vec{r}) \tag{1.2.18}$$

unde: $\vec{J}_{mb}(\vec{r})$ este densitatea de curent magnetic de deplasare (indus); $\vec{J}_{mpol}(\vec{r})$ este densitatea de curent magnetic de polarizare; $\vec{J}_{mh}(\vec{r})$ are semnificația unei densități de curent de tip „*electromagnetic*".

Ecuațiile (1.2.9) şi (1.2.10) pot fi scrise condensat:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{J}_{ms} - j\omega\mu_0\mu_{rec}\vec{H}(\vec{r}) \tag{1.2.19}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_s + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{rec}\vec{E}(\vec{r}) \tag{1.2.20}$$

unde s-a notat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rec} &= \varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = \varepsilon_r' - j\varepsilon_r'' = \varepsilon_r'(1 - j\tan\delta_E) \\ \mu_{rec} &= \mu_r - j\frac{\sigma_m}{\omega\mu_0} = \mu_r' - j\mu_r'' = \mu_r'(1 - j\tan\delta_H) \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

De asemenea, dacă în (1.2.13), (1.2.14) curenții au semnificația de surse şi introducem în (1.2.11), (1.2.12), ecuațiile Maxwell de stare devin

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon\vec{E}) &= -(\nabla \cdot \vec{J}_s)/j\omega \\ \nabla \cdot (\mu\vec{H}) &= -(\nabla \cdot \vec{J}_{ms})/j\omega \end{aligned} \tag{1.2.22}$$

### 1.2.2. Forma integrală a ecuațiilor Maxwell pentru mărimi fazoriale

Ținând cont de considerentele expuse în secțiunea 1.1.2, scriem direct ecuațiile Maxwell integrale clasice pentru mărimi fazoriale.

Aplicând teorema Stokes ecuațiilor diferențiale de evoluție (1.2.4) şi (1.2.5) se obține forma integrală a ecuațiilor Maxwell:

$$\int_S \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -j\omega \int_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \tag{1.2.23}$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = \int_S \left[j\omega\vec{D}(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r})\right] \cdot d\vec{s} \tag{1.2.24}$$

Prin utilizarea teoremei divergenței ecuațiile de stare (1.2.6), (1.2.7) şi cea de continuitate (1.2.8) iau forma integrală:

$$\oint_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \int_V \rho dV = Q_e \tag{1.2.25}$$

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 0 \tag{1.2.26}$$

$$\oint_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = -j\omega \int_V \rho dV = -Q_e / j\omega \tag{1.2.27}$$

În expresiile (1.2.23) şi (1.2.24) S semnifică o suprafață deschisă mărginită de conturul închis *C*; în expresiile (1.2.25), (1.2.26) şi (1.2.27) *S* semnifică o suprafață închisă ce delimitează volumul *V*.

### 1.2.3. Ecuații de propagare pentru mărimi fazoriale. Potențiale vectoriale şi scalare

Considerentele expuse în secțiunea 1.1.3 rămân în totalitate valabile adică se presupun medii liniare, isotrope, omogene şi nedispersive ($\mu$ şi $\varepsilon$ sunt constante scalare, în general complexe), iar mărimile $\vec{J}$ şi $\rho$ din ecuațiile diferențiale Maxwell reprezintă densități de curenți-sursă, respectiv densități de sarcini-sursă.

Ecuațiile de propagare (de undă) pentru câmpurile fizice (1.1.29) şi (1.1.30) iau forma fazorială

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu \vec{J}_s(\vec{r}) + \nabla\rho(\vec{r})/\varepsilon \tag{1.2.28}$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) = -\nabla \times \vec{J}_s(\vec{r}) \tag{1.2.29}$$

unde s-a precizat că singura sursă este curentul electric $\vec{J}_s(\vec{r})$, iar

$$k = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} = k_0 n \tag{1.2.30}$$

este numărul de undă (sau constanta de propagare) în mediul caracterizat de parametrii constitutivi ($\mu,\varepsilon$); $k_0 = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2} = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda_0$ este numărul de undă pentru spațiul liber ($\lambda_0$ reprezintă lungimea de undă în spațiul liber pentru unda electromagnetică plană; $n = (\mu_r\varepsilon_r)^{1/2}$ este indicele de refracție al mediului.

*Potențiale vectoriale şi scalare.*

În cazul câmpurilor armonice este utilă o discuție mai largă asupra potențialelor vectoriale şi scalare.

a) Sursa este reprezentată de curentul electric $\vec{J}_s$ $\left(\vec{J}_{ms} = 0\right)$. În acest caz fluxul magnetic este totdeauna zero, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$; ținând cont de identitatea vectorială $\nabla \cdot \nabla \times \vec{A} = 0$ potențialul vectorial (magnetic) $\vec{A}(\vec{r})$ este definit prin relația

$$\vec{B}_e = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}); \quad \vec{H}_e = (1/\mu)\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{1.2.31}$$

Utilizând expresia $\nabla \times \vec{E}$ din ecuația Maxwell se poate scrie

$$\nabla \times \vec{E}_e = -j\omega\mu\vec{H}_e = -j\omega\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{1.2.32}$$

sau

$$\nabla \times \left[\vec{E}_e + j\omega\vec{A}(\vec{r})\right] = 0 \tag{1.2.33}$$

Pe baza identității vectoriale $\nabla \times (-\nabla\Phi_E) = 0$ se obține

$$\vec{E}_e = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \nabla\Phi_E(\vec{r}) \tag{1.2.34}$$

unde $\Phi_E(\vec{r})$ este un potențial electric scalar arbitrar. Introducând ultima relație în ecuația Maxwell (1.2.6) avem

$$\nabla^2\Phi_E(\vec{r}) + j\omega\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon \tag{1.2.35}$$

iar condiția de calibrare Lorentz (1.1.38) pentru câmpuri armonice (mărimi fazoriale) ia forma

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) + j\omega\varepsilon\mu\Phi_E(\vec{r}) = 0 \tag{1.2.36}$$

Ecuația Maxwell referitoare la rotorul vectorului $\vec{H}$ se scrie

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \mu\vec{J}_s(\vec{r}) + j\omega\varepsilon\left(-j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \nabla\Phi_E(\vec{r})\right) \tag{1.2.37}$$

Pentru dezvoltarea dublului produs vectorial se utilizează identitatea vectorială (AI, (I.25)), astfel se obține ecuația de propagare pentru potențialul $\vec{A}(\vec{r})$

$$\nabla^2\vec{A}(\vec{r}) + k^2\vec{A}(\vec{r}) = -\mu\vec{J}_s + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) + j\omega\mu\varepsilon\Phi_E(\vec{r})\right) \tag{1.2.38}$$

şi ținând cont de condiția (1.2.36) se pot scrie ecuațiile de propagare pentru $\vec{A}(\vec{r})$ şi $\Phi_E(\vec{r})$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}_s(\vec{r}) \tag{1.2.39}$$

$$\nabla^2 \Phi_E(\vec{r}) + k^2 \Phi_E(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon \tag{1.2.40}$$

După rezolvarea ecuației (1.2.39) câmpurile $\vec{H}$ şi $\vec{E}$ se determină din (1.2.31) şi (1.2.34) adică

$$\vec{H}_e = (1/\mu)\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{1.2.41}$$

$$\vec{E}_e = -j\omega \vec{A}(\vec{r}) - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})\right) \tag{1.2.42}$$

b) Sursa este reprezentată de $\vec{J}_{ms}$ $\left(\vec{J}_s = 0, \rho = 0\right)$. În acest caz fluxul electric este zero $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, prin urmare potențialul vectorial (electric) $\vec{A}_h$ poate fi definit prin relația

$$\vec{E}_h = -(1/\varepsilon)\nabla \times \vec{A}_h(\vec{r}) \tag{1.2.43}$$

introducând pe $\vec{E}_h$ în expresia rotorului câmpului magnetic avem

$$\nabla \times \vec{H}_h = j\omega\varepsilon \vec{E}_h \tag{1.2.44}$$

astfel se poate scrie

$$\nabla \times \left(\vec{H}_h + j\omega \vec{A}_h(\vec{r})\right) = 0 \tag{1.2.45}$$

Utilizând identitatea vectorială $\nabla \times \left(-\nabla \Phi_H(\vec{r})\right) = 0$ se poate scrie

$$\vec{H}_h = -\left(\nabla \Phi_H(\vec{r}) + j\omega \vec{A}_h(\vec{r})\right) \tag{1.2.46}$$

unde $\Phi_H(\vec{r})$ este un potențial magnetic scalar arbitrar. Făcând rotor din (1.2.43)

$$\nabla \times \vec{E}_h = -(1/\varepsilon)\left(\nabla\nabla \cdot \vec{A}_h(\vec{r}) - \nabla^2 \vec{A}_h(\vec{r})\right) \tag{1.2.47}$$

şi egalând cu ecuația Maxwell corespunzătoare

$$\nabla \times \vec{E}_h = -\vec{J}_{ms} - j\omega\mu \vec{H}_h \tag{1.2.48}$$

ajungem la o ecuație de propagare

$$\nabla^2 \vec{A}_h(\vec{r}) + j\omega\varepsilon\mu \vec{H}_h = \nabla\nabla \cdot \vec{A}_h(\vec{r}) - \varepsilon \vec{J}_{ms} \tag{1.2.49}$$

Dacă introducem (1.2.46) în (1.2.49) se obține

$$\nabla^2 \vec{A}_h(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_h(\vec{r}) = -\varepsilon \vec{J}_{ms} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}_h(\vec{r})\right) + \nabla\left(j\omega\mu\varepsilon \Phi_H(\vec{r})\right) \tag{1.2.50}$$

Punând o condiție de calibrare de tip Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A}_h(\vec{r}) = -j\omega\mu\varepsilon \Phi_H(\vec{r}) \tag{1.2.51}$$

ecuația de propagare (1.2.50) se reduce la

$$\nabla^2 \vec{A}_h(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_h(\vec{r}) = -\varepsilon \vec{J}_{ms}(\vec{r}); \tag{1.2.52}$$

de asemenea, se poate scrie şi o ecuație de propagare pentru potențialul scalar $\Phi_H(\vec{r})$

$$\nabla^2 \Phi_H(\vec{r}) + k^2 \Phi_H(\vec{r}) = -\rho_m/\mu \tag{1.2.53}$$

După rezolvarea ecuației de propagare (1.2.52), câmpurile $\vec{E}_h$ şi $\vec{H}_h$ se determină din (1.2.43) şi (1.2.46):

$$\vec{E}_h = -(1/\varepsilon)\nabla \times \vec{A}_h(\vec{r}) \tag{1.2.54}$$

$$\vec{H}_h = -j\omega\vec{A}_h(\vec{r}) - \frac{j}{\omega\mu\varepsilon}\nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}_h(\vec{r})\right) \tag{1.2.55}$$

În ultima relație s-a ținut seama de (1.2.51).

*c) Potențiale vectoriale* $\vec{\Pi}_e(\vec{r})$ *şi* $\vec{\Pi}_h(\vec{r})$**.**

Potențialele $\vec{A}(\vec{r})$ şi $\Phi_E(\vec{r})$ care satisfac condițiile de calibrare Lorentz (1.2.36) pot fi exprimate cu ajutorul unui singur vector $\vec{\Pi}_e(\vec{r})$, numit vector Hertz electric; $\vec{\Pi}_e(\vec{r})$ este definit prin relațiile

$$\vec{A}(\vec{r}) = j\omega\mu\varepsilon\vec{\Pi}_e(\vec{r}) \tag{1.2.56}$$

$$\Phi_E(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{\Pi}_e(\vec{r}) \tag{1.2.57}$$

Introducând (1.2.56) în (1.2.39) se obține ecuația de propagare pentru vectorul Hertz electric

$$\nabla^2\vec{\Pi}_e(\vec{r}) + k^2\vec{\Pi}_e(\vec{r}) = -\vec{J}_s(\vec{r})/j\omega\varepsilon \tag{1.2.58}$$

După rezolvarea acestei ecuații se pot scrie expresiile câmpurilor $\vec{H}_e(\vec{r})$ şi $\vec{E}_e(\vec{r})$

$$\vec{H}_e(\vec{r}) = j\omega\varepsilon\nabla \times \vec{\Pi}_e(\vec{r}) \tag{1.2.59}$$

$$\vec{E}_e(\vec{r}) = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_e(\vec{r}) - \vec{J}_s(\vec{r})/j\omega\varepsilon \tag{1.2.60}$$

În cazul unui mediu fără surse ($\vec{J}_s = 0,\ \vec{J}_{ms} = 0,\ \rho = 0,\ \rho_m = 0$) şi având $\mu = \mu_0,\ \varepsilon \neq \varepsilon_0$ (mediu cu proprietăți dielectrice pronunțate) singura sursă pentru vectorul Hertz electric este vectorul polarizare electrică $\vec{P}$; astfel singura componentă de curent care rămâne în ecuația Maxwell (1.2.10) este $\vec{J}_{pol}(\vec{r})$, iar (1.2.58) devine

$$\nabla^2\vec{\Pi}_e(\vec{r}) + k^2\vec{\Pi}_e(\vec{r}) = -\vec{P}(\vec{r})/\varepsilon\,; \tag{1.2.61}$$

unii autori includ adesea în mărimea $\vec{P}(\vec{r})$ toți curenții şi sarcinile electrice existente în mediul respectiv:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \frac{\partial\vec{P}(\vec{r},t)}{\partial t} = j\omega\vec{P}(\vec{r});\quad \rho = -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) \tag{1.2.62}$$

Potențialele $\vec{A}_h(\vec{r})$ şi $\Phi_H(\vec{r})$ care satisfac condițiile de calibrare (1.2.51) pot fi exprimate cu ajutorul unui singur vector $\vec{\Pi}_h(\vec{r})$ numit vector Hertz magnetic, care se defineşte prin relațiile

$$\vec{A}_h(\vec{r}) = -j\omega\mu\vec{\Pi}_h(\vec{r}) \tag{1.2.63}$$

$$\Phi_H(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{\Pi}_h(\vec{r}) \tag{1.2.64}$$

Introducând (1.2.63) în (1.2.52) rezultă ecuația de propagare pentru vectorul Hertz magnetic

$$\nabla^2\vec{\Pi}_h(\vec{r}) + k^2\vec{\Pi}_h(\vec{r}) = -\vec{J}_{ms}(\vec{r})/j\omega\mu \tag{1.2.65}$$

După rezolvarea acestei ecuații se pot scrie expresiile câmpurilor $\vec{E}_h(\vec{r})$ şi $\vec{H}_h(\vec{r})$

$$\vec{E}_h(\vec{r}) = -j\omega\mu\nabla \times \vec{\Pi}_h(\vec{r}) \tag{1.2.66}$$

$$\vec{H}_h(\vec{r}) = \nabla \times \nabla \times \vec{\Pi}_h(\vec{r}) - \vec{J}_{ms}(\vec{r})/j\omega\mu \tag{1.2.67}$$

În cazul unor medii fără surse şi având $\varepsilon = \varepsilon_0$ şi $\mu \neq \mu_0$ (medii cu proprietăți magnetice pronunțate) singura sursă pentru $\vec{\Pi}_h(\vec{r})$ este vectorul polarizare magnetică $\vec{M}$; ținând cont de (1.2.17) şi (1.2.18) singura componentă de curent care rămâne este curentul magnetic de polarizare $\vec{J}_{mpol}(\vec{r})$ iar (1.2.65) devine

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_h(\vec{r}) + k^2 \vec{\Pi}_h(\vec{r}) = -\vec{M}(\vec{r}); \tag{1.2.68}$$

aşa cum rezultă din (1.2.9) avem

$$\vec{J}_{mpol}(\vec{r}) = j\omega\mu\vec{M}(\vec{r}) \tag{1.2.69}$$

Vectorul Hertz magnetic poate fi introdus direct ținând cont de relațiile teoremei de dualitate (A III.1) aşa cum s-a sugerat în cazul câmpurilor cu variație armonică arbitrară în timp, prin utilizarea transformărilor de tip (1.1.53) şi (1.1.54).

*Observație***.** Dacă se consideră medii cu surse $\vec{J}_s$, $\vec{J}_{ms}$, ecuațiile de propagare pentru vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ capătă forme generale; aplicând operatorul *rotor* ecuațiilor (1.2.19), (1.2.20) se obțin ecuațiile de undă vectoriale [8]

$$\nabla \times \left\{ \frac{\nabla \times \vec{E}}{\mu_r} \right\} - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E} = -jk_0 Z_0 \vec{J}_s - \nabla \times \left\{ \frac{\vec{J}_{ms}}{\mu_r} \right\} \tag{1.2.70}$$

$$\nabla \times \left\{ \frac{\nabla \times \vec{H}}{\varepsilon_r} \right\} - k_0^2 \mu_r \vec{H} = -jk_0 \vec{J}_{ms} / Z_0 + \nabla \times \left\{ \frac{\vec{J}_s}{\varepsilon_r} \right\} \tag{1.2.71}$$

unde $k_0 = \omega(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$, $Z_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$. Utilizând identitatea vectorială (A I,(I.18)), ecuația (1.2.70) se aduce la forma

$$\left( \frac{1}{\mu_r} \right) \nabla \times \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \varepsilon_r \vec{E} + \left[ \nabla \left( \frac{1}{\mu_r} \right) \times \nabla \times \vec{E} \right] = -jk_0 Z_0 \vec{J}_s - \nabla \times \left\{ \frac{\vec{J}_{ms}}{\mu_r} \right\} \tag{1.2.72}$$

iar prin utilizarea identității vectoriale (A I, (I.25)) ultima relație devine

$$-\nabla(\nabla \cdot \vec{E}) + \nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \varepsilon_r \mu_r \vec{E} = jk_0 Z_0 \mu_r \vec{J}_s + \nabla \times \vec{J}_{ms} \tag{1.2.73}$$

care este uşor interpretabilă; într-adevăr, dacă se consideră mediul fără surse ultima relație se simplifică, căpătând forma uzuală a ecuației Helmholtz pentru câmpul electric

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \tag{1.2.74}$$

O ecuație similară se obține pentru componenta $\vec{H}$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0 \tag{1.2.75}$$

## 1.3. PARAMETRII MEDIULUI. CONDIȚII LA LIMITĂ

### 1.3.1. Parametrii constitutivi ai mediului

Scopul acestei secțiuni constă în definirea condițiilor la limită naturale; pentru aceasta este necesară prezentarea câtorva noțiuni referitoare la parametrii constitutivi ai mediului; o discuție detaliată asupra acestor parametri este dată în capitolul 8.

Rezolvarea ecuațiilor de propagare ale câmpului electromagnetic într-un mediu dat poate fi efectuată corect numai dacă se cunoaşte legătura între $\vec{D}$ şi $\vec{E}$, respectiv între $\vec{B}$ şi $\vec{H}$. În spațiul liber avem

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \tag{1.3.1}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{1.3.2}$$

Mediile reale, caracterizate prin parametrii $\varepsilon, \mu, \sigma$ pot fi împărțite în mai multe categorii, în funcție de natura acestor parametri. În continuare ne referim separat la medii dielectrice şi la medii magnetice.

**1°. Medii dielectrice** (se admite $\mu = \mu_0$).

*(a). Medii liniare, isotrope, omogene, nedispersive şi fără pierderi.* Mediul se numeşte fără pierderi dacă $\sigma = 0$ (nu există sarcini libere) iar $\varepsilon$ şi $\mu$ sunt constante reale pozitive; dacă $\varepsilon$ şi $\mu$ nu depind de direcțiile pe care sunt aplicate câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, mediul este numit isotrop; dacă $\varepsilon$ şi $\mu$ nu depind de coordonatele spațiale, mediul este considerat omogen; dacă $\varepsilon$ şi $\mu$ nu depind de amplitudinile câmpurilor $\vec{E}$, $\vec{H}$ şi $\vec{J}$ mediul este considerat liniar; dacă $\varepsilon$ şi $\mu$ nu depind de frecvența câmpului electro-magnetic mediul este numit nedispersiv. Numai în astfel de medii şi la frecvențe suficient de joase pentru a putea neglija efectele inerțiale şi forțele de atenuare (frecări interne) se poate scrie o relație simplă între $\vec{\mathscr{D}}(\vec{r},t)$ şi $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$, în domeniul timp de tipul (1.1.12)

$$\vec{\mathscr{D}}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) + \vec{\mathscr{P}}(\vec{r},t) = \varepsilon \vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) \tag{1.3.3}$$

unde $\vec{\mathscr{P}}(\vec{r},t)$ este vectorul densitate de polarizare electrică. Acest vector acționează ca o sursă secundară şi este rezultatul deplasării dipolilor (permanenți sau induşi) sub influența câmpului $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$; în plus, la relațiile scrise în domeniul timp este foarte dificil de a se pune în evidență eventualele defazaje care apar între vectorii $\vec{\mathscr{D}}(\vec{r},t)$ şi $\vec{\mathscr{P}}(\vec{r},t)$ şi câmpul aplicat $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$.

În domeniul frecvență, unde se lucrează cu fazori vectoriali, expresia vectorului densitate de flux electric devine (1.2.15)

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r}) \tag{1.3.4}$$

iar vectorul polarizare electrică are expresia

$$\vec{P}(\vec{r}) = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}) \tag{1.3.5}$$

Dacă mediul este considerat strict fără pierderi atunci susceptibilitatea electrică $\chi_e$ este o constantă scalară iar vectorul densitate de flux electric va avea expresia

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}) \tag{1.3.6}$$

unde permitivitatea electrică $\varepsilon$ este, de asemenea, o constantă scalară.

*(b). Medii cu pierderi dielectrice şi medii conductive.* În general mediile dielectrice reale manifestă pierderi dielectrice, chiar dacă în unele domenii de frecvențe aceste pierderi pot fi foarte mici; în astfel de cazuri susceptibilitatea electrică $\chi_e(\omega)$ este o funcție scalară complexă, de regulă dependentă de frecvență; expresia şi valoarea ei depind de mecanismul fizic al proceselor de polarizare şi de frecvența câmpului aplicat. Vectorul densitate de flux electric capătă expresia generală

$$\vec{D}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \underline{\chi}_e(\omega)\right] \vec{E}(\vec{r},\omega) = \underline{\varepsilon}(\omega) \vec{E}(\vec{r},\omega) \tag{1.3.7}$$

Permitivitatea $\underline{\varepsilon}$ este o mărime complexă

$$\underline{\varepsilon} = \varepsilon_0 \left[1 + \underline{\chi}_e(\omega)\right] = \varepsilon' - j\varepsilon'' \tag{1.3.8}$$

Partea imaginară exprimă pierderile dielectrice ale mediului; conform legii conservării energiei electromagnetice (secțiunea 1.4), partea imaginară ($j\varepsilon''$) trebuie să fie negativă, prin urmare $\varepsilon''$ este o mărime pozitivă; la frecvențe foarte înalte defazajele care pot apărea între vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ şi câmpul aplicat, sunt luate în considerare prin caracterul complex al permitivității $\underline{\varepsilon}$.

Mediile, care pe lângă sarcinile legate (dipoli), conțin şi un număr de sarcini libere deci manifestă şi o anumită conductivitate electrică $\sigma$ finită, se numesc „conductive"; evident, în astfel de medii vor fi luate în considerare atât proprietățile dielectrice cât şi cele conductive. Se poate arăta însă că influența conductivității $\sigma$ poate fi inclusă într-o permitivitate echivalentă (efectivă). Într-adevăr, dacă considerăm mediul fără surse ($\vec{J}_s = 0,\ \rho_s = 0$), în ecuația Maxwell (1.2.10) rămâne numai curentul $\vec{J}_c$ datorat deplasării sarcinilor libere sub influența câmpului $\vec{E}$

$$\vec{J}_c(\vec{r}) = \sigma\vec{E}(\vec{r}) \tag{1.3.9}$$

astfel se poate scrie

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) = j\omega\vec{D}(\vec{r}) + \vec{J}_c(\vec{r}) = j\omega\underline{\varepsilon}\vec{E}(\vec{r}) + \sigma\vec{E}(\vec{r}) = j\omega(\underline{\varepsilon} - j\sigma/\omega)\vec{E}(\vec{r}) \tag{1.3.10}$$

Permitivitatea echivalentă are expresia

$$\underline{\varepsilon}_{ec} = \underline{\varepsilon} - j\,\sigma/\omega = \varepsilon' - j\varepsilon'' - j\,\sigma/\omega \tag{1.3.11}$$

din care se pot face două constatări: prima, $\underline{\varepsilon}_{ec}$ este totdeauna o mărime complexă, chiar dacă pierderile dielectrice convenționale $\varepsilon''$ sunt neglijabil de mici; a doua, mediul care prezintă o anumită conductivitate $\sigma$ este totdeauna dispersiv în sensul că $\underline{\sigma}_{ec}(\omega)$ este o funcție explicită de frecvență. Adesea se utilizează o expresie modificată a permitivității echivalente

$$\underline{\varepsilon}_{ec} = \varepsilon'(1 - tan\,\delta_E) \tag{1.3.12}$$

unde $tan\,\delta_E$ este numită tangenta de pierderi a mediului, iar $\delta_E = (1/\varepsilon')(\varepsilon'' + \sigma/\omega)$; dacă $\sigma = 0$ (medii dielectrice fără sarcini mobile), rezultă expresia clasică $\delta_E = \varepsilon''/\varepsilon'$. Notația (1.3.12) este uzuală pentru materialele utilizate în domeniul microundelor, pentru care $\varepsilon'$ şi $tan\,\delta_E$ sunt date sub formă de tabele. În scopul simplificării scrierii, în viitor $\underline{\varepsilon}_{ec}$ va fi scris $\underline{\varepsilon}$, astfel (1.3.12) poate fi scrisă sub forma răspândită

$$\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon'_r(1 - tan\,\delta_E) \tag{1.3.13}$$

unde $\underline{\varepsilon}_r = \underline{\varepsilon}/\varepsilon_0$, $\varepsilon'_r = \varepsilon'/\varepsilon_0$, $\varepsilon''_r = \varepsilon''/\varepsilon_0$.

Dacă se presupun medii cu conductivitate finită, atunci sub influența câmpului $\vec{E}$ pot apărea densități de sarcini libere $\rho$; însă la valori apreciabile ale conductivității se poate considera că densitatea de sarcini libere este zero, deoarece densitatea de sarcină $\rho_0$ creată inițial tinde la zero într-un interval de timp foarte scurt. Admitem că densitatea de sarcină inițială $\rho_0$ implică existența câmpului electric $\vec{E}_0$, prin urmare şi a densității de curent $\vec{J}_0$. Se pot scrie relațiile

$$\nabla\cdot\vec{J}_0 = -\partial\rho/\partial t \ \text{ şi } \ \nabla\cdot\varepsilon\vec{E}_0 = \rho; \tag{1.3.14}$$

presupunând că $\varepsilon$ şi $\sigma$ sunt constante, prin eliminarea mărimilor $\vec{E}_0$ şi $\vec{J}_0$ rezultă

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho \tag{1.3.15}$$

şi după integrare avem

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_0 e^{-(\sigma/\varepsilon)t} \tag{1.3.16}$$

La metalele uzuale avem $\tau_m = \varepsilon/\sigma \approx 10^{-18}\,s$, astfel pentru frecvențe ce pot merge până la benzile superioare de microunde, timpul de descreştere al unei sarcini inițiale $\rho_0$ este foarte mic în comparație cu perioada de variație a mărimilor-sursă $\vec{J}_s$ şi $\rho_s$.

Ținând cont de existența vectorului de polarizare electrică $\vec{P}$, divergența densității de flux electric devine

$$\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho \tag{1.3.17}$$

termenul adițional $\nabla \cdot \vec{P}$ poate fi interpretat ca o densitate de sarcină de polarizare electrică.

*(c). Medii anisotrope.* Vom restrânge discuția la medii liniare, omogene şi neconductive; particularitatea care intervine constă în faptul că proprietățile dielectrice variază cu direcția câmpului aplicat. În general vectorii $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ nu au aceeaşi direcție cu $\vec{E}$; mai mult, valorile şi direcțiile vectorilor $\vec{D}$ şi $\vec{P}$ depind de direcția câmpului $\vec{E}$. La astfel de materiale permitivitatea electrică se reprezintă printr-un *tensor de ordin 2*. Într-un sistem de coordonate cartesiene, dependența dintre mărimile $\vec{D}$ şi $\vec{E}$ poate fi scrisă sub formă matriceală

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \left[\underline{\varepsilon}\right] \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{1.3.18}$$

unde

$$\left[\underline{\varepsilon}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.3.19}$$

Se observă că o anumită componentă a câmpului $\vec{E}$ generează trei componente ale vectorului densitate de flux electric $\vec{D}$. Adesea relația (1.3.18) se scrie condensat

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}, \tag{1.3.20}$$

unde $\bar{\bar{\varepsilon}}$ reprezintă tensorul permitivitate electrică. Anisotropia electrică a materialelor poate fi „intrinsecă" (datorată structurii cristaline) şi indusă printr-un proces fizic special.

2°. **Medii magnetice** (se admite $\varepsilon = \varepsilon_0$).

Se va urma aceeaşi ordine de expunere ca la materialele dielectrice, făcându-se apel şi la similitudinea unor relații.

*(a). Medii liniare, isotrope, omogene şi fără pierderi.*

În domeniul timp, relația dintre câmpurile fizice $\vec{\mathcal{B}}$, $\vec{\mathcal{M}}$ şi $\vec{\mathcal{H}}$ este de tipul (1.1.14)

$$\vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) = \mu_0 \left[\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) + \vec{\mathcal{M}}(\vec{r},t)\right] = \mu \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) \tag{1.3.21}$$

În domeniul frecvență se lucrează cu fazori vectoriali

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \left[\vec{H}(\vec{r}) + \vec{M}(\vec{r})\right] = \mu \vec{H}(\vec{r}) \tag{1.3.22}$$

în care vectorul densitate de polarizare magnetică se defineşte prin relația

$$\vec{M}(\vec{r}) = \chi_m \vec{H}(\vec{r}) \tag{1.3.23}$$

Dacă mediul este fără pierderi magnetice susceptibilitate magnetică $\chi_m$ este o constantă scalară, astfel permeabilitatea magnetică $\mu = \mu_0 \left(1 + \underline{\chi}_m\right)$ va fi o constantă scalară.

*(b). Medii cu pierderi magnetice.* Astfel de medii sunt materialele feritice, la care permeabilitatea magnetică este o mărime complexă şi dependentă de frecvență

$$\underline{\mu} = \mu_0 \left[1 + \underline{\chi}_m(\omega)\right] = \mu' - j\mu'' \tag{1.3.24}$$

unde $\mu''$ exprimă pierderile magnetice ale mediului. Relația (1.3.22) se generalizează sub forma

$$\vec{B}(\vec{r},\omega) = \mu_0 \left[ I + \underline{\chi}_m(\omega) \right] \vec{H}(\vec{r},\omega) = \underline{\mu}(\omega)\vec{H}(\vec{r},\omega) \tag{1.3.25}$$

*(c). Medii anisotrope.* În cazul materialelor cu anisotropie magnetică relațiile dintre vectorii $\vec{B}, \vec{M}$ şi $\vec{H}$ sunt mult mai complicate; relația dintre $\vec{B}$ şi $\vec{H}$ depinde de direcția lui $\vec{H}$, şi în general direcția lui $\vec{B}$ diferă de direcția lui $\vec{H}$. Permeabilitatea magnetică se reprezintă printr-un *tensor de ordin 2*; într-un sistem de coordonate carteziene dependența dintre $\vec{B}$ şi $\vec{H}$ poate fi scrisă sub formă matriceală

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \left[ \underline{\mu} \right] \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{1.3.26}$$

$$\left[ \underline{\mu} \right] = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.3.27}$$

Se observă că o anumită componentă a câmpului magnetic poate duce la apariția a trei componente a vectorului densitate de flux magnetic $\vec{B}$. Adesea relația (1.3.26) se scrie condensat

$$\vec{B} = \overline{\overline{\mu}} \cdot \vec{H} \tag{1.3.28}$$

unde $\overline{\overline{\mu}}$ reprezintă tensorul permeabilitate magnetică. Anisotropia materialelor poate fi intrinsecă (cristalină) sau indusă prin aplicarea unui câmp magnetic continuu pe o direcție dată.

### 1.3.2. Condiții la limită (naturale)

La rezolvarea ecuațiilor Maxwell diferențiale, precum şi a ecuațiilor de propagare, s-a presupus că mărimile care definesc câmpul electromagnetic sunt funcții univoce, finite şi continue; de asemenea, aceste funcții trebuie să aibă şi derivate continue în mediile considerate. La interfața dintre două medii diferite pot avea loc discontinuități ale parametrilor constitutivi ($\varepsilon,\ \mu,\ \sigma$) sau pot fi prezente surse, curenți sau sarcini. Găsirea unor soluții complete şi unice pentru ecuațiile Maxwel impune cunoaşterea *condițiilor la limită*; întrucât în punctele de discontinuitate derivatele mărimilor de câmp nu au sens fizic, pentru definirea condițiilor la limită se utilizează forma integrală a ecuațiilor Maxwell.

1°. **Componente normale.**

Ne referim la configurația arătată în Fig. 1.2; considerăm că mediile 1 şi 2, separate printr-o suprafață $S_{sep}$, sunt caracterizate prin parametrii constitutivi ($\varepsilon_1,\mu_1,\sigma_1$), respectiv ($\varepsilon_2,\mu_2,\sigma_2$) şi au valori finite ale conductivităților $\sigma_1$ şi $\sigma_2$. Delimităm un cilindru elementar având înălțimea $h$ şi aria transversală $\Delta S$, şi pentru început presupunem că pe suprafața de separație nu există surse de curent sau sarcini electrice ($\vec{J}_s = 0,\ \rho_s = 0$). Ne referim întâi la vectorul densitate de flux electric $\vec{D}$ şi aplicăm ecuația Maxwell integrală (1.2.25), care reprezintă legea Gauss pentru vectorul densitate de flux electric. Admitem că înălțimea $h$ a cilindrului este foarte mică astfel divergența prin aria laterală $\Sigma$ este zero şi vectorul $\vec{D}$ rămâne constant pe întreaga lungime $h$; prin urmare fluxul componentei normale a vectorului $\vec{D}$ din mediul 1 care intră în aria $\Delta S$ este egal cu fluxul componentei normale care iese din $\Delta S$, înspre mediul 2

$$\int_{\Sigma+\Delta S} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{\Delta S} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \left(\vec{D}_1\cdot\hat{n}_1 + \vec{D}_2\cdot\hat{n}_2\right)\Delta S = \left(D_{2n} - D_{1n}\right)\Delta S = 0 \tag{1.3.29}$$

unde $D_{1n} = \vec{D}_1\cdot\hat{n}_1,\ D_{2n} = \vec{D}_2\cdot\hat{n}_2$; ultima relație se poate generaliza ($\hat{n} = \hat{n}_2 = -\hat{n}_1$)

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot \hat{n} = 0; \quad \vec{D}_2 \cdot \hat{n} = \vec{D}_1 \cdot \hat{n} \tag{1.3.30}$$

deci componentele normale ale vectorului densitate de flux electric sunt continue.

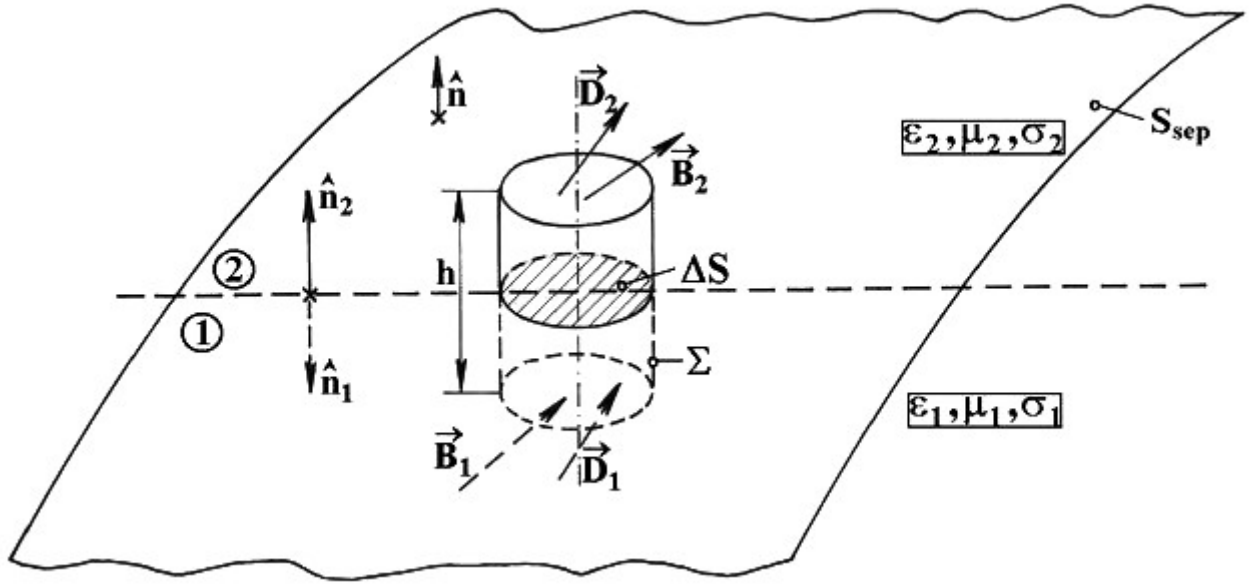



**Fig. 1.2. Condiții la limită pentru componentele normale ale vectorilor $\vec{D}$ şi $\vec{B}$**

Pentru a ilustra comportarea vectorului densitate de flux magnetic $\vec{B}$ la interfața dintre cele două medii utilizăm ecuația Maxwell integrală (1.2.25) (legea lui Gauss pentru vectorul densitate de flux magnetic); se obține

$$\int_{\Sigma+\Delta S} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{\Delta S} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \left(\vec{B}_1\cdot\hat{n}_1 + \vec{B}_2\cdot\hat{n}_2\right)\Delta S = 0 \tag{1.3.31}$$

care se scrie generalizat

$$\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\cdot\hat{n} = 0;\ \vec{B}_2\cdot\hat{n} = \vec{B}_1\cdot\hat{n} \tag{1.3.32}$$

Din relațiile (1.3.30) şi (1.3.32) rezultă că fluxul componentelor normale $\vec{D}$ şi $\vec{B}$ sunt continue la suprafața de separație. Considerăm două situații particulare:

a) Dacă cele două medii diferă numai prin permitivitatea electrică ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$) (adică fenomenul predominant este polarizarea electrică), în cazul mediilor liniare, isotrope şi omogene se poate scrie

$$D_{2n} = D_{1n},\ E_{2n} = \left(\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)E_{1n} \tag{1.3.33}$$

prin urmare, la suprafața dintre două medii care diferă prin permitivitate electrică , componentele normale ale câmpului electric sunt discontinue.

b) În mod similar, dacă cele două medii diferă numai prin permeabilitatea magnetică ($\mu_1 \neq \mu_2$, adică fenomenul predominant este polarizarea magnetică) din (1.3.32) rezultă

$$H_{2n} = \left(\mu_1/\mu_2\right)H_{1n} \tag{1.3.34}$$

prin urmare, componentele normale ale câmpului magnetic sunt discontinue la suprafața de separație.

2°. **Componente tangențiale.**

Ne referim la configurația din Fig. 1.3a; mediile 1 şi 2 sunt caracterizate prin parametrii constitutivi ($\varepsilon_1,\mu_1,\sigma_1$), respectiv ($\varepsilon_2,\mu_2,\sigma_2$) şi sunt separate prin suprafața $S_{sep}$, pe care nu există surse ($\vec{J}_s = 0,\ \rho_s = 0$); la deducerea unor relații generale se admite că conductivitățile $\sigma_1$ şi $\sigma_2$ au

valori finite. Într-un anumit punct pe suprafața de separație delimităm un contur dreptunghiular cu lungimea $\Delta l$ şi înălțimea $h$, foarte mică; perimetrul conturului este $C_0 = 2(\Delta l + h)$ cu $\Delta l >> h$, iar

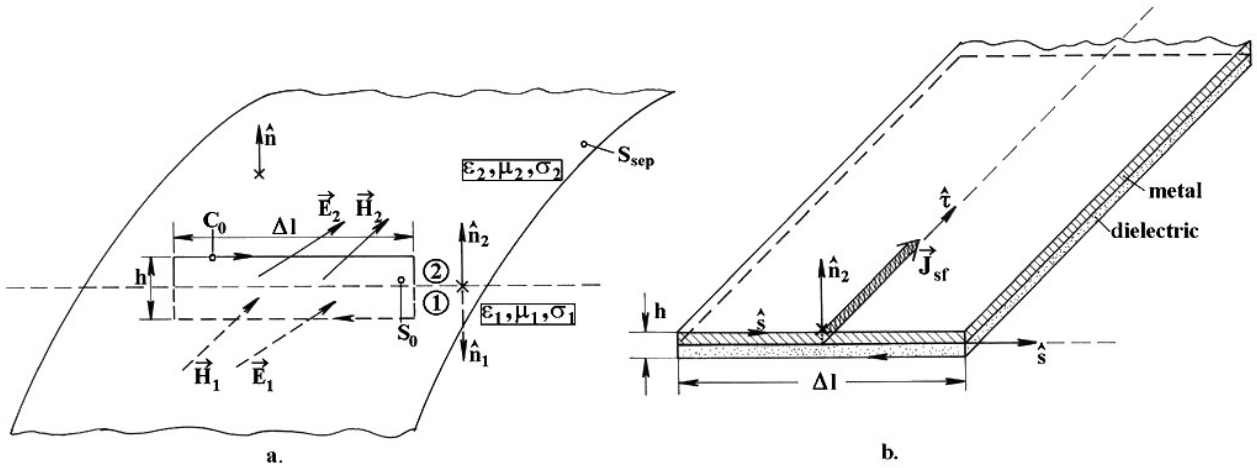



**Fig. 1.3. Condiții la limită pentru componentele tangențiale ale vectorilor $\vec{D}$ şi $\vec{B}$ :**
**a - vedere de ansamblu; b- definirea curentului de suprafață $\vec{J}_{sf}$**

aria sa este $S_0 = \Delta l h$. Considerăm întâi vectorul câmp electric; pentru studiul componentelor tangențiale este convenabilă utilizarea ecuației Maxwell integrale de evoluție (1.2.23)

$$\oint_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j\omega \int_{S_0} \vec{B} \cdot d\vec{s} \tag{1.3.35}$$

Ca urmare a ariei foarte mici, se admite că în interiorul lui $S_0$ câmpul electric este uniform; de asemenea, în cazul limită $h \to 0$ termenul drept din relația (1.3.35) devine zero, astfel se poate scrie

$$(E_{2t} - E_{1t})\Delta l = 0; \;\; E_{2t} = E_{1t} \tag{1.3.36}$$

prin urmare, la interfața celor două medii componentele tangențiale ale câmpului electric sunt continue. Dacă mediile diferă numai prin permitivitate electrică ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$), rezultă $D_{2t} = (\varepsilon_2 / \varepsilon_1) D_{1t}$, adică componentele tangențiale ale vectorului densitate de flux electric suferă discontinuități. Relația (1.3.36) poate fi generalizată sub formă vectorială

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0; \quad \hat{n} \times \vec{E}_2 = \hat{n} \times \vec{E}_1 \tag{1.3.37}$$

Considerăm acum vectorul câmp magnetic $\vec{H}$; comportarea componentei tangențiale poate fi studiată prin utilizarea ecuației Maxwell integrale (1.2.24), în care se presupune absența oricăror curenți sau sarcini; se poate scrie

$$\oint_{C_0} \vec{H} \cdot d\vec{l} = j\omega \int_{S_0} \vec{D} \cdot d\vec{s} \tag{1.3.38}$$

Se admite că în interiorul ariei $S_0$ câmpul magnetic este uniform iar în cazul limită $h \to 0$ membrul drept devine zero; astfel avem

$$(H_{2t} - H_{1t})\Delta l = 0; \quad H_{2t} = H_{1t} \tag{1.3.39}$$

adică la suprafața de separație a celor două medii componentele tangențiale ale câmpului magnetic sunt continue; expresia (1.3.39) poate fi generalizată sub formă vectorială

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0; \quad \hat{n} \times \vec{H}_2 = \hat{n} \times \vec{H}_1 \tag{1.3.40}$$

Dacă mediile diferă numai prin permeabilitatea magnetică ($\mu_2 \neq \mu_1$), rezultă $B_{2t} = (\mu_2/\mu_1)B_{1t}$, prin urmare componentele tangențiale ale vectorului densitate de flux magnetic suferă discontinuități.

3°. **Cazuri particulare**

Dacă la interfața celor două medii sunt prezente surse $\vec{J}_s$, $\vec{J}_{ms}$, $\rho_s$, $\rho_{ms}$, atunci ecuațiile Maxwell diferențiale sunt (1.2.19), (1.2.20), (1.2.22) iar forma integrală a acestor ecuații este

$$\oint_{C_0} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \left(\vec{J}_{ms} + j\omega\mu\vec{H}\right) \cdot d\vec{s} \tag{1.3.41}$$

$$\oint_{C_0} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_s + j\omega\mu\vec{E}\right) \cdot d\vec{s} \tag{1.3.42}$$

$$\oint_{S_0} \mu\vec{H} \cdot d\vec{s} = -\int_V \left(\frac{\nabla \cdot \vec{J}_{ms}}{j\omega}\right) dV = \int_V \rho_{ms}\, dV \tag{1.3.43}$$

$$\oint_{S_0} \varepsilon\vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_V \left(\frac{\nabla \cdot \vec{J}_s}{j\omega}\right) dV = \int_V \rho_s\, dV \tag{1.3.44}$$

Întrucât ne referim la procesele de la suprafața de separare, este convenabilă introducerea unor „surse de suprafață” $\vec{J}_{ss}$, $\vec{J}_{mss}$, $\rho_{ss}$, $\rho_{mss}$; utilizând notațiile

$$\vec{J}_{ss} = \lim_{h\to 0} \left(\vec{J}_s h\right), \quad \vec{J}_{mss} = \lim_{h\to 0} \left(\vec{J}_{ms} h\right) \tag{1.3.45}$$

se observă că $\vec{J}_{ss}$ şi $\vec{J}_{mss}$ au dimensiunile $[A/m]$, respectiv $[V/m]$ ($\vec{J}_s$ are dimensiunea $[A/m^2]$ iar $\vec{J}_{ms}$ are dimensiunea $[V/m^2]$); de asemenea $\rho_{ss}$ şi $\rho_{mss}$ au dimensiunile $[C/m^2]$, respectiv $[Wb/m^2]$.

a) Se admite prezența sarcinilor de suprafață $\rho_{ss}$ şi $\rho_{mss}$; prin efectuarea integralelor (1.3.43), (1.3.44) se poate scrie

$$\left(\varepsilon_2\vec{E}_2 - \varepsilon_1\vec{E}_1\right) \cdot \hat{n}_2 = \rho_{ss} \tag{1.3.46}$$

$$\left(\mu_2\vec{H}_2 - \mu_1\vec{H}_1\right) \cdot \hat{n}_2 = \rho_{mss} \tag{1.3.47}$$

unde $\rho_{mss}$ este o densitate de suprafață a sarcinii magnetice (mărime fictivă).

b) Se presupune prezența surselor de curent $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$; efectuând integralele (1.3.41), (1.3.42) se poate scrie

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \cdot \hat{s} = -\left[\vec{J}_{ms} \cdot \left(\hat{n}_2 \times \hat{s}_2\right)\right] h \tag{1.3.48}$$

$$\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) \cdot \hat{s} = \left[\vec{J}_s \cdot \left(\hat{n}_2 \times \hat{s}_2\right)\right] h \tag{1.3.49}$$

unde $\hat{s}$ este versorul asociat suprafeței de separație. Ținând cont de notațiile (1.3.45) ultimele două relații se scriu compact

$$\hat{n}_2 \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = -\vec{J}_{mss} \tag{1.3.50}$$

$$\hat{n}_2 \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_{ss} = \vec{J}_{sf} \tag{1.3.51}$$

Rezumându-ne la cazurile practice unde $\vec{J}_{ms} = 0$, $\rho_{ms} = 0$ condițiile la limită pot fi sintetizate

$$\left(\varepsilon_2\vec{E}_2-\varepsilon_1\vec{E}_1\right)\cdot\hat{n}_2=\rho_{ss} \tag{1.3.52}$$

$$\left(\mu_2\vec{H}_2-\mu_1\vec{H}_1\right)\cdot\hat{n}_2=0 \tag{1.3.53}$$

$$\hat{n}_2\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)=0 \tag{1.3.54}$$

$$\hat{n}_2\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{J}_{ss}=\vec{J}_{sf} \tag{1.3.55}$$

Mărimea $\vec{J}_{sf}=\vec{J}_{ss}$ reprezintă o densitate de curent de suprafață $[A/m]$ şi are sensul versorului $\hat{\tau}$ (Fig. 1.3b) determinat de sistemul de versori ($\hat{n}_2,\hat{s},\hat{\tau}$).

c) *Perete electric.* Dacă mediul 2 este un conductor perfect ($\sigma_2\to\infty$) componentele de câmp sunt egale cu zero în interiorul conductorului; considerând că versorul $\hat{n}$ este îndreptat de la metal spre dielectric ($\hat{n}=\hat{n}_1=-\hat{n}_2$), condițiile la limită (1.3.52) – (1.3.55) se simplifică

$$\begin{aligned}&\hat{n}\cdot\vec{D}_1=\rho_s\\&\hat{n}\cdot\vec{B}_1=0\\&\hat{n}\times\vec{E}_1=0\\&\hat{n}\times\vec{H}_1=\vec{J}_{sf}\end{aligned} \tag{1.3.56}$$

Condițiile (1.3.56) definesc un *perete electric* a cărui particularitate importantă constă în faptul că componenta tangențială a câmpului electric este zero.

d) *Perete magnetic.* Un concept dual față de *peretele electric* este cel de *perete magnetic*, pentru care componentele tangențiale ale câmpului magnetic devin egale cu zero. O astfel de condiție la limită nu există în realitate, la suprafața de separație a două medii dielectrice; ea poate fi aproximată de către suprafața laterală a unui cilindru dielectric de permitivitate ridicată, sau în anumite probleme privind structurile microstrip; de asemenea conceptul de perete magnetic asigură o anumită simetrie în formularea condițiilor la limită generale. Considerăm că cele două medii sunt pur dielectrice ($\sigma_1=\sigma_2=0$); dacă versorul $\hat{n}$ iese din peretele magnetic spre exterior, condițiile de perete magnetic sunt

$$\begin{aligned}&\hat{n}\cdot\vec{D}_1=0\\&\hat{n}\cdot\vec{B}_1=0\\&\hat{n}\times\vec{E}_1=-\vec{J}_{mss}=\vec{J}_{msf}\\&\hat{n}\times\vec{H}_1=0\end{aligned} \tag{1.3.57}$$

unde $\vec{J}_{mss}$ este definit în (1.3.45).

În încheierea secțiunii putem face câteva considerente generale cu privire la condițiile la limită; ca urmare a teoremei de unicitate, există numai o singură soluție corectă pentru câmpul electromagnetic care satisface concomitent atât ecuațiile Maxwell cât şi condițiile la limită; este important, prin urmare, să fie determinate condițiile la limită necesare şi suficiente pentru a găsi o soluție unică într-o problemă concretă. Se poate observa de exemplu, că condițiile (1.3.30) şi (1.3.32) nu sunt independente de condițiile (1.3.37) şi (1.3.40); acest fapt decurge din faptul că, aşa cum s-a arătat în secțiunea 1.2, şi ecuațiile Maxwell nu sunt toate independente. Cele mai des utilizate condiții la limită în domeniul microundelor sunt cele referitoare la continuitatea componentelor tangențiale ale câmpurilor $\vec{E}$ (1.3.37) şi $\vec{H}$ (1.3.40).

# 1.4. TEOREMA CONSERVĂRII ENERGIEI ELECTROMAGNETICE. VECTOR POYNTING

## 1.4.1. Teorema conservării energiei electromagnetice pentru câmpuri fizice.

Considerăm pentru început *câmpuri fizice*, adică valorile instantanee ale câmpurilor şi curenților, aşa cum au fost definite în secțiunea 1.1; deşi această formă a legii conservării energiei electromagnetice este mai puțin utilizată în domeniul microundelor, ea este deosebit de utilă pentru înțelegerea proceselor fizice şi explicitarea tuturor termenilor cuprinşi în teoremă. În general, se admite că vectorii $\vec{\mathscr{E}}$ şi $\vec{\mathscr{H}}$ care acționează într-un volum dat sunt rezultatul propagării undelor electromagnetice, care la rândul lor sunt generate într-un alt punct al spațiului; în general curenții $\vec{\mathscr{J}}$ şi sarcinile $\rho$ pot juca rolul fie de surse, fie de mărimi induse.

Ne referim la volumul *V* mărginit de suprafața *S* (Fig.1.4a). Pentru simplificarea unor calcule, la deducerea legii conservării energiei electromagnetice (cunoscută sub numele de *teorema Poynting*), considerăm că în volumul *V* nu există curenții-sursă sau sarcini-sursă; sunt prezente

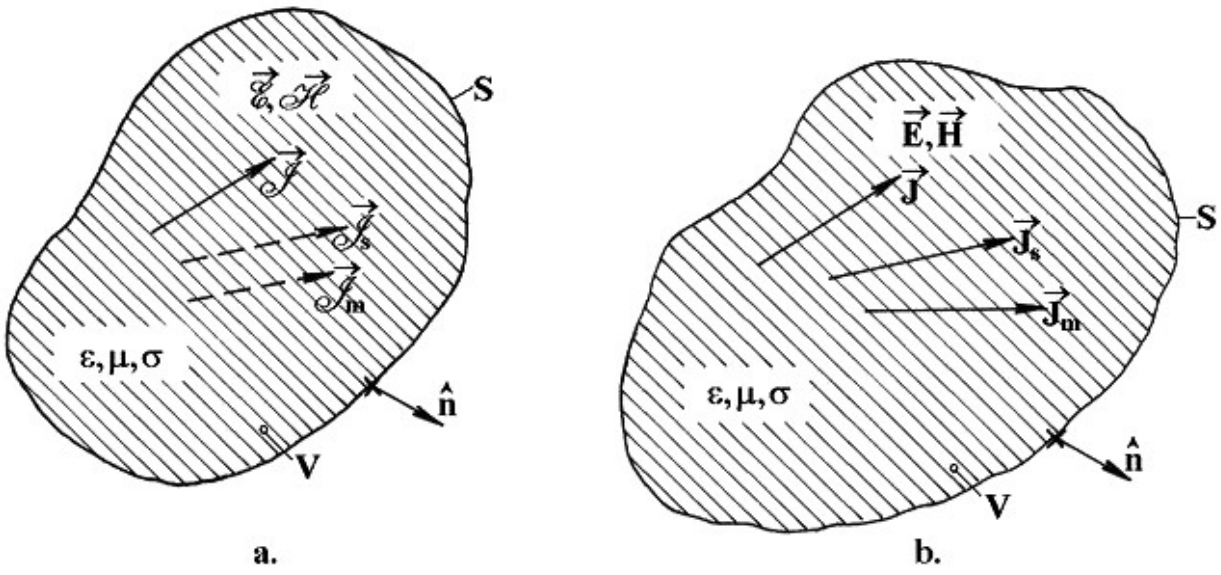



**Fig. 1.4. Ilustrarea teoremei Poynting: a – câmpuri fizice; b - câmpuri armonice**

numai un număr de sarcini electrice libere, astfel singura componentă de curent este $\vec{\mathscr{J}} = \vec{\mathscr{J}}_c = \sigma\vec{\mathscr{E}}$ . Forța care acționează asupra unei sarcini elementare este dată de legea Lorentz

$$\vec{F} = q\left[\vec{E} + \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right] \tag{1.4.1}$$

Rata de lucru mecanic comunicată sarcinii *q* este

$$\vec{\mathscr{F}} \cdot \vec{v} = q\vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{v} \; ; \qquad \left[\vec{v} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{\mathscr{B}}\right)\right] = 0 \tag{1.4.2}$$

Dacă în volumul elementar considerat se află *N* sarcini atunci membrul drept al ultimei relații devine

$$Nq\vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{v} = \vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{\mathscr{J}} \tag{1.4.3}$$

iar pe un volum finit avem

$$\left[\vec{F} \cdot \vec{v}\right]_V = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \; dV \tag{1.4.4}$$

Membrul drept al ultimei relații exprimă rata cu care energia electromagnetică este convertită în energie mecanică sau termică; conform principiului conservării energiei, această energie disipată într-un volum considerat este acompaniată de o descreştere a energiei electromagnetice cu aceeaşi rată.

Trebuie subliniat că există mai multe căi de deducere a unei expresii complete a teoremei Poynting [1], [2], [4]; în această secțiune pornim de la ecuația Maxwell de evoluție (1.1.2) şi facem produsul scalar cu $\vec{\mathscr{E}}$ ; rearanjând termenii rezultă

$$\vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{\mathscr{J}} = \vec{\mathscr{E}} \cdot \left(\nabla \times \vec{\mathscr{H}}\right) - \vec{\mathscr{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} \tag{1.4.5}$$

Primul termen din dreapta are expresia (A I, (I.20))

$$\vec{\mathscr{E}} \cdot \left(\nabla \times \vec{\mathscr{H}}\right) = \vec{\mathscr{H}} \cdot \left(\nabla \times \vec{\mathscr{E}}\right) - \nabla \cdot \left(\vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{H}}\right) \tag{1.4.6}$$

şi ținând cont de ecuația Maxwell (1.1.1), expresia (1.4.5) ia forma

$$-\vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{\mathscr{J}} = \nabla \cdot \left(\vec{\mathscr{E}} \times \vec{\mathscr{H}}\right) + \vec{\mathscr{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} + \vec{\mathscr{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathscr{B}}}{\partial t} \tag{1.4.7}$$

Expresia (1.4.7) reprezintă *teorema conservării energiei electromagnetice (teorema Poynting) pentru câmpuri fizice sub formă diferențială*; vectorul

$$\vec{\mathscr{S}}(\vec{r},t) = \vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) \times \vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) \tag{1.4.8}$$

este numit *vectorul Poynting* instantaneu şi reprezintă fluxul de energie instantanee ce străbate unitatea de arie în unitatea de timp (dimensiunea: *energie/ arie×timp = watt/m*$^2$).

În scopul explicitării ultimilor doi termeni din membrul drept al teoremei Poynting (1.4.7) presupunem un mediu liniar, isotrop, omogen şi fără pierderi dielectrice sau magnetice, pentru care se poate scrie

$$\vec{\mathscr{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathscr{D}}}{\partial t} = \varepsilon \vec{\mathscr{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathscr{E}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon \mathscr{E}^2\right) = \frac{\partial w_e}{\partial t} \tag{1.4.9}$$

$$\vec{\mathscr{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathscr{B}}}{\partial t} = \mu \vec{\mathscr{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathscr{H}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu \mathscr{H}^2\right) = \frac{\partial w_h}{\partial t} \tag{1.4.10}$$

unde $w_e$ şi $w_h$ reprezintă energia înmagazinată în câmpul electric, respectiv câmpul magnetic din unitatea de volum ($w_e$ şi $w_h$ sunt densități de energie); prin urmare densitatea totală de energie electromagnetică în volumul considerat este

$$w = w_e + w_h = \frac{1}{2}\varepsilon \mathscr{E}^2 + \frac{1}{2}\mu \mathscr{H}^2 \tag{1.4.11}$$

În acest caz expresia (1.4.7) se poate scrie condensat

$$\nabla \cdot \vec{\mathscr{S}} + \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{\mathscr{J}} = 0 \tag{1.4.12}$$

expresie ce reprezintă *teorema Poynting diferențială sub formă condensată*.

O interpretare fizică completă a teoremei Poynting rezultă din forma integrală, care se obține prin integrarea pe întregul volum $V$ a expresiei (1.4.12); rezultă

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathscr{S}} dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\, dV = -\int_V \vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{\mathscr{J}} dV \tag{1.4.13}$$

Aplicând teorema divergenței primului termen din stânga se obține expresia

$$\oint_S \vec{\mathscr{S}} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\, dV = -\int_V \vec{\mathscr{E}} \cdot \vec{\mathscr{J}}\, dV \tag{1.4.14}$$

care reprezintă *forma integrală a teoremei Poynting* pentru câmpuri fizice. Se poate formula următorul enunț pentru teorema conservări energiei electromagnetice în volumul *V*, închis de suprafața *S*: Suma dintre energia ce străbate aria *S* în unitatea de timp şi rata de variație în timp a energiei electromagnetice din volumul mărginit de aria *S*, este egal cu rata de conversie, cu semnul schimbat, a energiei electromagnetice în energie mecanică sau termică.

Există şi alte modalități de scriere a teoremei Poynting; o variantă uzuală este [1]

$$\mathscr{P}_e + \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{W}(t) + \mathscr{P}_{dis} = 0 \tag{1.4.15}$$

care este numită *legea conservării puterii*; în (1.4.15) s-a notat: $\mathscr{P}_e$ este puterea transportată de vectorul Poynting; $\mathscr{P}_{dis}$ este puterea disipată; $\mathscr{W}(t)$ este energia totală înmagazinată în volumul considerat.

Dacă în volumul considerat există şi surse, atunci (1.4.15) devine

$$\mathscr{P}_s = \mathscr{P}_e + \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{W}(t) + \mathscr{P}_{dis} \tag{1.4.16}$$

unde $\mathscr{P}_s$ este datorat surselor $\vec{\mathscr{J}}_s$ sau $\vec{\mathscr{J}}_{ms}$.

### 1.4.2. Teorema Poynting pentru câmpuri armonice

În domeniul microundelor, în practica curentă, se utilizează câmpuri electromagnetice monocromatice, astfel se operează cu mărimi fazoriale. Prin utilizarea fazorilor pot fi convenabil generalizate noțiunile de curenți şi de pierderi. Astfel densitatea de curent notată $\vec{J}$ poate conține atât curentul indus $\vec{J}_c = \sigma\vec{E}$ cât şi un curent-sursă $\vec{J}_s$; de asemenea, permitivitatea $\varepsilon$ şi permeabilitatea $\mu$ pot fi mărimi complexe ((1.2.21), (1.3.8), (1.3.11)), prin urmare în volumul considerat pot exista pierderi de energie datorate părților imaginare ale lui $\varepsilon$ şi $\mu$.

În general fazorii se introduc prin relații de definiție de tipul (1.2.1). Se poate arăta că mărimile fizice pot fi exprimate prin relații de forma următoare

$$\begin{aligned}
\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right] \\
\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\left[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t} + \vec{H}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right] \\
\vec{\mathscr{J}}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2}\left[\vec{J}(\vec{r})e^{j\omega t} + \vec{J}^*(\vec{r})e^{-j\omega t}\right]
\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

unde asteriscul "∗" semnifică conjugata complexă. $\vec{J}(\vec{r})$ poate reprezenta, fie densitatea de curent indus $\vec{J}_c(\vec{r})$, fie densitatea de curent-sursă $\vec{J}_s(\vec{r})$, fie suma lor. Vom considera că $\varepsilon$ şi $\mu$ sunt mărimi complexe $\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''$, $\underline{\mu} = \mu' - j\mu''$; de asemenea, conductivitatea $\sigma$ poate fi inclusă în partea imaginară a permitivității electrice conform relației (1.3.11), sau poate fi luată în considerare separat.

În vederea obținerii unei formule finale a teoremei Poynting pentru câmpuri armonice este necesar să definim mai întâi noțiunile de vector Poynting mediat şi vector Poynting complex:

1°. **Vector Poynting mediat**. Conform expresiei de definiție (1.4.8) a vectorului Poynting instantaneu şi ținând cont de relațiile (1.4.17), avem

$$\vec{\mathscr{S}}(\vec{r},t)=\vec{\mathscr{E}}\times\vec{\mathscr{H}}=\frac{1}{4}\left[\vec{E}\times\vec{H}^{*}+\vec{E}^{*}\times\vec{H}+\vec{E}\times\vec{H}e^{j2\omega t}+\vec{E}^{*}\times\vec{H}^{*}e^{-j2\omega t}\right] \qquad (1.4.18)$$

iar valoarea mediată pe o perioadă este

$$\left\langle\vec{\mathscr{S}}(\vec{r},t)\right\rangle=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\vec{\mathscr{S}}(\vec{r},t)dt=\frac{1}{4}\left[\vec{E}\times\vec{H}^{*}+\vec{E}^{*}\times\vec{H}\right]=\frac{1}{2}Re\left[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^{*}(\vec{r})\right] \qquad (1.4.19)$$

sau, în general

$$\left\langle\vec{\mathscr{S}}(\vec{r},t)\right\rangle=\vec{S}_{r}(\vec{r})=\frac{1}{2}Re\left[\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)\times\vec{\mathscr{H}}^{*}(\vec{r},t)\right] \qquad (1.4.20)$$

în care s-au folosit notații simplificate de tipul (1.2.3): $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}$, $\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)=\vec{H}^{*}(\vec{r})e^{-j\omega t}$.

2°. **Vector Poynting complex.** Se poate defini prin generalizarea relației (1.4.20)

$$\vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2}\left[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^{*}(\vec{r})\right]=\vec{S}_{r}(\vec{r})+j\vec{S}_{im}(\vec{r}) \qquad (1.4.21)$$

unde s-a notat

$$\vec{S}_{r}(\vec{r})=Re\left[\vec{S}(\vec{r})\right];\qquad \vec{S}_{im}(\vec{r})=Im\left[\vec{S}(\vec{r})\right]; \qquad (1.4.22)$$

vectorul $\vec{S}(\vec{r})$ reprezintă energia transportată pe unitatea de arie în unitatea de timp [$W/m^2$].

Pentru deducerea teoremei Poynting, sub forma cea mai generală, în cazul unui mediu cu pierderi care conține sursele $\vec{J}_s$ și $\vec{J}_{ms}$ (Fig. 1.4b), se pleacă de la ecuațiile Maxwell diferențiale (1.2.19), (1.2.20); referitor la parametrii $\varepsilon_{rec}$ și $\mu_{rec}$ se fac precizările: se admite prezența unor sarcini mobile (nelegate), astfel conductivitatea $\sigma$ are o valoare finită, însă contribuțiile termenilor $\varepsilon''$ și $\sigma$ se consideră separat; se presupune mediu cu $\sigma_m=0$, astfel pierderile magnetice sunt cauzate de $\mu''$.

Facem produsul scalar cu $\vec{H}^{*}$ al ecuației (1.2.19); rezultă (AI,(I. 20))

$$\vec{H}^{*}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)=-\vec{J}_{ms}\cdot\vec{H}^{*}-j\omega\underline{\mu}\vec{H}\cdot\vec{H}^{*}=-\vec{J}_{ms}\cdot\vec{H}^{*}-j\omega\underline{\mu}\left|\vec{H}\right|^{2} \qquad (1.4.23)$$

unde $\underline{\mu}=\mu'-j\mu''$. Scriem ecuația (1.2.20) pentru mărimile conjugate

$$\nabla\times\vec{H}^{*}=\vec{J}_{s}{}^{*}-j\omega\underline{\varepsilon}^{*}\vec{E}^{*}+\vec{J}_{c}^{*} \qquad (1.4.24)$$

și facem produsul scalar cu $\vec{E}$; se obține ($\vec{J}_{c}{}^{*}=\sigma\vec{E}^{*}$)

$$\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}^{*}\right)=\vec{J}_{s}^{*}\cdot\vec{E}-j\omega\underline{\varepsilon}^{*}\left|\vec{E}\right|^{2}+\sigma\left|\vec{E}\right|^{2} \qquad (1.4.25)$$

unde $\underline{\varepsilon}^{*}$ este conjugata complexă a permitivității, astfel $\underline{\varepsilon}^{*}=\varepsilon'+j\varepsilon''$; dezvoltăm termenul din stânga pe baza identității vectoriale (AI,(I. 20))

$$\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}^{*}\right)=\vec{H}^{*}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}^{*}\right) \qquad (1.4.26)$$

Rearanjăm termenii și ținem seama de (1.4.23), (1.4.25)

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}^{*}\right)=-\vec{J}_{ms}\cdot\vec{H}^{*}-j\omega\mu'\left|\vec{H}\right|^{2}-\omega\mu''\left|\vec{H}\right|^{2}+j\omega\varepsilon'\left|\vec{E}\right|^{2}-\omega\varepsilon''\left|\vec{E}\right|^{2}-\sigma\left|\vec{E}\right|^{2}-\vec{J}_{s}^{*}\cdot\vec{E} \qquad (1.4.27)$$

Ultima relație reprezintă *teorema Poynting diferențială* pentru câmpuri armonice, care este valabilă în orice punct al spațiului.

O interpretare fizică convenabilă a teoremei Poynting se poate obține în forma sa integrală. Integrăm (1.4.27) pe întregul volum $V$ ce conține sursele $\vec{J}_s$, $\vec{J}_{ms}$ şi aplicăm teorema divergenței (AIII, (III.1.1)) termenului din stânga egalității; de asemenea, multiplicăm cu *(1/2)* întreaga expresie în scopul utilizării relației (1.4.21) pentru vectorul Poynting complex; rezultă expresia

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_S\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s}=\int_S\vec{S}(\vec{r})\cdot d\vec{s}=\\&=\frac{1}{2}\int_V\left[-\left(\vec{J}_s^*\cdot\vec{E}+\vec{J}_{ms}\cdot\vec{H}^*+\sigma\left|\vec{E}\right|^2+\omega\left(\varepsilon''\left|\vec{E}\right|^2+\mu''\left|\vec{H}\right|^2\right)\right)+j\omega\left(\varepsilon'\left|\vec{E}\right|^2-\mu'\left|\vec{H}\right|^2\right)\right]dV\end{aligned}\tag{1.4.28}$$

care reprezintă *teorema Poynting integrală.* Diferiții termeni de sub integrală reprezintă fie puteri active, fie puterii reactive, astfel este utilă o identificare a lor. Mai întâi trebuie observat că termenii $\vec{J}_s^*\cdot\vec{E}$ şi $\vec{J}_{ms}\cdot\vec{H}^*$ pot avea atât componente reale (active) cât şi imaginare (reactive).

*Termenii reali (activi) sunt:*

1°. puterea reală furnizată de sursele $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$

$$P_{es}=-\frac{1}{2}\int_V Re\left(\vec{J}_s^*\cdot\vec{E}\right)dV\tag{1.4.29}$$

$$P_{ms}=-\frac{1}{2}\int_V Re\left(\vec{J}_{ms}^*\cdot\vec{H}^*\right)dV\tag{1.4.30}$$

2°. puterea disipată pe conductivitatea $\sigma$

$$P_{dc}=\frac{\sigma}{2}\int_V\left|\vec{E}\right|^2dV\tag{1.4.31}$$

3°. pierderile dielectrice şi magnetice determinate de părțile imaginare $\varepsilon''$ şi $\mu''$

$$P_{dem}=\frac{\omega}{2}\int_V\left(\varepsilon''\left|\vec{E}\right|^2+\mu''\left|\vec{H}\right|^2\right)dV\tag{1.4.32}$$

*Termenii imaginari (reactivi) sunt:*

1°. puterile reactive datorate surselor

$$P_{ies}=-\frac{1}{2}\int_V Im\left(\vec{J}_s^*\cdot\vec{E}\right)dV\tag{1.4.33}$$

$$P_{ims}=-\frac{1}{2}\int_V Im\left(\vec{J}_{ms}\cdot\vec{H}^*\right)dV\tag{1.4.34}$$

2°. Energiile, electrică şi magnetică, înmagazinate în câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ din volumul $V$; ținând cont de definițiile (1.4.11) şi de relațiile (1.4.17) se poate scrie

$$W_E=\frac{1}{4}\int_V\left(\vec{E}\cdot\vec{D}^*\right)dV=\frac{\varepsilon'}{4}\int_V\left|\vec{E}\right|^2dV\tag{1.4.35}$$

$$W_H=\frac{1}{4}\int_V\left(\vec{H}\cdot\vec{B}^*\right)dV=\frac{\mu'}{4}\int_V\left|\vec{H}\right|^2dV\tag{1.4.36}$$

astfel ultimul termen de sub integrala (1.4.28) devine

$$P_{em}=j2\omega\left(W_E-W_H\right)\tag{1.4.37}$$

şi reprezintă energia electromagnetică reactivă netă înmagazinată în câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, multiplicată cu $2\omega$ (în fapt $P_{em}$ are dimensiunile unei puteri).

În urma precizărilor făcute, teorema Poynting integrală poate fi scrisă sub forma

$$\oint_S \vec{S}(\vec{r})\cdot d\vec{s} = (P_{es} + P_{ms}) - (P_{dc} + P_{dem}) + P_{em} + (P_{ies} + P_{ims}) \tag{1.4.38}$$

Acum se poate da un enunț mai general al teoremei Poynting integrale: suma puterilor furnizate de către vectorul Poynting care intră în volumul $V$ prin suprafața $S$ şi sursele $\vec{J}_s$, $\vec{J}_{ms}$ este egală cu suma pierderilor $(P_{dc} + P_{dem})$ plus puterea reactivă înmagazinată în volumul $V$. Ținând cont de relația (1.4.22) se poate da o formulare generală a teoremei Poynting integrale

$$\oint_S \vec{S}_r \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} Re \oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s} = (P_{es} + P_{ms}) - (P_{dc} + P_{dem}) \tag{1.4.39}$$

$$\oint_S \vec{S}_{im} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} Im \oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s} = P_{em} + P_{ies} + P_{ims} \tag{1.4.40}$$

Există şi alte variante de interpretare a teoremei integrale. Dacă se consideră că vectorul Poynting este îndreptat spre exterior, atunci singurele surse de putere în volumul $V$ sunt curenții $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$ ; se poate scrie

$$P_{surse} = (P_{dc} + P_{dem}) + P_{em} + P_P + (P_{ies} + P_{ims}) \tag{1.4.41}$$

în care s-a notat: $P_{surse} = (P_{dc} + P_{dem})$; $P_P = \oint_S \vec{S}(\vec{r})\cdot d\vec{s}$ (membrul stâng al relației (1.4.38)), reprezintă puterea transportată de vectorul Poynting spre exterior. Puterea mediată (activă) furnizată câmpului electromagnetic din afara volumului $V$ va fi

$$P_{surse} = \frac{1}{2} Re \oint_S \left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s} \tag{1.4.42}$$

Pierderile şi puterile reactive sunt localizate în interiorul volumului $V$.

# Bibliografie Capitolul 1

1. D.K. CHENG – "Field and Wave Electromagnetics", Addison Wesley, (1989)
2. R.E. COLLIN – "Field Theory of Guided Waves", second edition, Oxford University Press, (1991)
3. J.D. JACKSON – "Classical Electrodynamics", sec. edition, John Wiley and Soons, N.Y., (1975)
4. M.H. CHOUDHURY – "Electromagnetism", Ellis Harwood Limited, division of John Wiley and Sons, (1989)
5. A. ISHIMARU – "Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering", Prentice-Hall, Int. Ed. N.Y., (1991)
6. A.M. KUGUŞEV, N.S. GOLUBEVA – "Osnovy radioelektroniki", Energia, Moskva, (l. rusă), (1969)
7. Edm. NICOLAU – "Câmpuri şi unde electromagnetice", Edit. Academiei, (1972)
8. J.L. VOLAKIS, A. CHATTERJEE, L.C. KEMPEL – "Finite Element Method for Electromagnetics", IEEE Press, N.Y., (1998)

# CAPITOLUL 2

# PROPAGAREA GHIDATĂ A MICROUNDELOR. GHIDURI DE UNDĂ METALICE

## 2.1. INTRODUCERE ASUPRA UNDELOR PLANE

Propagarea undelor electromagnetice în diferite medii este tratată pe larg în capitolul 9; în secțiunea de față se expun succint chestiunile de baza referitoare la undele plane. La început vom considera medii omogene, isotrope, fără pierderi, nedispersive şi fără surse ($\vec{J}_s = 0,\ \rho_s = 0$). În acest caz ecuațiile de propagare pentru câmpuri armonice (monocromatice), referitoare la vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, (1.2.28) şi (1.2.29) devin (1.2.74), (1.2.75)

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{2.1.1}$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) = 0 \tag{2.1.2}$$

care reprezintă ecuații de propagare Helmholtz omogene, iar $k = \omega(\varepsilon\mu)^{1/2}$ este numărul de undă; dacă $\varepsilon$ şi $\mu$ sunt constante reale atunci şi $k$ este real. Referindu-ne la câmpul electric, pentru simplitate presupunem că unda se propagă după direcția $z$, iar $E$ are componentă numai după direcția $x$ (câmpul electric este liniar polarizat pe direcția $x$) şi nu variază în planul $(x,y)$; astfel ecuația (2.1.1) se simplifică ($\partial/\partial x = 0, \partial/\partial y = 0$)

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \tag{2.1.3}$$

a cărei soluție generală este de forma

$$E_x(z) = E_0^+ e^{-jkz} + E_o^- e^{jkz} \tag{2.1.4}$$

unde $E_0^+, E_0^-$ sunt constante (eventual complexe) independente de spațiu şi timp; primul termen reprezintă o undă care se propagă în sensul $+z$, iar cel de al doilea termen reprezintă o undă care se propagă în sens invers; de asemenea, o combinație liniară a celor doi termeni formează o soluție a ecuației (2.1.3).

În cazul mediului isotrop, omogen şi infinit putem limita problema numai la propagarea după direcția $+z$, reținând astfel numai primul termen din (2.1.4). Câmpul magnetic rezultă din ecuația Maxwell (1.2.4)

$$\vec{H} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega\mu} \tag{2.1.5}$$

Efectuând calculele pentru $\vec{E} = \hat{i}E_x$ se obține numai componenta după $y$

$$H_y(z) = \left(E_o^+ / Z\right) e^{-jkz} = H_0 e^{-jkz} \tag{2.1.6}$$

unde $Z = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ reprezintă impedanța de undă intrinsecă a mediului; în spațiul liber avem $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} = 120\pi\ \Omega$. Trecând în domeniul timp se obțin expresiile

$$\mathscr{E}_x(z,t) = R_e\left[\vec{E}_0 e^{-jkz} e^{j\omega t}\right] = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \tag{2.1.7}$$

$$\mathscr{H}_y(z,t) = R_e\left[\vec{H}_0 e^{-jkz} e^{j\omega t}\right] = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kz) \tag{2.1.8}$$

care reprezintă unde progresive pe direcția +$z$; au fost utilizate notațiile următoare: $\vec{\mathscr{E}}_x(z,t)=\hat{i}\,\mathscr{E}_x(z,t)$, $\vec{E}_0(z)=\hat{i}E_0(z)$; $\vec{\mathscr{H}}_y(z,t)=\hat{j}\mathscr{H}_y(z,t)$; $\vec{H}_0(z)=\hat{j}H_0(z)$. Pentru a menține un punct fix pe undă ($\omega t-kz=const.$) este necesar să ne deplasăm în direcția +$z$ pe măsură ce timpul crește; viteza de propagare a undei în sensul specificat mai sus este numită *viteză de fază*, deoarece este viteza cu care se deplasează planele de fază constantă; această viteză se definește ca

$$v_{ph}=\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t-const.}{k}\right)=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{(\varepsilon\mu)^{1/2}} \tag{2.1.9}$$

Lungimea de undă este definită ca distanța dintre două maxime succesive (sau alte două puncte de referință) la un moment dat de timp; astfel se poate scrie

$$\begin{gathered}(\omega t-kz)-[\omega t-k(z+\lambda)]=2\pi \\ \lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{v_{ph}}{f}\end{gathered} \tag{2.1.10}$$

În cazul general când polarizarea câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ nu este specificată, iar propagarea are loc pe o direcție arbitrară, soluțiile ecuațiilor de propagare sunt de forma

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{2.1.11}$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\vec{H}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{2.1.12}$$

unde, în cazul coordonatelor cartesiene avem

$$\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z=\hat{r}r \tag{2.1.13}$$

$$\vec{k}=\hat{i}k_x+\hat{j}k_y+\hat{k}k_z=\hat{\xi}\,k \tag{2.1.14}$$

iar $\hat{\xi}$ este versorul ce indică direcția de propagare. Mărimile $\vec{E}_0$ şi $\vec{H}_0$ sunt constante vectoriale complexe independente de timp şi spațiu; $\vec{k}$ este vectorul de undă, iar $\vec{r}$ este vectorul de poziție.

Se poate arăta că soluțiile (2.1.11), (2.1.12), care satisfac ecuațiile Maxwell pentru medii isotrope, omogene, infinite şi fără surse, reprezintă unde electromagnetice transversale. Ținând cont de convenția de notare (1.2.3), expresiile (2.1.11) şi (2.1.12) se scriu în domeniul timp

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=\vec{E}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{j\omega t}=\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{2.1.15}$$

$$\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)=\vec{H}_0e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{j\omega t}=\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{2.1.16}$$

Introducând (2.1.15) în ecuația Maxwell (2.1.6) se poate scrie

$$\nabla\cdot\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=\vec{E}_0\nabla\cdot e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{j\omega t}=-j\vec{k}\cdot\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=0 \tag{2.1.17}$$

fapt ce implică

$$\vec{k}\cdot\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{r})=0 \tag{2.1.18}$$

prin urmare câmpul $\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}$ şi vectorul de propagare $\vec{k}$ sunt perpendiculari între ei. Plecând de la ecuația diferențială Maxwell (1.2.4) se poate scrie:

$$\nabla\times\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\mu\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) \tag{2.1.19}$$

Utilizând identitatea vectorială (AI, (I.18)) se poate scrie:

$$\nabla\times\left(\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{j\omega t}\right)=\nabla\left(e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{j\omega t}\right)\times\vec{E}_0=-j\vec{k}\times\vec{\mathscr{E}} \tag{2.1.20}$$

$$\vec{k}\times\vec{\mathscr{E}}=\omega\vec{B};\ \ \vec{k}\times\vec{E}(\vec{r})=\omega\mu\vec{H}(\vec{r}) \tag{2.1.21}$$

fapt ce atestă că $\vec{H}(\vec{r})$ este perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{k}$ şi $\vec{E}(\vec{r})$. Expresiile (2.1.18) şi (2.1.21) implică faptul că vectorii ($\vec{E}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})$ şi $\vec{k}$) sunt perpendiculari între ei; astfel câmpurile definite de expresiile (2.1.15) şi (2.1.16) care sunt legate prin relaţiile (2.1.18) şi (2.1.19) reprezintă o *undă transversal electromagnetică (TEM)* care se propagă pe direcţia $\vec{k}$.

## 2.2. MODURI DE UNDĂ ÎN GHIDURI METALICE

### 2.2.1. Relaţii între componentele transversale şi longitudinale

Există mai multe tipuri de structuri care asigură propagarea ghidată a undelor electromagnetice: ghidurile undă metalice în mai multe variante, ghiduri dielectrice, structuri stripline şi microstrip, linii bifilare, linii plate, structuri cu unde de suprafaţă etc.; câteva din aceste structuri sunt arătate în Fig. 2.1. În acest capitol sunt tratate numai ghidurile metalice constituite dintr-un singur tub metalic gol în interior, având secţiuni transversale dreptunghiulare sau circulare; alte structuri de propagare sunt descrise în capitolele 3 şi 4. Aşa cum s-a discutat în secţiunea (1.3.2), condiţiile la limită impun ca pe peretele metalic componentele tangenţiale $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ să se anuleze.

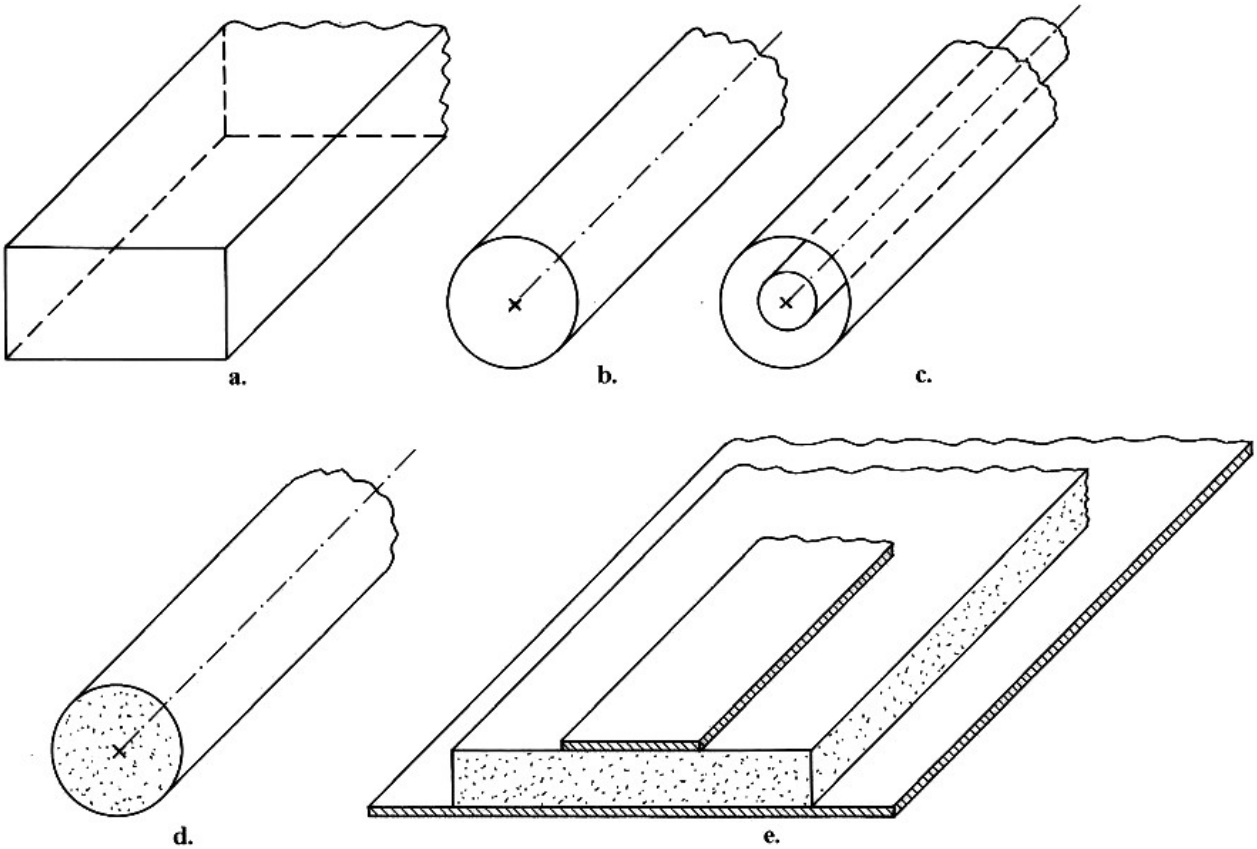



**Fig. 2.1. Tipuri de ghiduri de undă uzuale; a – ghid metalic de secţiune dreptunghiulară; b – ghid metalic de secţiune circulară; c – ghid metalic coaxial; d- ghid dielectric de secţiune circulară; e – structură microstrip**

În astfel de structuri propagarea are loc după axa longitudinală a ghidului de undă, care de regulă este axa *z*; se admite că ghidurile de undă sunt uniforme în lungul acestei axe. O particularitate importantă a procesului de propagare în ghidurile de undă uniforme constă în faptul

că vectorul de undă $\vec{k}$ coincide cu axa longitudinală; de asemenea, configurația câmpului electromagnetic în planul *(x,y)* nu depinde de punctele de pe axa *z*. În aceste condiții este convenabil ca câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ să fie descompuse în componente transversale şi longitudinale, care în coordonate cartesiene iau forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_T(\vec{r}) + \hat{k}E_z(\vec{r}) \tag{2.2.1}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_T(\vec{r}) + \hat{k}H_z(\vec{r}) \tag{2.2.2}$$

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) = \vec{\mathscr{E}}_T(\vec{r},t) + \hat{k}\mathscr{E}_z(\vec{r},t) \tag{2.2.3}$$

$$\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) = \vec{\mathscr{H}}_T(\vec{r},t) + \hat{k}\mathscr{H}_z(\vec{r},t) \tag{2.2.4}$$

cu condițiile

$$\hat{k}\cdot\vec{\mathscr{E}}_T = 0, \quad \hat{k}\cdot\vec{\mathscr{H}}_T = 0 \tag{2.2.5}$$

unde: $\vec{\mathscr{E}}_T$ şi $\vec{\mathscr{H}}_T$ reprezintă componentele transversale, iar $\mathscr{E}_z$ şi $\mathscr{H}_z$ reprezintă componentele longitudinale. Componentele transversale rezultă din relațiile generale

$$\vec{\mathscr{E}}_T = \left(\hat{k}\times\vec{\mathscr{E}}\right)\times\hat{k}, \quad \vec{\mathscr{H}}_T = \left(\hat{k}\times\vec{\mathscr{H}}\right)\times\hat{k} \tag{2.2.6}$$

De asemenea pentru operatorii $\nabla$ şi $\nabla^2$ este convenabilă separarea termenilor transversali şi longitudinali; astfel pentru operatorul $\nabla$ *(Hamilton)* în coordonate cartesiene avem

$$\nabla = \nabla_T + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2.2.7}$$

$$\nabla_T = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} \tag{2.2.8}$$

fiind respectată condiția

$$\hat{k}\cdot\nabla_T = 0 \tag{2.2.9}$$

unde $\nabla_T$ este gradientul transversal. Pentru operatorul Laplace $\nabla^2$ se obține

$$\nabla^2 = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.2.10}$$

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{2.2.11}$$

Considerăm că mediul din interiorul ghidului de undă este isotrop, omogen, neconductiv şi fără surse. Ecuațiile de propagare pentru câmpuri fizice (*în domeniul timp*) sunt de forma (1.1.29), (1.1.30) cu termen drept nul

$$\nabla^2\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.12}$$

$$\nabla^2\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2.13}$$

Având în vedere că propagarea are loc numai după direcția *z* soluțiile acestor ecuații sunt de forma (se ține seama de notația simplificată (1.2.3))

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{\eta})e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \tag{2.2.14}$$

$$\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{\eta})e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \tag{2.2.15}$$

unde

$$\gamma = \alpha_g + j\beta_g \tag{2.2.16}$$

reprezintă constanta de propagare a câmpului electromagnetic în ghidul de undă; $\alpha_g$ este constanta de atenuare, iar $\beta_g$ este constanta de fază; mărimea $\vec{\eta}$ reprezintă un vector bidimensional, astfel avem

$$\vec{r} = \vec{\eta} + \hat{k}z \tag{2.2.17}$$

în coordonate cartesiene $\vec{\eta} = \vec{\eta}(x,y)$, iar în coordonate cilindrice $\vec{\eta} = \vec{\eta}(\rho,\phi)$.

Ca urmare a discuției referitoare la componentele transversale şi longitudinale ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ şi la operatorii $\nabla$ şi $\nabla^2$, soluțiile de tipul (2.2.14) şi (2.215) se pot scrie sub forma

$$\vec{\mathscr{E}}_T(\vec{r},t) = \vec{E}_{0T}(x,y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = \vec{E}_T(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{2.2.18}$$

$$\vec{\mathscr{E}}_z(\vec{r},t) = \hat{k}E_{0z}(x,y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = \vec{E}_z(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{2.2.19}$$

$$\vec{\mathscr{H}}_T(\vec{r},t) = \vec{H}_{0T}(x,y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = \vec{H}_T(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{2.2.20}$$

$$\vec{\mathscr{H}}_z(\vec{r},t) = \hat{k}H_{0z}(x,y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = \vec{H}_z(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{2.2.21}$$

Introducem aceste soluții în ecuațiile diferențiale Maxwell (1.2.4) - (1.2.7) (factorul exponențial ( $j\omega t$ ) se simplifică, iar $\partial/\partial z = -\gamma$ )

$$\nabla_T \times \vec{E}_{0T} + \nabla_T \times \left(\hat{k}E_{0z}\right) - \gamma\hat{k} \times \vec{E}_{0T} = -j\omega\omega\left(\vec{H}_{0T} + \hat{k}H_{0z}\right) \tag{2.2.22}$$

$$\nabla_T \times \vec{H}_{0T} + \nabla_T \times \left(\hat{k}H_{0z}\right) - \gamma\hat{k} \times \vec{H}_{0T} = j\omega\varepsilon\left(\vec{E}_{0T} + \hat{k}E_{0z}\right) \tag{2.2.23}$$

$$\nabla_T \cdot \vec{E}_{0T} - \gamma E_{0z} = 0 \tag{2.2.24}$$

$$\nabla_T \cdot \vec{H}_{0T} - \gamma H_{0z} = 0 \tag{2.2.25}$$

La scrierea acestor expresii s-a ținut cont de relațiile (2.2.5) şi (2.2.9); de asemenea, după efectuarea calculelor s-a simplificat factorul *exp(-γz)*.
Efectuând anumite calcule asupra expresiilor (2.2.22) şi (2.2.23) se pot obține relații între componentele longitudinale şi transversale. Vom observa mai întâi că subzistă relațiile

$$\hat{k} \times \left(\nabla_T \times \vec{E}_{0T}\right) = 0\,; \quad \hat{k} \times \left(\nabla_T \times \vec{H}_{0T}\right) = 0 \tag{2.2.26}$$

Într-adevăr $\vec{E}_{0T}$ şi $\vec{H}_{0T}$ sunt perpendiculare pe $\vec{k}$, iar $\nabla_T \times \vec{E}_{0T}$ şi $\nabla_T \times \vec{H}_{0T}$ sunt paralele cu $\vec{k}$; astfel relațiile (2.2.6) sunt justificate şi ținem cont de ele mai jos.

Făcând produsul vectorial cu $\vec{k}$ al ecuației (2.2.22) se obțin componentele de câmp perpendiculare pe $\vec{k}$

$$\hat{k} \times \left(\nabla_T E_{0z} \times \hat{k}\right) - \gamma\vec{k} \times \left(\hat{k} \times \vec{E}_{0T}\right) = -j\omega\mu\left(\hat{k} \times \vec{H}_{0T}\right) \tag{2.2.27}$$

Dezvoltăm produsele vectoriale duble şi ținem cont de notațiile (2.2.3) şi (2.2.7); rezultă

$$\nabla_T E_{0z} - \gamma\vec{E}_{0T} = -j\omega\mu\left(\hat{k} \times \vec{H}_{0T}\right); \tag{2.2.28}$$

efectuând o nouă multiplicare vectorială cu $\vec{k}$ a ultimei expresii se obține o relație convenabilă a componentelor transversale

$$\hat{k} \times \nabla_T E_{0z} + \gamma\hat{k} \times \vec{E}_{0T} = j\omega\mu\vec{H}_{0T} \tag{2.2.29}$$

Făcând produsul scalar cu $\vec{k}$ a ecuației (2.2.22) se obține o relație pentru componentele longitudinale (paralele cu $\hat{k}$)

$$\hat{k}\cdot\left(\nabla_T\times\vec{E}_{0T}\right)=-j\omega\mu H_{0z} \tag{2.2.30}$$

Procedând analog şi pentru ecuația (2.2.23) se obține

$$\hat{k}\times\nabla_T H_{0z}+\gamma\hat{k}\times\vec{H}_{0T}=-j\omega\varepsilon\vec{E}_{0T} \tag{2.2.31}$$

pentru componentele transversale şi

$$\hat{k}\cdot\left(\nabla_T\times\vec{H}_{0T}\right)=j\omega\varepsilon E_{0z} \tag{2.2.32}$$

pentru componentele longitudinale.

## 2.2.2. Moduri de undă în ghidurile metalice

În cazul ghidurilor de undă metalice, în care propagarea are loc numai după direcția z, ecuațiile de propagare (2.2.12), (2.2.13) pot fi puse sub forme convenabile pentru definirea modurilor de undă şi determinarea configurațiilor de câmp electromagnetic. Dacă în ecuația de propagare (2.2.12) se introduc soluții de forma (2.2.14) şi se ține cont de expresiile(2.2.18), (2.2.19), se poate scrie

$$\nabla^2\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)=\left(\nabla_T^2+\gamma^2\right)\vec{E}_{0T}(x,y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \tag{2.2.33}$$

$$\varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\varepsilon\mu\omega^2\vec{E}_{0T}(x,y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \tag{2.2.34}$$

unde $\nabla_T^2$ este operatorul Laplace transversal.

Introducând în (2.2.12) rezultă o ecuație de propagare Helmholtz vectorială omogenă, scrisă pentru câmpuri cu variație armonică, sub formă condensată

$$\left[\nabla_T^2+k_\lambda^2\right]\vec{E}_{0T}(x,y)=0 \tag{2.2.35}$$

Parametrul $k_\lambda^2$ are expresia

$$k_\lambda^2=\gamma^2+\omega^2\varepsilon\mu=\gamma^2+k^2 \tag{2.2.36}$$

şi este numit *număr de undă transversal* al sistemului care asigură propagarea ghidată; el depinde numai de dimensiunile transversale ale ghidului de undă şi joacă rolul de *număr de undă critic*(de tăiere).Constanta de propagare în ghid reprezintă un *număr de undă longitudinal*. Se va observa că ecuația Helmholtz omogenă (2.2.35) este verificată de soluția (2.2.18).

În mod similar referindu-ne la câmpul magnetic $\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)$ se poate scrie ecuația

$$\left[\nabla_T^2+k_\lambda^2\right]\vec{H}_{0T}(x,y)=0 \tag{2.2.37}$$

care este verificată de soluția (2.2.20). Ca urmare a relațiilor dintre componentele longitudinale şi transversale ale câmpurilor, se pot scrie ecuații Helmholtz, omogene pentru componentele longitudinale

$$\left[\nabla_T^2+k_\lambda^2\right]E_{0z}(x,y)=0 \tag{2.2.38}$$

$$\left[\nabla_T^2+k_\lambda^2\right]H_{0z}(x,y)=0 \tag{2.2.39}$$

Acestea sunt ecuații scalare şi sunt verificate de soluții de forma (2.2.19), respectiv (2.2.21).

În funcție de problema concretă studiată pentru determinarea configurației câmpului electromagnetic se utilizează una dintre ecuațiile (2.2.35)-(2.2.39); celelalte componente se obțin prin utilizarea relațiilor de legătura între componentele transversale şi longitudinale; trebuie subliniat că în practica curentă este convenabil să se opereze cu ecuațiile Helmholtz scalare (2.2.38), (2.2.39).

Prin *mod de undă* se înțelege o configurație de câmp electromagnetic care se propagă într-un mediu sau o structură dată. După cum s-a precizat în secțiunea precedentă, într-un mediu isotrop, omogen şi infinit se pot propaga unde electromagnetice transversale (*TEM*). În ghidurile de undă constituite dintr-un singur tub metalic pot exista două moduri de undă: *modul transversal-magnetic* (*TM*), caracterizat prin faptul că nu conține componente longitudinale ale câmpului magnetic, deci $H_{0z}=0$; *mod transversal electric* (*TE*) caracterizat prin faptul că nu conține componente longitudinale ale câmpului electric, deci $E_{0z}=0$.

**1°. Mod transversal-magnetic (TM).** Configurația câmpului electromagnetic din ghidul de undă poate fi determinată pornindu-se de la ecuația de propagare Helmholtz scalara pentru componenta $E_{0z}$ (2.2.38), cu condiții la limită adecvate. Pentru undele electromagnetice care se propagă în interiorul ghidului condițiile la limită se referă la interfața aer – metal; pe pereții metalici de conductivitate infinită condițiile la limită sunt de forma (1.3.46) care definesc un „perete electric". Întrucât în interiorul metalului componentele câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ se anulează, rezultă că componentele tangențiale ale câmpului electric trebuie să se anuleze; vom considera că metalul reprezintă mediul (2), aerul din interiorul ghidului reprezintă mediul (1), iar versorul $\hat{n}$ este îndreptat de la metal spre interior. Ecuația de propagare Helmholtz scalară se scrie

$$\left[\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right] E_{0z}(x,y) = 0 \tag{2.2.40}$$

Componentele tangențiale la pereții ghidului sunt $E_{0z}(x,y)$ şi $\vec{E}_{0T}\times\hat{n}$; astfel condițiile la limită se pot exprima sub forma (factorul $exp(-\gamma z + j\omega t)$ se simplifică)

$$E_{0z}(x,y)\big|_S = 0; \quad \vec{E}_{0T}(x,y)\times\hat{n}\big|_S = 0 \tag{2.2.41}$$

care se numesc *condiții Dirichlet*.

În urma rezolvării ecuației (2.2.40) cu condițiile (2.2.41) se obține expresia analitică pentru $E_{0z}(x,y)$ şi $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$; celelalte componente (transversale) ale câmpului electromagnetic se obțin prin utilizarea relațiilor (2.2.29)-(2.2.32). Astfel, punând condiția $H_{0z}=0$, din (2.2.31), după multiplicarea vectorială cu $\hat{k}$, se obține

$$\vec{H}_{0T} = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma}\hat{k}\times\vec{E}_{0T} \tag{2.2.42}$$

Introducem această expresie în (2.2.29); după multiplicarea vectorială cu $\hat{k}$, se obține

$$\vec{E}_{0T} = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\nabla_T E_{0z} \tag{2.2.43}$$

Prin urmare configurația câmpului electromagnetic pentru modul *TM* este determinată de cinci componente: $E_{0x}$, $E_{0y}$, $E_{0z}$, $H_{0x}$, $H_{0y}$.

**2°. Mod transversal-electric(TE).** În acest caz este convenabilă utilizarea ecuației Helmholtz scalare pentru componenta $H_{0z}$:

$$\left[\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right] H_{0z}(x,y) = 0 \tag{2.2.44}$$

Condițiile la limită sunt cele de „perete electric"(1.3.56), care sub formă generală se scriu:

$$\vec{E}(\vec{r})\times\hat{n} = 0; \quad \vec{H}(\vec{r})\cdot\hat{n} = 0 \tag{2.2.45}$$

Întrucât ecuația (2.2.44) se referă la componenta magnetică longitudinală este convenabil să folosim condiția $\vec{H}(\vec{r})\cdot\hat{n}=0$; în acest scop ne referim la relația (2.2.23) în care mai întâi facem $E_{0z}=0$ şi apoi o multiplicăm vectorial cu $\hat{k}$; se obține expresia

$$\nabla_T H_{0z} + \gamma \vec{H}_{0z} = j\omega\varepsilon \hat{k} \times \vec{E}_{0T} \tag{2.2.46}$$

pe care o multiplicăm scalar cu $\hat{n}$ pentru a determina componentele câmpului magnetic perpendicular pe suprafața metalică (paralele cu $\hat{n}$ ); rezultă expresia

$$\hat{n} \cdot \nabla_T H_{0z}(x,y)\big|_S = \frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial \hat{n}}\bigg|_S = 0 \tag{2.2.47}$$

în care s-a ținut cont de egalitățile $\hat{n} \cdot \hat{k} = 0,\ \hat{n} \cdot \vec{H}_{0T} = 0$ . Ultima relație (2.2.47) constituie *condiția Neumann*.

Celelalte componente ale câmpului electromagnetic care se propagă prin ghidul de undă se obțin prin utilizarea relațiilor (2.2.29)-(2.2.32). Astfel, punând condiția $E_{0z} = 0$ din (2.2.29), după multiplicarea vectorială cu $\hat{k}$ , se obține

$$\vec{E}_{0T} = \frac{-j\omega\mu}{\gamma} \hat{k} \times \vec{H}_{0T} \tag{2.2.48}$$

Introducem această expresie în (2.2.31) şi după multiplicarea vectorială cu $\hat{k}$, rezultă

$$\vec{H}_{0T} = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2} \nabla_T H_{0z} \tag{2.2.49}$$

Configurația câmpului electromagnetic pentru modul *TE* este determinată de cinci componente: $H_{0x}, H_{0y}, H_{0z}, E_{0x}, E_{0y}$ .

## 2.3. GHIDURI DE UNDĂ METALICE DE SECȚIUNE DREPTUNGHIULARĂ

### 2.3.1. Moduri transversal-magnetice TM (unde E). Expresii generale ale componentelor de câmp

În etapa actuală există tendința de miniaturizare a componentelor şi echipamentelor de microunde prin utilizarea dispozitivelor semiconductoare specializate, a circuitelor integrate de microunde şi a structurilor microstrip. Cu toate acestea în instalațiile de putere mare, cum ar fi cele de tip industrial sau radare de mare putere, precum şi în unele echipamente de măsurare a materialelor dielectrice şi ferimagnetice, sunt utilizate ghidurile metalice de diferite forme ale secțiunilor transversale. Ghidul metalic de secțiune dreptunghiulară a fost unul din primele tipuri de linii de transmisie în domeniul microundelor; el este folosit şi astăzi în multe aplicații. Ca metodologie de studiu ghidul de secțiune dreptunghiulară permite o tratare analitică completă şi exactă; rezultatele şi concluziile obținute pot fi extinse la structuri de propagare ghidată mai complicate, unde soluțiile analitice exacte sunt greu de obținut. În ghidurile metalice constituite dintr-un singur tub se pot propaga modurile *TM* şi *TE*, dar nu se pot propaga moduri *TEM*. De asemenea, aceste ghiduri posedă frecvențe critice (de tăiere) sub care propagarea nu este posibilă; ca urmare a existenței frecvențelor critice în astfel de ghiduri, vor fi descrise succint şi fenomenele de dispersie.

**Expresii generale ale componentelor câmpului electromagnetic**

Se consideră ghiduri uniforme după axa z, având pereții metalici de conductivitate infinită şi cu aer în interior ( $\varepsilon_0, \mu_0$ ); un segment de ghid este arătat în Fig. 2.2. Pentru studiul modurilor *TM* se pleacă de la ecuația Helmholtz scalară pentru componenta $E_{0z}(x,y)$:

$$\left[\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right] E_{0z}(x,y) = 0 \tag{2.3.1}$$

care are condiții la limită de tip Dirichlet (2.2.41), pe care le particularizăm la structura din Fig. 2.2:

- pe pereții verticali

$$E_{0z}(0,y)=0,\ \ E_{0z}(a,y)=0 \tag{2.3.2}$$

- pe pereții orizontali

$$E_{0z}(x,0)=0,\ E_{0z}(x,b)=0 \tag{2.3.3}$$

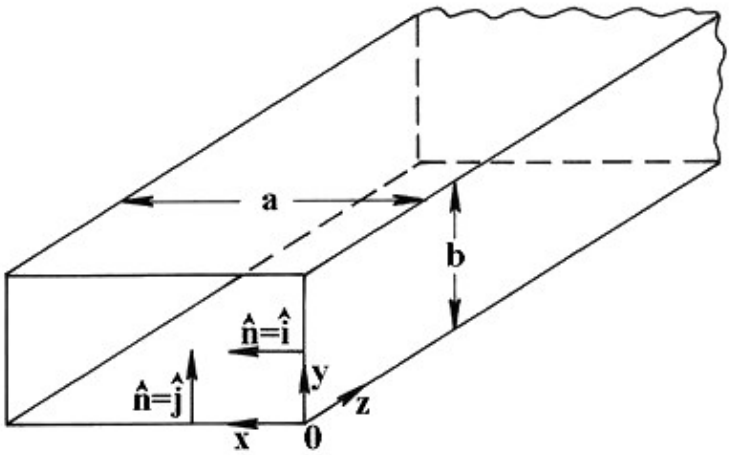



**Fig. 2.2. Segment de ghid de undă metalic cu secțiune dreptunghiulară**

Pentru rezolvarea ecuației de propagare Helmholtz (2.3.1), care este o ecuație diferențială de gradul doi cu derivate parțiale, se aplică metoda separării variabilelor

$$E_{0z}(x,y)=X(x)Y(y). \tag{2.3.4}$$

Introducând în (2.3.1) rezultă ecuația (după divizare cu XY)

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+k_\lambda^2=0 \tag{2.3.5}$$

Primul termen ($X''/X$) nu depinde de al doilea şi trebuie să fie egal cu o constantă parțială $k_x^2$; similar, al doilea termen ($Y''/Y$) nu depinde de primul şi este egal cu o constantă parțială $k_y^2$; astfel se poate scrie

$$\frac{d^2X}{dx^2}+k_x^2X=0 \tag{2.3.6}$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}+k_y^2Y=0 \tag{2.3.7}$$

unde

$$k_x^2+k_y^2=k_\lambda^2; \tag{2.3.8}$$

mărimile $k_x$ şi $k_y$ se numesc *numere de undă transversale parțiale*. Soluțiile ecuațiilor independente (2.3.6.), (2.3.7) sunt de forma

$$X(x)=A_1\sin k_x x+A_2\cos k_x x \tag{2.3.9}$$

$$Y(y)=B_1\sin k_y y+B_2\cos k_y y \tag{2.3.10}$$

Constantele de integrare ($A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$) şi numerele de undă parțiale se determină prin utilizarea condițiilor la limită (2.3.2), (2.3.3); din condițiile $X(0)=0$ şi $X(a)=0$ (2.3.2) rezultă $A_2=0$ şi

$$k_x=\frac{m\pi}{a},\quad m=1,2,3,.... \tag{2.3.11}$$

din condițiile *Y(0) = 0, Y(b) = 0* (2.3.3) rezultă $B_2 = 0$ şi

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1,2,3,.... \tag{2.3.12}$$

Ținând cont de notația (2.3.4), soluția ecuației (2.3.1) este

$$E_{0z}(x,y) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.13}$$

unde $E_0 = A_1 B_1$ este o constantă dependentă de nivelul puterii care se propagă în ghid, de modul de propagare şi de eventualele pierderi; precizări suplimentare sunt date în secțiunea 5.8.

Componentele transversale ale câmpului electromagnetic în cazul modurilor *TM* se determină prin utilizarea relațiilor (2.2.42), (2.2.43). Pornind de la (2.2.43) se poate scrie

$$\vec{E}_{0T}(x,y) = \hat{i}E_{0x}(x,y) + \hat{j}E_{0y}(x,y) = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\left[\hat{i}\frac{\partial E_{0z}(x,y)}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial E_{0z}(x,y)}{\partial y}\right] \tag{2.3.14}$$

din care se scoate

$$E_{0x}(x,y) = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\frac{m\pi}{a}E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.15}$$

$$E_{0y}(x,y) = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\frac{n\pi}{b}E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.16}$$

Pornind de la (2.2.42) se poate scrie (ținând cont de (2.3.14))

$$\begin{aligned}\vec{H}_{0T}(x,y) = \hat{i}H_{0x}(x,y) + \hat{j}H_{0y}(x,y) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma}\hat{k}\times\vec{E}_{0T}(x,y) = \\ = -\frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times\left(\hat{i}\frac{\partial E_{0z}(x,y)}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial E_{0z}(x,y)}{\partial y}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

de unde se scoate:

$$H_{0x}(x,y) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\frac{n\pi}{b}E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.18}$$

$$H_{0y}(x,y) = -\frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\frac{m\pi}{a}E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.19}$$

Câmpurile fizice (valori instantanee) se obțin prin utilizarea relațiilor complete de forma (1.2.1.); cu scopul de a simplifica scrierea relațiilor se va considera, pentru început, un ghid de undă ideal pentru care $\gamma = +j\beta_g$; pierderile caracterizare prin constanta de atenuare $\alpha_g$, vor fi discutate ulterior; cu aceste precizări se poate scrie

$$\mathscr{E}_z(\vec{r},t) = Re\left[E_{0z}(x,y)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = E_0 \sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\cos(\omega t - \beta_g z) \tag{2.3.20}$$

$$\mathscr{E}_x(\vec{r},t) = Re\left[E_{0x}(x,y)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{\beta_g}{k_\lambda^2}\frac{m\pi}{a}E_0 \cos\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\sin(\omega t - \beta_g z) \tag{2.3.21}$$

$$\mathscr{E}_y(\vec{r},t) = Re\left[E_{0y}(x,y)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{\beta_g}{k_\lambda^2}\frac{n\pi}{b}E_0 \sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\sin(\omega t - \beta_g z) \tag{2.3.22}$$

$$\mathscr{H}_x(\vec{r},t) = Re\left[H_{0x}(x,y)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{-\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\frac{n\pi}{b}E_0\,sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)sin\left(\omega t-\beta_g z\right) \quad (2.3.23)$$

$$\mathscr{H}_y(\vec{r},t) = Re\left[H_{0y}(x,y)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\frac{m\pi}{a}E_0\,cos\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)sin\left(\omega t-\beta_g z\right) \quad (2.3.24)$$

Trebuie subliniat că componentele transversale sunt defazate în timp cu $\pi/2$ față de componenta longitudinală; de acest fapt se ține seama la reprezentarea configurațiilor de câmp.

### 2.3.2 Fenomene de dispersie în ghidurile de undă

Din cele prezentate mai sus reiese că problema determinării configurației câmpului electromagnetic care se propagă în ghid se reduce la găsirea funcțiilor scalare $E_{0z}(x,y)$(mod *TM*) şi $H_{0z}$(mod *TE*, vezi mai jos) şi a constantei $k_\lambda$, care satisfac ecuații Helmholtz omogene de tipul (2.2.40), (2.2.44) şi condițiile la limită Dirichlet şi Neumann. Funcțiile care satisfac această ecuație, precum şi condițiile la limită aferente se numesc *funcții proprii*, iar valorile corespunzătoare ale parametrului $k_\lambda$ se numesc *valori proprii*. Ținând cont de expresiile (2.3.8), (2.3.11) şi (2.3.12) se poate scrie

$$k_\lambda^2 = k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (2.3.25)$$

Prin urmare pentru dimensiuni transversale *a* şi *b* date, configurațiile câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ depind de valorile pe care le pot lua *m* şi *n*. Astfel este uzual ca modurile *TM*, respectiv *TE* să fie notate $TM_{mn}$ (unda $E_{mn}$) şi $TE_{mn}$ (unda $H_{mn}$), unde *m* şi *n* semnifică numărul de *jumătăți de lungimi de undă* ale componentelor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ dispuse pe direcția *x*, respectiv *y*.

Valorile proprii $k_\lambda = k_{mn}$ depind de dimensiunile transversale ale ghidului şi de valorile discrete *m* şi *n*, astfel $k_\lambda$ este numit *număr de undă transversal*; vom observa de asemenea că prin intermediul relației (2.2.36) valorile proprii ale lui $k_\lambda$ definesc *lungimi de undă critice* $\lambda_{cr}$ (sau frecvențe critice $\omega_{cr}$). Frecvența critică (de tăiere) este definită ca frecvența minimă pentru care constanta de propagare în ghid $\gamma$ devine zero; din (2.2.36) avem

$$\gamma^2 = k_\lambda^2 - k^2 = k_\lambda^2 - \omega^2\varepsilon\mu \quad (2.3.26)$$

făcând $\gamma = 0$ se obține $\omega_{cr}$

$$\omega_{cr} = k_\lambda / (\varepsilon\mu)^{1/2} \quad (2.3.27)$$

În funcție de valoarea frecvenței $\omega$ a semnalului aplicat la intrarea ghidului, raportată la $\omega_{cr}$ se disting trei cazuri: a) $\omega < \omega_{cr}$, adică $k < k_\lambda$, pentru care constanta de propagare este o mărime pur reală $\gamma = \alpha$, astfel în ghid vor exista oscilații amortizate; b) $\omega > \omega_{cr}$, adică $k > k_\lambda$, pentru care costata de propagare este o mărime imaginară, $\gamma = j\beta$, iar în ghid au loc fenomene clasice de propagare; c) $\omega = \omega_{cr}$, adică $k = k_\lambda$, care defineşte frecvența critică. În continuare vom considera numai cazurile $\omega > \omega_{cr}$, când în ghid are loc propagarea efectivă a undelor electromagnetice şi ne vom referi la variația cu frecvența a câtorva parametri ce caracterizează propagarea. Trebuie subliniat că ghidurile metalice în general, constituiesc sisteme de propagare ghidată "*cu pierderi*", astfel constanta de propagare este o mărime complexă, având expresia (2.2.16) $\gamma = \alpha_g + j\beta_g$.

**1°. Constanta de fază**. Dacă mediul din interiorul ghidului este caracterizat prin parametrii $\varepsilon_0$ şi $\mu_0$ (se consideră $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$), din (2.3.26) se poate scrie

$$\beta_g = \left(k_0^2 - k_\lambda^2\right)^{1/2} = k_0\left[1 - \left(\omega_{cr}/\omega\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.3.28}$$

Unde $k_0 = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$; se observă că constanta de fază $\beta_g$ variază cu frecvența undei care se propagă în ghid.

**2°. Viteză de fază şi viteză de grup**. Viteza de fază în ghid este definită printr-o relație analogă cu (2.1.9), prin urmare

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{\omega}{k_0\left(1 - \omega_{cr}^2/\omega^2\right)^{1/2}} = \frac{c_0}{\left(1 - \omega_{cr}^2/\omega^2\right)^{1/2}} > c_0 \tag{2.3.29}$$

unde $c_0 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ este viteza de propagare în spațiul liber. Viteza de grup se definește prin expresia

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{d\beta_g} = \frac{1}{d\beta_g / d\omega} = c_0\left(1 - \omega_{cr}^2/\omega^2\right)^{1/2} < c_0 \tag{2.3.30}$$

Astfel se verifică relația clasică $v_{ph}v_{gr} = c_0^2$.

**3°. Lungime de undă.** Pe baza relației de definiție (2.1.10) şi a echivalenței termenilor de propagare $exp(-jk_0z)$şi $exp(-j\beta_0z)$, rezultă $k_0 = \beta_0$, astfel (2.3.28) se poate scrie sub forma

$$\beta_g = \beta_0\left(1 - \omega_{cr}^2/\omega^2\right)^{1/2} \tag{2.3.31}$$

unde $\beta_0 = 2\pi/\lambda_0$, iar $\lambda_0$ este lungimea de undă de spațiu liber. Dacă ținem cont de egalitatea $\beta_g = 2\pi/\lambda_g$, din (2.3.31) obținem expresia lungimii de undă în ghid

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\left(1 - \omega_{cr}^2/\omega^2\right)^{1/2}} \tag{2.3.32}$$

**4°. Impedanța de undă**. Este foarte utilă definirea impedanței de undă în ghidurile metalice pentru cele două moduri de propagare; această mărime este deosebit de importantă pentru adaptarea unor segmente de ghiduri, conversia modurilor şi realizarea diferitelor componente de microunde (cuploare direcționale, sarcini adaptate, cuplaje între ghiduri etc.). Ne referim întâi la expresia (2.2.48) obținută pentru modurile *TE*; făcând produsul vectorial cu $\hat{k}$ al acestei expresii rezultă

$$\vec{H}_{0T}(x,y) = \frac{\gamma}{j\omega\mu}\hat{k} \times \vec{E}_{0T}(x,y) \tag{2.3.33}$$

Comparând ultima expresie cu (2.2.42) obținută pentru modurile *TM*, se observă că ele pot fi scrise sub o formă condensată

$$\vec{H}_{0T} = \frac{1}{\underline{Z}_g}\hat{k} \times \vec{E}_{0T} \tag{3.3.34}$$

unde

$$\underline{Z}_g = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{TM} = \gamma/j\omega\varepsilon = \underline{Z}_{gE} \\ \underline{Z}_{TE} = j\omega\mu/\gamma = \underline{Z}_{gH} \end{vmatrix} \tag{2.3.35}$$

reprezintă impedanța de undă a ghidului pentru modurile specificate. Dependența de frecvență a impedanțelor $\underline{Z}_{TM} = \underline{Z}_{gE}$ şi $\underline{Z}_{TE} = \underline{Z}_{gH}$ poate fi ilustrată uşor pentru un ghid ideal, $\gamma = j\beta_g$; pentru modurile *TM* rezultă

$$\underline{Z}_{gE} = Z_{TM} = \frac{\beta_g}{\omega\varepsilon_0} = Z_0\left(1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \tag{2.3.36}$$

iar pentru modurile *TE* avem

$$\underline{Z}_{gH} = Z_{TE} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_g} = \frac{Z_0}{\left(1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}} \tag{2.3.37}$$

unde $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{-1/2}$ reprezintă impedanța de undă intrinsecă de spațiu liber. Asupra impedanței de undă intrinsecă $Z_0$ sunt necesare precizări suplimentare; dacă în interiorul ghidului există un mediu dielectric având $\underline{\varepsilon}_r \neq 1$, $\underline{\mu}_r \neq 1$ atunci impedanța $Z_0$ devine $\underline{Z} = (\underline{\mu}/\underline{\varepsilon})^{1/2}$.

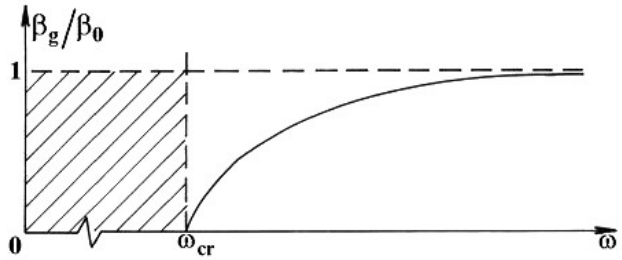



**Fig. 2.3. Variația constantei de fază (normate) în funcție de frecvență; regiunea haşurată este inactivă**

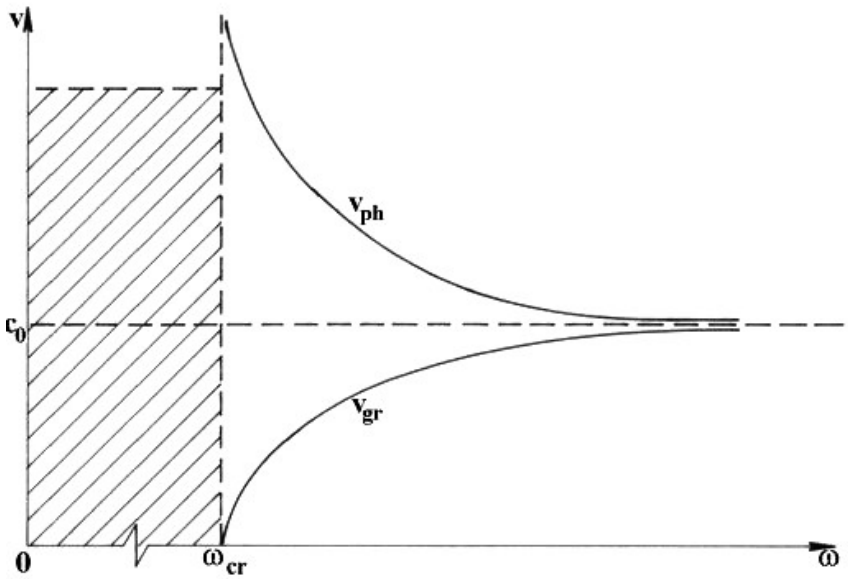



**Fig. 2.4. variația vitezelor de fază şi grup în funcție de frecvență; regiunea haşurată este inactivă**

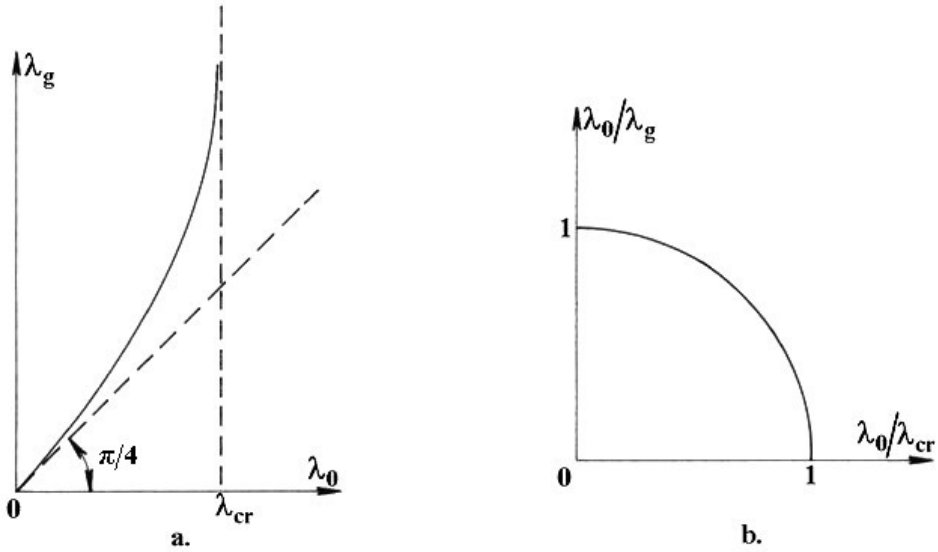



**Fig. 2.5: a – variația lungimii de undă din ghid în funcție de lungimea de undă de spațiu liber;**
**b – variație relativă conform relației (2.3.38)**

Rezultă clar că mărimile $\beta_g$, $v_{ph}$, $v_{gr}$, $\lambda_g$, $Z_{TM}$, $Z_{TE}$ variază cu frecvența undei electromagnetice, prin urmare ghidurile de undă metalice formate dintr-un singur tub (un singur perete metalic închis) constituiesc *sisteme cu dispersie*. Câteva curbe de dispersie utile sunt arătate în figurile 2.3 - 2.6: Fig. 2.3 reprezintă variația constantei de fază normate, în funcție de frecvență; Fig. 2.4 reprezintă variațiile vitezelor $v_{ph}$, $v_{gr}$; în Fig. 2.5 sunt reprezentate variații ale lungimii de undă în funcție de lungimea de undă de spațiu liber; arcul de cerc din Fig. 2.5b rezultă din (2.3.32) pe care o punem sub forma

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{cr}}\right)^2 = 1 \tag{2.3.38}$$

În Fig. 2.6 sunt reprezentate curbele de variație ale impedanțelor de undă $\underline{Z}_{gE}$ şi $\underline{Z}_{gH}$.

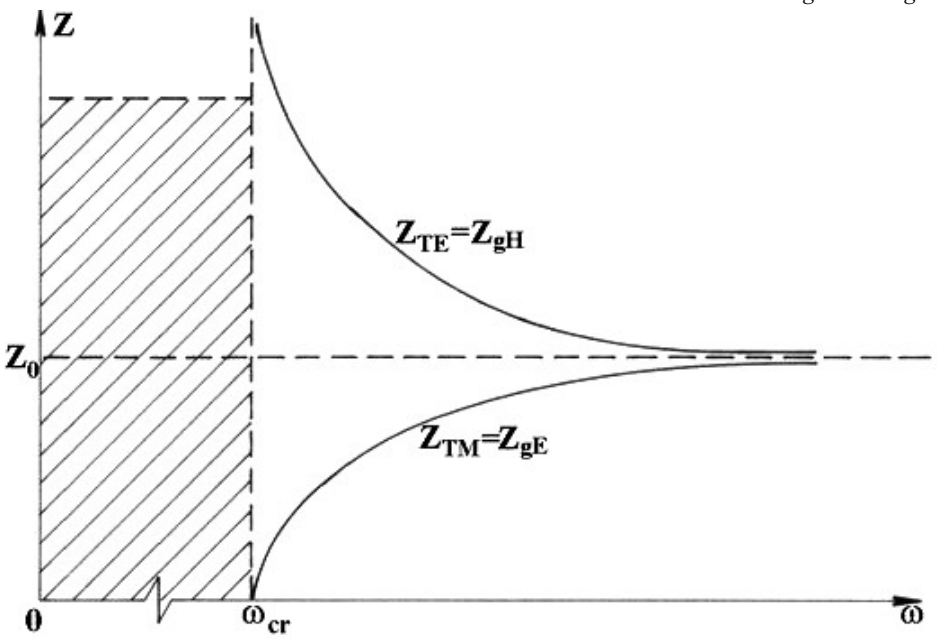



**Fig. 2.6. Variația impedanțelor de undă ale ghidului în funcție de frecvență; regiunea haşurată este inactivă**

În general frecvența critică $\omega_{cr}$ defineşte o *lungime de undă critică* şi reprezintă o valoare maximă a lungimii de undă pentru care în ghidul cu dimensiunile transversale *a* şi *b* date se mai poate propaga câmpul electromagnetic de o anumită configurație. Prin definiție $\lambda_{cr} = 2\pi c_0 / \omega_{cr}$, astfel din (2.3.27) şi (2.3.25) rezultă

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi}{k_\lambda} = \frac{2\pi}{\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{2.3.39}$$

Lungimea de undă critică a modurilor $TM_{mn}$ este maximă pentru valorile *m = 1, n = 1*; valorile *m = 0* sau *n = 0* nu sunt admise deoarece anulează câmpul $E_{0z}(x,y)$(2.3.13) deci şi celelalte componente. Modul cu lungimea de undă critică de valoare maximă se numeşte *mod fundamental (dominant)*; pentru valori *m, n* $\geq 2$ se obțin *moduri superioare*. Trebuie subliniat că, datorită fenomenelor de dispersie descrise mai sus, ghidurile metalice constituite dintr-un tub se comportă ca filtre "*trece sus*".

### 2.3.3 Configuraţii particulare de moduri $TM_{mn}$ (unde $E_{mn}$)

Vom observa mai întâi că, în urma precizărilor făcute cu privire la mărimile $\lambda_g$, $\lambda_{cr}$, $Z_{gE}$, $Z_{gH}$, expresiile (2.3.20)-(2.3.24) pot fi scrise

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_z(\vec{r},t) &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\cos(\omega t-\beta_g z)\\
\mathscr{E}_x(\vec{r},t) &= E_{x0}\cos\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\sin(\omega t-\beta_g z)\\
\mathscr{E}_y(\vec{r},t) &= E_{y0}\sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\sin(\omega t-\beta_g z)\\
\mathscr{H}_x(\vec{r},t) &= H_{x0}\sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\sin(\omega t-\beta_g z)\\
\mathscr{H}_y(\vec{r},t) &= H_{y0}\cos\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)\sin(\omega t-\beta_g z)
\end{aligned} \qquad (2.3.40)$$

în care au fost introduse notaţiile:

$$\begin{aligned}
E_{x0} &= \frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_g}\frac{mE_0}{2a};\quad E_{y0} = \frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_g}\frac{nE_0}{2b};\\
H_{x0} &= -\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_0 Z_0}\frac{nE_0}{2b};\quad H_{y0} = \frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_0 Z_0}\frac{mE_0}{2a}
\end{aligned} \qquad (2.3.41)$$

Se observă că componentele transversale sunt defazate în timp cu $\pi/2$ faţă de componenta longitudinală.

*Modul fundamental (dominant) $TM_{11}$ (undă $E_{11}$)*

*a) Configuraţii de câmp*. Expresiile componentelor de câmp $E$ şi $H$ se obţin din (2.3.40) făcând $m = 1$, $n = 1$. Configuraţiile liniilor de câmp electric şi magnetic se determină pentru un moment fixat de timp, care pentru simplitate se va lua $t = 0$; astfel expresiile componentelor de câmp sunt

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_z(\vec{r},t)\big|_{t=0} &= E_z(\vec{r}) = E_0\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\beta_g z)\\
\mathscr{E}_x(\vec{r},t)\big|_{t=0} &= E_x(\vec{r}) = E_{x0}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin(-\beta_g z)\\
\mathscr{E}_y(\vec{r},t)\big|_{t=0} &= E_y(\vec{r}) = E_{y0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin(-\beta_g z)\\
\mathscr{H}_x(\vec{r},t)\big|_{t=0} &= H_x(\vec{r}) = H_{x0}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin(-\beta_g z)\\
\mathscr{H}_y(\vec{r},t)\big|_{t=0} &= H_y(\vec{r}) = H_{y0}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin(-\beta_g z)
\end{aligned} \qquad (2.3.42)$$

Ţinând cont de (2.3.39) rezultă că pentru acest mod avem $\lambda_{cr\,max} = \lambda_{11E} = 2ab\big/\left(a^2+b^2\right)^{1/2}$. Configuraţia liniilor de câmp $E$ şi $H$, determinată de relaţiile (2.3.42) este arătată în Fig. 2.7 prin secţionări ale ghidului pe planurile *(x,y), (x,z), (y,z);* din Fig. 2.7 b, *c* se observă că o configuraţie dată se propagă în lungul axei $z$, având lungimea de undă $\lambda_g$ definită de (2.3.32). Deosebit de

relevante sunt curbele care reprezintă variațiile amplitudinilor câmpurilor pe direcțiile *x, y, z* (Fig. 2.8); în cazul variațiilor după *z* trebuie fixată o origine $z_0$ şi se va observa că maximele tuturor componentelor transversale survin la aceeaşi valoare a lui *z*, în timp ce componenta longitudinală $\mathscr{E}_{0z}$ are maximul defazat cu $\pi/2$.

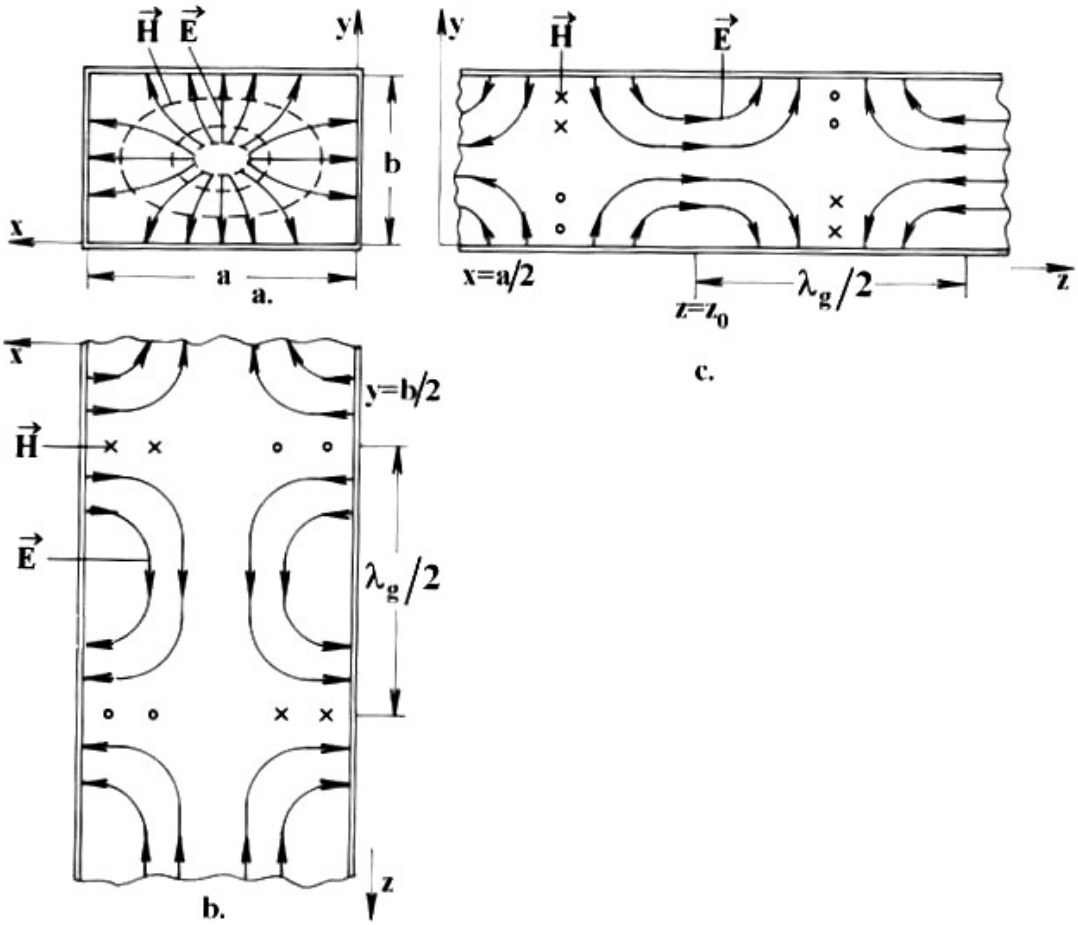



**Fig. 2.7. Configurația liniilor de câmp electric şi magnetic pentru modul dominant $TM_{11}$: a – secțiune transversală (x,z); b – secțiune longitudinală (x,z); secțiune longitudinală (y,z)**

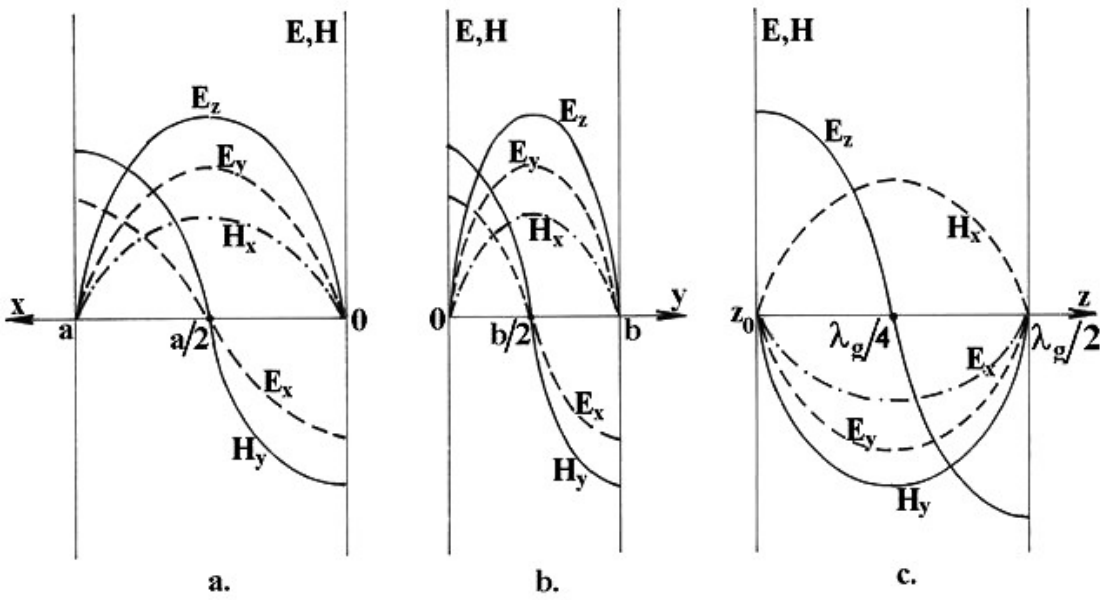



**Fig. 2.8. Variațiile amplitudinilor diferitelor componente ale câmpurilor pentru modul dominant $TM_{11}$: a – după axa x; b – după axa y; c – după direcția de propagare z**

*b) Distribuţii de curenţi* La rezolvarea unor probleme concrete referitoare la excitarea ghidurilor, calculul puterii transmise şi al pierderilor, cuplajul dintre ghiduri şi cavităţi rezonante etc., este necesară cunoaşterea distribuţiei curenţilor în ghid . Se deosebesc două tipuri de curenţi: curenţi de deplasare datoraţi componentelor electrice şi curenţi de conducţie pe pereţii metalici datoraţi componentelor magnetice.

*b1) Curenţi de deplasare*, definiţi prin relaţia generală

$$\vec{J}_d = \varepsilon_0 \left.\frac{\partial \vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} \tag{2.3.43}$$

În cazul modulului $TM_{11}$ câmpul electric are componente pe toate cele trei direcţii, prin urmare şi curenţii de deplasare vor avea componente pe cele trei direcţii. Referindu-ne la expresiile (2.3.40) avem

$$\vec{J}_{dz} = \hat{k}\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \mathscr{E}_z(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{k}\omega\varepsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin(\beta_g z) \tag{2.3.44}$$

$$\vec{J}_{dx} = \hat{i}\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \mathscr{E}_x(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{i}\omega\varepsilon_0 \frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g}\frac{E_0}{2a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\beta_g z) \tag{2.3.45}$$

$$\vec{J}_{dy} = \hat{j}\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \mathscr{E}_y(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{j}\omega\varepsilon_0 \frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g}\frac{E_0}{2b}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\beta_g z) \tag{2.3.46}$$

Curenţii de deplasare au acelaşi sens cu componentele de câmp electric care le generează, însă sunt defazaţi în timp cu $\pi/2$ faţă de aceste componente.

*b2) Curenţii de conducţie* sunt datoraţi densităţilor de curent de suprafaţă $\vec{J}_{sf}$, care la rândul lor sunt produşi de componentele de câmp magnetic, definiţi prin relaţia generală

$$\vec{\mathscr{J}}_{sf} = \hat{n} \times \vec{\mathscr{H}}_1(\vec{r},t) \tag{2.3.47}$$

şi care derivă din condiţiile la limită de „*peretele electric*" (1.3.56); termenul drept din (2.3.47) are semnificaţia unei componente tangenţiale a câmpului magnetic din mediul 1 (aer) în imediata vecinătate cu peretele metalic; $\vec{\mathscr{J}}_{sf}$ are dimensiunea [*A/m*].

Ne referim întâi la pereţii verticali unde $\vec{J}_{sf}$ vor fi produşi numai de componentele $\mathscr{H}_y$ (Fig. 2.7). Pe peretele $x = 0$ avem $\hat{n} = \hat{i},\ \cos(\pi x/a) = 1$, astfel

$$\vec{J}_{c0y} = \hat{i} \times \hat{j}\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{k}\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_0 Z_0}\frac{E_0}{2a}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\sin(\beta_g z) \tag{2.3.48}$$

În mod similar, pe peretele $x = a$ avem $\hat{n} = -\hat{i},\ \cos(\pi x/a) = -1$, astfel rezultă $\vec{J}_{cay} = \vec{J}_{c0y}$.

Pe pereţii orizontali curenţii $\vec{J}_{sf}$ sunt produşi numai de componentele $\mathscr{H}_x$; pe peretele $y = 0$ avem $\hat{n} = \hat{j},\ \cos(\pi y/b) = 1$, deci curentul de conducţie este

$$\vec{J}_{cx0} = \hat{j} \times \hat{i}\mathscr{H}_x(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{k}\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_0 Z_0}\frac{E_0}{2b}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\beta_g z) \tag{2.3.49}$$

În mod similar pe peretele $y = b$ avem $\hat{n} = -\hat{j},\ \cos(\pi y/b) = -1$, astfel rezultă $\vec{J}_{cxb} = \vec{J}_{cx0}$.

Distribuţia curenţilor pentru modul $TM_{11}$ este arătată, simplificat, în Fig. 2.9.

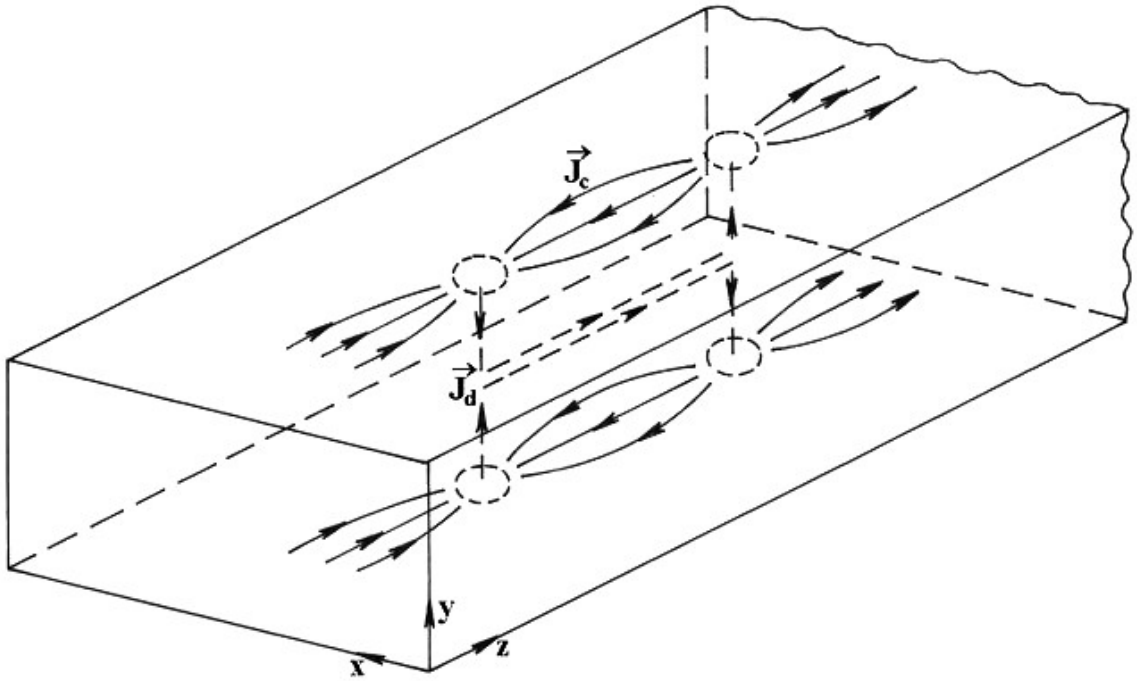



**Fig. 2.9. Schiță privind distribuția curenților pentru modul $TM_{11}$;**
**sunt indicate numai componentele $J_{dz}$ şi $J_{dy}$, precum şi curenții de conducție pe pereții orizontali**

Alte configurații de câmp, pentru *moduri superioare*, pot fi găsite în lucrările [1], [5], [6], [8]; ca exemplu în Fig. 2.10 este arătată configurația de câmp pentru modul $TM_{21}$.

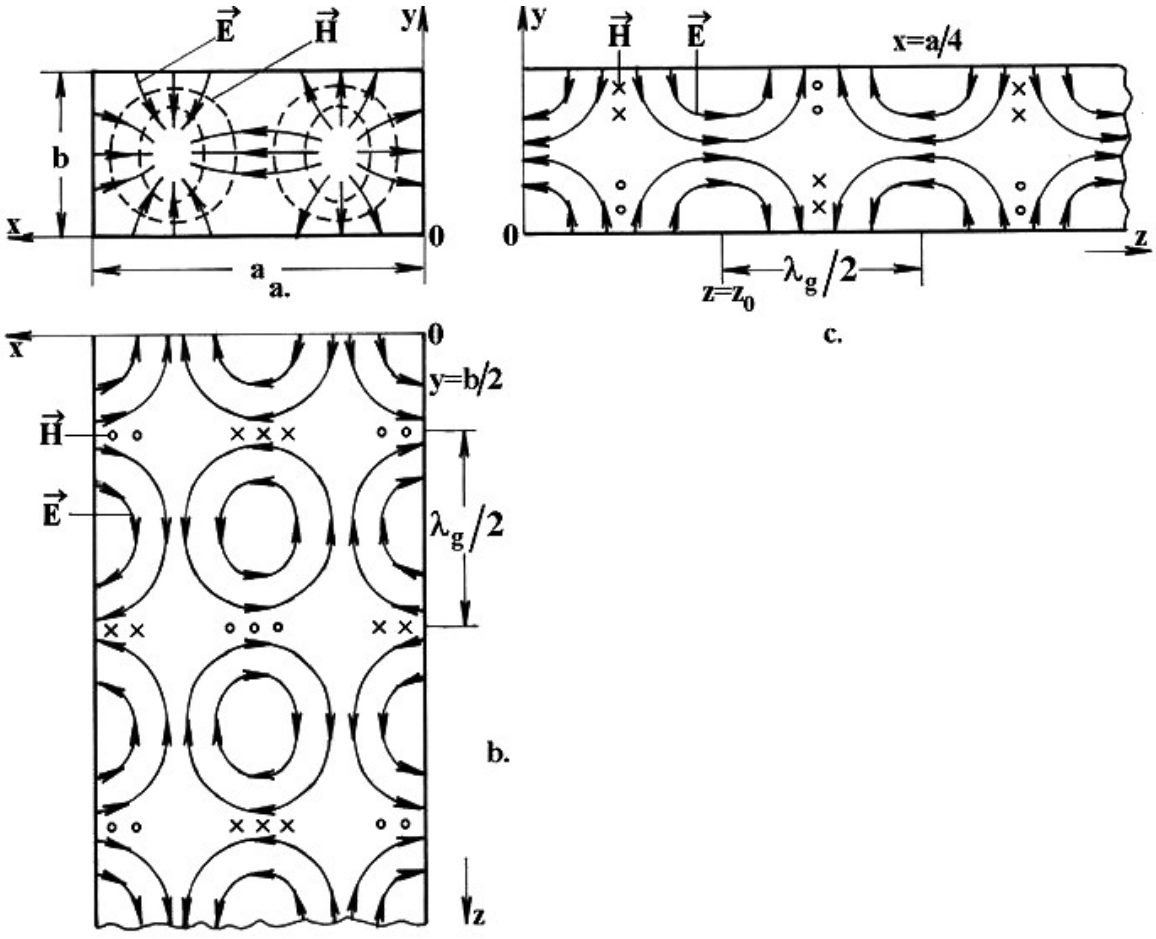



**Fig. 2. 10. Configurații de câmp pentru modul $TM_{21}$:**
**a – secțiune transversală (x,z); b – secțiune longitudinală (x,z); secțiune longitudinală (y,z)**

### 2.3.4. Moduri transversal – electrice *TE* (unde *H*). Expresii generale ale componentelor de câmp.

Se pleacă de la ecuația Helmholtz scalară pentru componenta $H_{0z}(x,y)$

$$\left[\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right] H_{0z}(x,y) = 0 \tag{2.3.50}$$

cu condiții la limită de tip Neumann (2.2.47), pe care le scriem detaliat pentru cei patru pereți:

- pereți verticali

$$\begin{aligned} \hat{i}\cdot\nabla_T H_{0z}(0,y) &= \left.\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \\ -\hat{i}\cdot\nabla_T H_{0z}(a,y) &= -\left.\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 \end{aligned} \tag{2.3.51}$$

- pereți orizontali

$$\begin{aligned} \hat{j}\cdot\nabla_T H_{0z}(x,0) &= \left.\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \\ -\hat{j}\cdot\nabla_T H_{0z}(x,b) &= -\left.\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 \end{aligned} \tag{2.3.52}$$

Pentru rezolvarea ecuației de propagare (2.3.50) se utilizează, de asemenea, metoda separării variabilelor

$$H_{0z}(x,y) = X(x)Y(y). \tag{2.3.53}$$

În continuare se procedează similar ca la modul *TM*, obținându-se soluții de forma

$$X(x) = C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x \tag{2.3.54}$$

$$Y(y) = D_1 \sin k_y y + D_2 \cos k_y y \tag{2.3.55}$$

unde $k_x$ şi $k_y$ sunt numere de undă parțiale; valorile acestor numere, precum şi constantele de integrare se determină prin utilizarea condițiilor la limită Neumann. Referindu-ne la soluția (2.3.54) se vor utiliza condițiile la limită (2.3.51); facem derivata lui *X(x)*

$$\frac{dX(x)}{dx} = C_1 k_x \cos k_x x - C_2 k_x \sin k_x x \tag{2.3.56}$$

Din condiția $(dX/dx)_{x=0} = 0$ rezultă $C_1 = 0$; din condiția $(dX/dx)_{x=a} = 0$ rezultă

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad m = 0,1,2,3,.... \tag{2.3.57}$$

procedând similar, pentru soluția (2.3.55) se obține $D_1 = 0$ şi:

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 0,1,2,3,.... \tag{2.3.58}$$

Componenta longitudinală a câmpului magnetic are expresia

$$H_{0z}(x,y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.59}$$

unde $H_0 = C_2 D_2$ este o constantă dependentă de puterea care se propagă în ghid şi tipul modului de propagare. Se observă că *m* şi *n* nu pot lua concomitent valoarea zero, deoarece în acest caz $H_{0z}$ devine constant.

Componentele transversale ale modurilor *TE* se determină prin utilizarea relațiilor (2.2.48) şi (2.2.49). Pornind de la (2.2.49) se poate scrie

$$\vec{H}_{0T}(x,y)=\hat{i}H_{0x}(x,y)+\hat{j}H_{0y}(x,y)=-\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\left[\hat{i}\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial y}\right] \tag{2.3.60}$$

de unde rezultă

$$H_{0x}(x,y)=-\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\frac{m\pi}{a}H_0\,sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.61}$$

$$H_{0y}(x,y)=\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\frac{n\pi}{b}H_0\,cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.62}$$

Pornind de la (2.2.48) şi ținând cont de (2.3.60) obținem

$$\vec{E}_{0T}(x,y)=\hat{i}E_{0x}(x,y)+\hat{j}E_{0y}(x,y)=\frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda^2}\hat{k}\times\left(\hat{i}\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial y}\right) \tag{2.3.63}$$

de unde rezultă

$$E_{0x}(x,y)=\frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda^2}\frac{n\pi}{b}H_0\,cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.64}$$

$$E_{0y}(x,y)=-\frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda^2}\frac{m\pi}{a}H_0\,sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.3.65}$$

Câmpurile fizice (valori instantanee) se obțin prin utilizarea relațiilor complete de forma (1.2.1); pentru $\mathscr{H}_z(x,y)$ se scrie

$$\mathscr{H}_z(\vec{r},t)=Re\left[H_{0z}(x,y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}\right] \tag{2.3.66}$$

Considerând ghidul ideal ($\gamma=j\beta_g$) avem

$$\mathscr{H}_z(\vec{r},t)=H_0\,cos\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)cos\left(\omega t-\beta_g z\right) \tag{2.3.67}$$

$$\mathscr{H}_x(\vec{r},t)=-\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_g}\frac{m\pi}{a}H_0\,sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)sin\left(\omega t-\beta_g z\right) \tag{2.3.68}$$

$$\mathscr{H}_y(\vec{r},t)=-\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_g}\frac{n\pi}{b}H_0\,cos\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)sin\left(\omega t-\beta_g z\right) \tag{2.3.69}$$

$$\mathscr{E}_x(\vec{r},t)=-\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_0}\frac{n}{2b}Z_0H_0\,cos\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)sin\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)sin\left(\omega t-\beta_g z\right) \tag{2.3.70}$$

$$\mathscr{E}_y(\vec{r},t)=\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_0}\frac{m}{2a}Z_0H_0\,sin\left(\frac{m\pi\pi}{a}\right)cos\left(\frac{n\pi\pi}{b}\right)sin\left(\omega t-\beta_g z\right) \tag{2.3.71}$$

Din aceste relații rezultă că toate componentele transversale sunt defazate cu π/2 față de componenta longitudinală.

## 2.3.5. Configurații particulare de moduri $TE_{mn}$ (unde $H_{mn}$).

*Modul fundamental (dominant)* $TE_{10}$ *(unda* $H_{10}$*)*

*a) Configurații de câmp*. Din relația (2.3.39) se observă că lungimea de undă critică ia valoarea maximă pentru valorile $m = 1$, $n = 0$ ( $\lambda_{cr\,max} = 2a$ ); introducând aceste valori în relațiile (2.3.67) – (2.3.71), şi considerând momentul de timp $t = 0$, se obține

$$\mathscr{H}_z(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_z(\vec{r}) = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\beta_g z) \tag{2.3.72}$$

$$\mathscr{H}_x(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_x(\vec{r}) = -\frac{\lambda_{cr}}{\lambda_g} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(-\beta_g z) \tag{2.3.73}$$

$$\mathscr{E}_y(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_y(\vec{r}) = +\frac{\lambda_{cr}}{\lambda_0} Z_0 H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(-\beta_g z) \tag{2.3.74}$$

iar celelalte componente se anulează ( $\mathscr{E}_z = 0$, $\mathscr{E}_x = 0$, $\mathscr{H}_y = 0$ ).

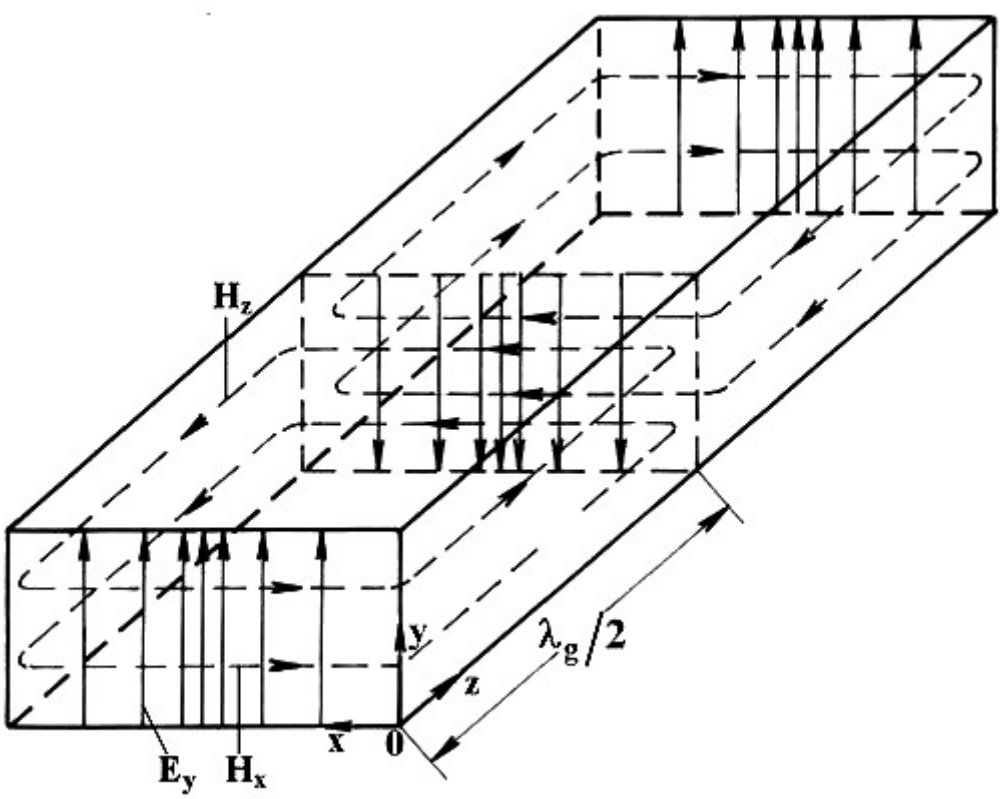



**Fig. 2.11. Modul dominant $TE_{10}$; configurația liniilor de câmp, vedere în perspectivă**

Ca urmare a faptului ca avem numai trei componente de câmp este posibilă şi o reprezentare în perspectivă a configurației, aşa cum se arată în Fig. 2.11. Configurațiile liniilor de câmp *E* şi *H* prin secționări pe planurile *(x,y)*, *(x,z)* şi *(y,z)* sunt arătate în Fig. 2.12. Variațiile amplitudinilor pe direcțiile *x* şi *z* sunt arătate în Fig. 2.13; pe direcția *y* amplitudinile rămân constante deoarece $n = 0$.

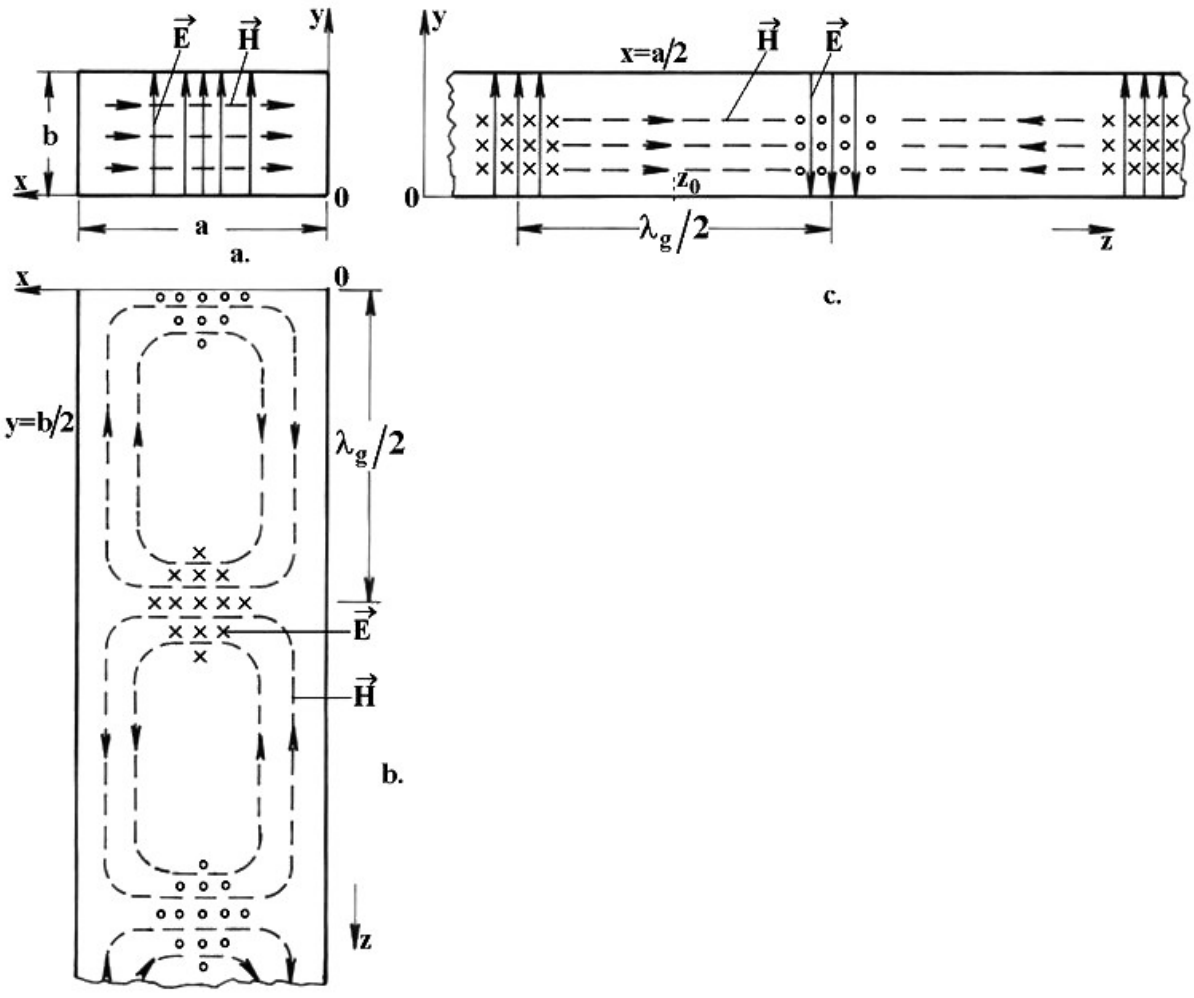



**Fig. 2.12.** **Configurația liniilor de câmp electric şi magnetic pentru modul dominant $TE_{10}$: a – secțiune transversală (x,z); b – secțiune longitudinală (x,z); secțiune longitudinală (y,z)**

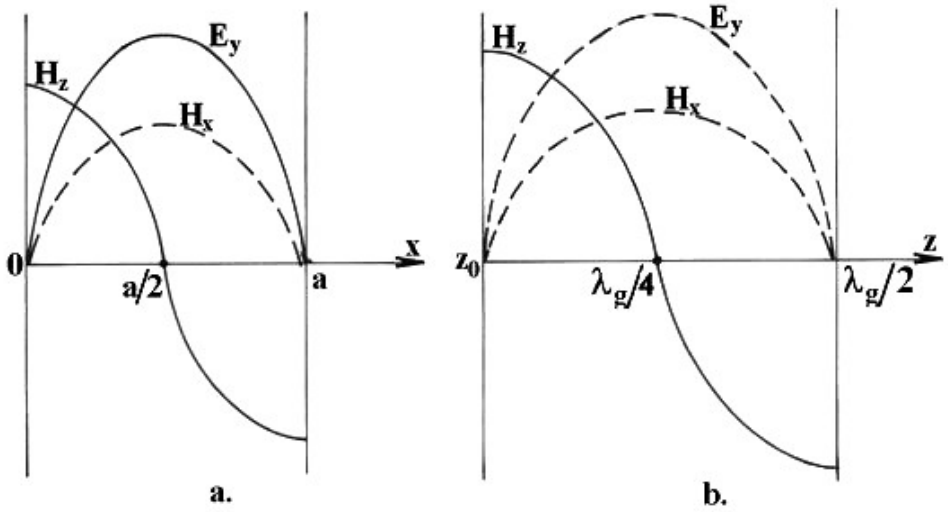



**Fig. 2.13.** **Variațiile amplitudinilor diferitelor componente ale câmpurilor pentru modul dominant $TE_{10}$: a – după axa x; b – după direcția de propagare z**

*b) Distribuții de curenți.*

*Curentul de deplasare* are componentă numai pe direcția *y*; ținând cont de (2.3.71) avem

$$\vec{J}_{dy} = \hat{j}\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \mathscr{E}_y(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{j}\omega\varepsilon_0 \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_0} Z_0 H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\beta_g z\right) \qquad (2.3.75)$$

de unde se constată că acest curent are acelaşi sens cu componenta $\mathscr{E}_y$ care l-a generat, dar este defazat în timp cu $\pi/2$.

*Curenți de conducție*. Aceşti curenți sunt determinați de componentele de câmp magnetic, conform relației (2.3.47).

Pe pereții verticali curenții $\vec{J}_{sf}$ sunt produşi numai de componenta $\mathscr{H}_z$ (2.3.72); pe peretele $x = 0$ avem $\hat{n} = \hat{i}$ şi $cos(\pi x/a) = 1$, deci

$$\vec{J}_{c0z} = \hat{i} \times \hat{k} \mathscr{H}_z(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{j} H_0 \cos(\beta_g z); \tag{2.3.76}$$

pe peretele x = a avem $\hat{n} = -\hat{i}$ şi $cos(\pi x/a) = -1$, prin urmare $\vec{J}_{caz} = \vec{J}_{c0z}$.

Pe pereții orizontali curenții $\vec{J}_{sf}$ sunt produşi de ambele componente $\mathscr{H}_x$ şi $\mathscr{H}_z$; pe peretele $y = 0$ avem $\hat{n} = \hat{j}$, astfel se obține

$$\vec{J}_{c0z} = \hat{j} \times \hat{k} \mathscr{H}_z(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \hat{i} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\beta_g z) \tag{2.3.77}$$

$$\vec{J}_{c0x} = \hat{j} \times \hat{i} \mathscr{H}_x(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{k} \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_g} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\beta_g z) \tag{2.3.78}$$

pe peretele $y = b$ avem $\hat{n} = -\hat{j}$, astfel se obține:

$$\vec{J}_{cbz} = -\hat{j} \times \hat{k} \mathscr{H}_z(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{i} H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\beta_g z) \tag{2.3.79}$$

$$\vec{J}_{cbx} = -\hat{j} \times \hat{i} \mathscr{H}_x(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \hat{k} \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_g} H_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin(\beta_g z) \tag{2.3.80}$$

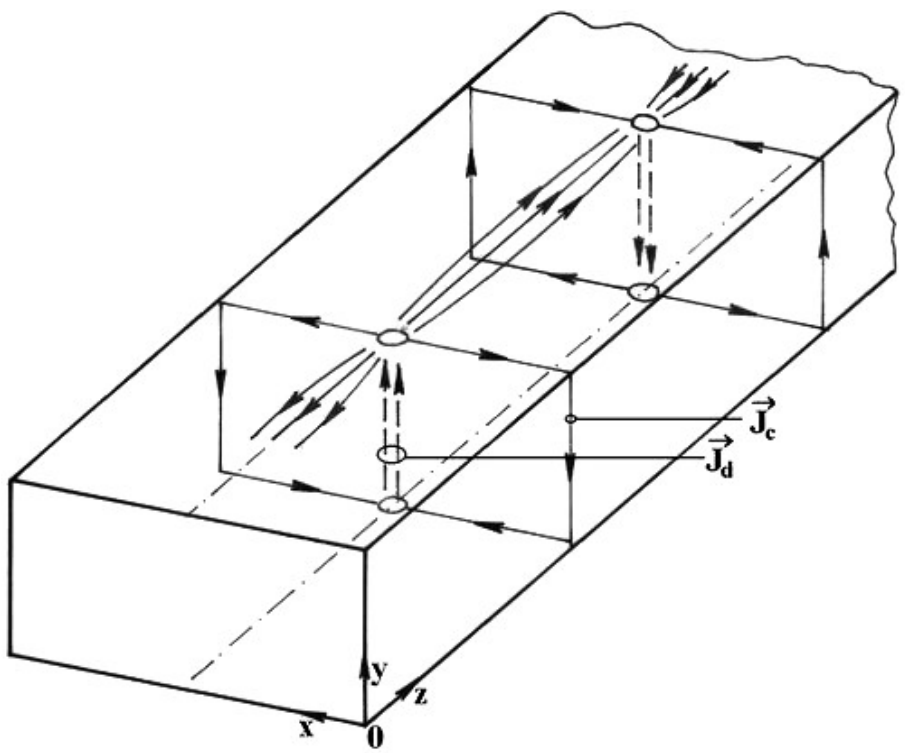



**Fig. 2.14. Distribuția curenților $\vec{J}_d$ şi $\vec{J}_c$ pentru modul $TE_{10}$ în ghidul dreptunghiular**

Distribuțiile curenților $\vec{J}_d$ şi $\vec{J}_c$ sunt arătate în Fig. 2.14. Trebuie subliniat că modul fundamental $TE_{10}$ este foarte des utilizat în practică din mai multe motive: lungimea de undă critică $\lambda_{10}$ este mai mare decât lungimea de undă critică $\lambda_{11}$ a modului fundamental $TM_{11}$ ($2a > 2ab/\left(a^2+b^2\right)^{1/2}$); este un mod stabil şi poate fi uşor excitat; are pierderile cele mai mici; permite transportul unei puteri reale maxime.

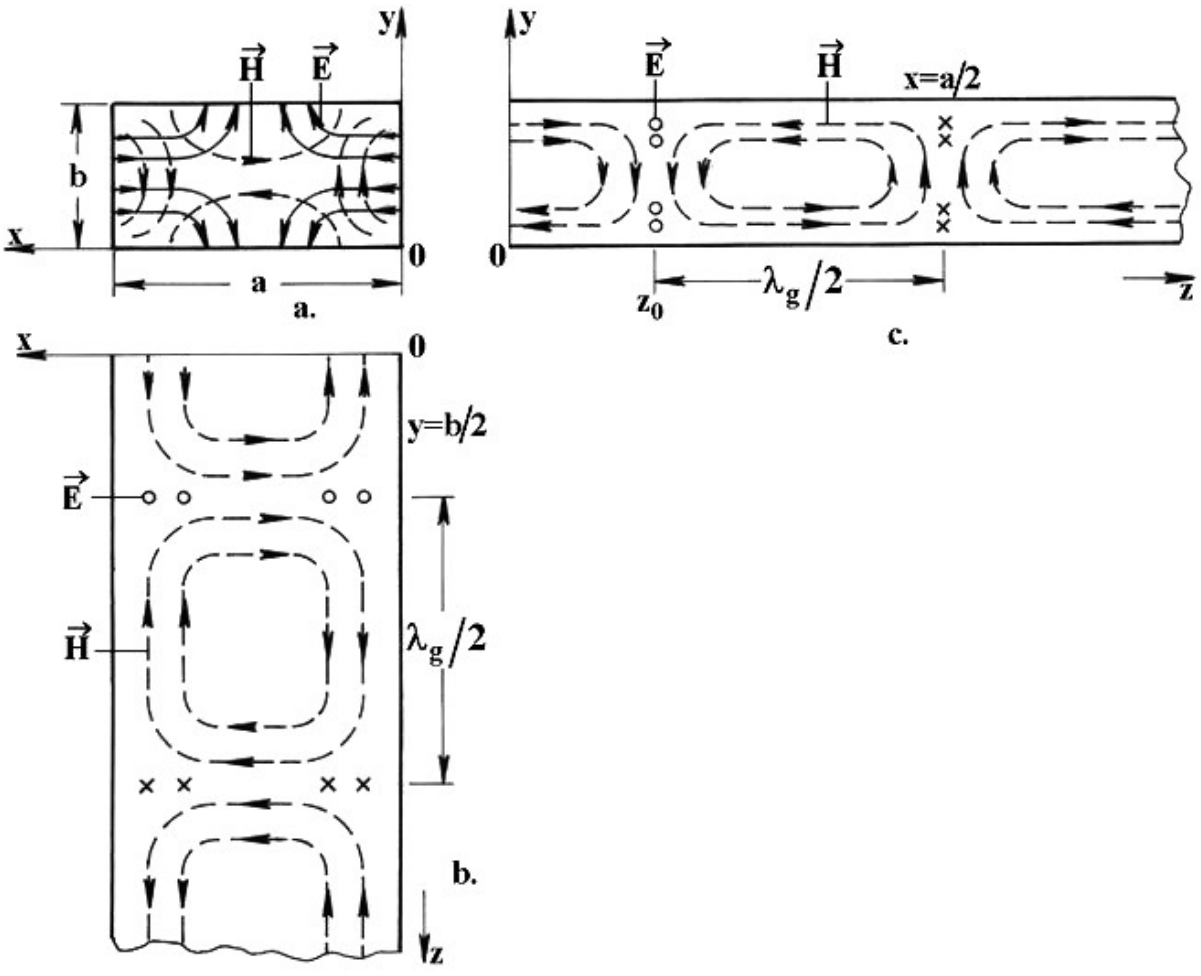



**Fig. 2.15.** **Configurația liniilor de câmp electric şi magnetic pentru modul $TE_{11}$:**
**a – secțiune transversală (x,z); b – secțiune longitudinală (x,z); secțiune longitudinală (y,z)**

Şi în cazul modului *TE* pot fi utilizate *moduri superioare*, având $m \geq 1$, n $\geq 1$; o anumită răspândire o are modul $TE_{11}$ a cărui configurație de câmp este arătată în Fig. 2.15.

## 2.4. GHIDURI DE UNDĂ METALICE DE SECȚINE CIRCULARĂ

### 2.4.1. Moduri transversal – electrice ($TE_{nm}$) în ghidul cilindric

Ca urmare a formei circulare a structurii de propagare, este convenabilă utilizarea coordonatelor cilindrice $(\rho,\phi,z)$ şi a sistemului de versori ($\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{k}$). Structura supusă analizei este arătată în Fig. 2.16; se observă că versorii ($\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{k}$) formează un triedru drept, având versorul $\hat{k}$ orientat în sensul pozitiv al direcției de propagare *z*.

Pentru modurile *TE* ecuația de propagare Helmholtz scalară are expresia

$$\left[\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right] H_{0z}(\rho,\phi) = 0 \qquad (2.4.1)$$

iar condițiile la limită sunt de tip Neumann, care pentru structura din Fig. 2.16 se scriu:

$$\hat{n}\cdot\nabla_T H_{0z}(\rho,\phi)\big|_S = \left.\frac{\partial H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = 0 \tag{2.4.2}$$

Se va vedea mai jos că există mai multe modalități de a lua în considerare condițiile la limită, la diferite etape de căutare a soluțiilor.

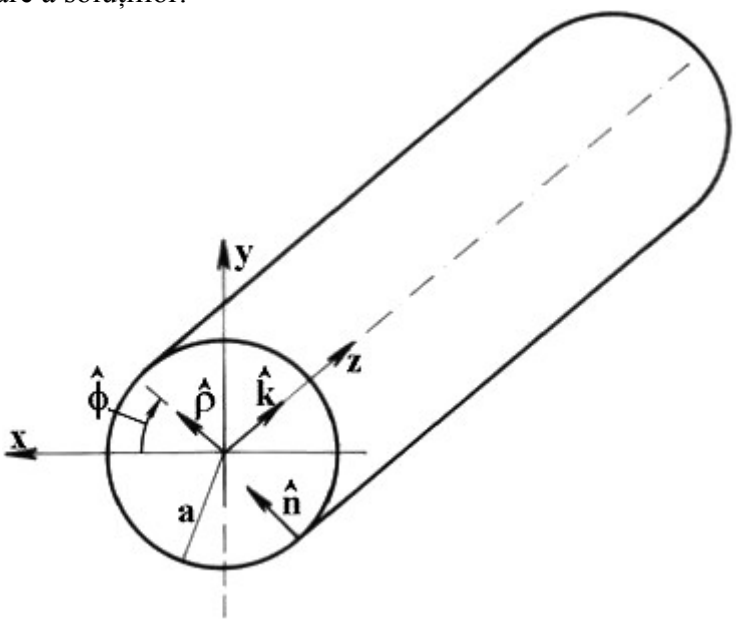



**Fig. 2.16. Ghid metalic de secțiune circulară**

În cazul coordonatelor cilindrice operatorii transversali $\nabla_T$ şi $\nabla_T^2$ au expresiile

$$\nabla_T = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{2.4.3}$$

$$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}; \tag{2.4.4}$$

între sistemele de versori ( $\hat{\rho},\hat{\phi},\hat{k}$ ) şi cel cartesian ( $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ ) există relațiile (AI, (I.38))

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \hat{i}\cos + \hat{j}\sin\phi\\ \hat{\phi} &= -\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\cos\phi\\ \hat{k} &= \hat{k}\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Ecuația de propagare (2.4.1) ia forma

$$\frac{\partial^2 H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial\phi^2} + k_\lambda^2 H_{0z}(\rho,\phi) = 0 \tag{2.4.6}$$

unde $k_\lambda$ are semnificația unui număr de undă transversal. Pentru rezolvare se aplică metoda separării variabilelor

$$H_{0z}(\rho,\phi) = R(\rho)\Psi(\phi) \tag{2.4.7}$$

astfel (2.4.6) devine

$$\frac{\rho^2}{R}\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{\rho}{R}\frac{dR}{d\rho} + \frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} + k_\lambda^2\rho^2 = 0 \tag{2.4.8}$$

care poate fi separată în două ecuații diferențiale de ordin doi independente, după cum urmează:

$$\frac{d^2\Psi}{d\phi^2} + k_\phi^2 \Psi = 0 \tag{2.4.9}$$

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + \left(k_\lambda^2 \rho^2 - k_\phi^2\right)R = 0 \tag{2.4.10}$$

Soluția generală a ecuației (2.4.9) este de forma

$$\Psi(\phi) = A_1 \cos k_\phi \phi + A_2 \sin k_\phi \phi \tag{2.4.11}$$

În legătură cu această formă a soluției sunt necesare câteva precizări: în structurile circulare câmpul este o funcție periodică de $\phi$, adică $H_{0z}(\rho,\phi) = H_{0z}(\rho,\phi + 2\pi)$, astfel $k_\phi$ trebuie să fie un număr întreg notat de regulă $k_\phi = n$; fiecare din cei doi termeni ai relației (2.4.11) constituie soluții independente, astfel încât $\cos n\phi$ cât şi $\sin n\phi$ sunt soluții valide; sub formă generală se operează cu combinația liniară a celor doi termeni care se scrie condensat

$$\Psi(\phi) = \Psi_0 \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (n\phi) \tag{2.4.12}$$

Adesea pentru simplitate, se ia un singur termen, fapt ce este posibil prin rotirea adecvată a axelor de coordonate; în lucrarea de față se va considera o soluție de forma

$$\Psi(\phi) = \Psi_0 \cos n\phi \tag{2.4.11}$$

unde $\Psi_0$ este o constantă care depinde de puterea excitată în ghid şi de tipul modului de propagare.

Ecuația (2.4.10) este o ecuație diferențială de ordin doi de tip Bessel (AII, (II.2.1)); având în vedere condiția $k_\phi = n$, această ecuație poate fi scrisă

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(k_\lambda^2 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)R = 0 \tag{2.4.14}$$

care are soluția de forma

$$R(\rho) = B_1 J_n(k_\lambda \rho) + B_2 N_n(k_\lambda \rho) \tag{2.4.15}$$

unde : $J_n(k_\lambda \rho)$ reprezintă funcția Bessel cilindrică de speța întâia şi ordin *n*; $N_n(k_\lambda \rho)$ este funcția Bessel cilindrică de speța a doua şi ordin *n*. Adesea funcția $N_n(k_\lambda \rho)$ este numită şi funcția Neumann; particularitatea acestei funcții constă în faptul că $N_n(k_\lambda \rho)$ tinde la infinit pentru $\rho = 0$; în cazul studiat acest fapt constituie o violare a principiului fizic conform căruia câmpul electromagnetic are o valoare finită în orice punct din interiorul ghidului, astfel se va considera $B_2 = 0$.

Expresia componentei longitudinale a câmpului magnetic este

$$H_{0z}(\rho,\phi) = H_0 J_n(k_\lambda \rho) \cos n\phi \tag{2.4.16}$$

unde $H_0 = \Psi_0 B_1$ este o constantă determinată de condițiile de excitare a modurilor *TE* în ghidul cilindric.

Componentele transversale ale câmpurilor *E* şi *H* se determină prin utilizarea relațiilor (2.2.48) şi (2.2.49). În cazul componentelor transversale ale câmpului magnetic se utilizează relația (2.2.49)

$$\vec{H}_{0T}(\rho,\phi) = \hat{\rho} H_{0\rho}(\rho,\phi) + \hat{\phi} H_{0\phi}(\rho,\phi) = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\left[\hat{\rho}\frac{\partial H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial \phi}\right] \tag{2.3.17}$$

din care rezultă

$$H_{0\rho}(\rho,\phi) = -\frac{\gamma}{k_\lambda} H_0 J_n'(k_\lambda \rho)\cos n\phi \tag{2.4.18}$$

$$H_{0\phi}(\rho,\phi) = \frac{\gamma}{k_\lambda^2} n H_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \tag{2.4.19}$$

unde $J_n'(k_\lambda \rho)$ este derivata funcției Bessel $J_n(k_\lambda \rho)$ în raport cu argumentul. Componentele câmpului electric se obțin prin utilizarea relației (2.2.48)

$$\vec{E}_{0T}(\rho,\phi) = \hat{\rho} E_{0\rho}(\rho,\phi) + \hat{\phi} E_{0\phi}(\rho,\phi) = \frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times\left(\hat{\rho}\frac{\partial H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_{0z}(\rho,\phi)}{\partial\phi}\right)\right] \tag{2.4.20}$$

de unde rezultă

$$E_{0\rho}(\rho,\phi) = \frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda^2 \rho} n H_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \tag{2.4.21}$$

$$E_{0\phi}(\rho,\phi) = \frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda} H_0 J_n'(k_\lambda \rho)\cos n\phi \tag{2.4.22}$$

Referindu-ne la condiția la limită Neumann (2.4.2) se poate observa că termenul $[\partial H_{0z}(\rho,\phi)/\partial\rho]$ intră în expresiile componentelor $H_{0\rho}(\rho,\phi)$ şi $E_{0\phi}(\rho,\phi)$; este convenabilă utilizarea componentei $E_{0\phi}(\rho,\phi)$, care are relevanță fizică imediată

$$E_{0\phi}(\rho,\phi)\big|_{\rho=a} = 0 \tag{2.4.23}$$

Din (2.4.2) rezultă:

$$J_n'(k_\lambda a) = 0 \tag{2.4.24}$$

care determină un număr infinit de valori proprii $k_\lambda$. Notăm rădăcinile acestei ecuații prin $\rho'_{nm} = k_\lambda a$, unde $\rho'_{nm}$ reprezintă rădăcina de ordin *m* a derivatei funcției Bessel de ordin *n*. Valorile proprii ale numărului de undă transversal sunt

$$k_\lambda = k_{nm} = \frac{\rho'_{nm}}{a} = \frac{2\pi}{\lambda_{cr}} \tag{2.4.25}$$

de unde rezultă lungimea de undă critică şi frecvența critică

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi a}{\rho'_{nm} a}, \quad \omega_{cr} = \frac{c_0 \rho'_{nm}}{a} \tag{2.4.26}$$

Rădăcinile funcțiilor Bessel $J_n'(\rho'_{nm}) = 0$ şi $J_n(\rho_{nm}) = 0$ sunt date în Tabelul 2.1 (vezi AII, tabel AII.1 şi AII:2)

Tabel 2.1 *Rădăcini ale funcțiilor Bessel* $J_n'(k_\lambda a)$ *şi* $J_n(k_\lambda a)$

| n | $\rho'_{nm}$ | | | | $\rho_{nm}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\rho'_{n1}$ | $\rho'_{n2}$ | $\rho'_{n3}$ | $\rho'_{n4}$ | $\rho_{n1}$ | $\rho_{n2}$ | $\rho_{n3}$ | $\rho_{n4}$ |
| 0 | 3,832 | 7,016 | 10,173 | 13,324 | 2,405 | 5,520 | 8,654 | 11,792 |
| 1 | 1,841 | 5,331 | 8,536 | 11,706 | 3,832 | 7,016 | 10,173 | 13,324 |
| 2 | 3,054 | 6,706 | 9,969 | 13,170 | 5,136 | 8,417 | 11,620 | 14,796 |
| 3 | 4,201 | 8,015 | 11,346 | 14,586 | 6,380 | 9,761 | 13,015 | 16,223 |

În funcție de valorile proprii $\rho'_{nm}$ modurile *TE* în ghidul circular au notația generală $TE_{nm}$, unde *n* şi *m* au semnificații diferite față de ghidul de secțiune dreptunghiulară, anume: *n* reprezintă un număr întreg de lungimi de undă ale variațiilor componentelor câmpurilor *E* şi *H* în lungul coordonatei unghiulare $\phi$; *m* reprezintă numărul de jumătăți de lungimi de undă ale variațiilor componentelor câmpului în lungul coordonatei radiale $\rho$.

Expresiile câmpurilor fizice (valori instantanee) ale modurilor $TE_{nm}$ în ghidurile cilindrice ideale ($\gamma = +j\beta_g$) sunt

$$\mathscr{H}_z(\vec{r},t) = Re\left[H_{0z}(\rho,\phi)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = H_0 J_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \cos\left(\omega t - \beta_g z\right) \tag{2.4.27}$$

$$\mathscr{H}_\rho(\vec{r},t) = Re\left[H_{0\rho}(\rho,\phi)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_g} H_0 J'_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \sin\left(\omega t - \beta_g z\right) \tag{2.4.28}$$

$$\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t) = Re\left[H_{0\phi}(\rho,\phi)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = -\frac{\lambda_{cr}}{2\pi\lambda_g \rho} nH_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \sin\left(\omega t - \beta_g z\right) \tag{2.4.29}$$

$$\mathscr{E}_\rho(\vec{r},t) = Re\left[E_{0\rho}(\rho,\phi)\, e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = -\frac{\lambda_{cr}^2}{2\pi\lambda_g \rho} Z_0 nH_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \sin\left(\omega t - \beta_g z\right) \tag{2.4.30}$$

$$\mathscr{E}_\phi(\vec{r},t) = Re\left[E_{0\phi}(\rho,\phi)e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = -\frac{\lambda_{cr}}{\lambda_0} Z_0 H_0 J'_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \sin\left(\omega t - \beta_g z\right) \tag{2.4.31}$$

## 2.4.2. Moduri transversal – magnetice ($TM_{nm}$) în ghidul circular

Pentru determinarea expresiilor analitice ale componentelor câmpului se procedează analog ca la modurile *TE*, astfel ecuația de propagare Helmholtz scalară în cazul modurilor *TM* este:

$$\left[\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right] E_{0z}(\rho,\phi) = 0 \tag{2.4.32}$$

cu condiția la limită de tip Dirichlet

$$E_{0z}(\rho,\phi)\big|_{\rho=a} = 0 \tag{2.4.33}$$

Aplicând metoda separării variabilelor, soluția ecuației (2.4.32) este

$$E_{0z}(\rho,\phi) = E_0 J_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \tag{2.4.34}$$

Componentele transversale ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ se obțin prin utilizarea relațiilor (2.2.42) şi (2.2.43). Pe baza relației (2.2.43) se poate scrie:

$$\vec{E}_{0T} = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\nabla_T E_{0z}(\rho,\phi) = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2}\left[\hat{\rho}\frac{\partial E_{0z}(\rho,\phi)}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{0z}(\rho,\phi)}{\partial \phi}\right] \tag{2.4.35}$$

din care se scoate

$$E_{0\rho}(\rho,\phi) = -\frac{\gamma}{k_\lambda} E_0 J'_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \tag{2.4.36}$$

$$E_{0\phi}(\rho,\phi) = -\frac{\gamma}{k_\lambda^2} E_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \tag{2.4.37}$$

Pornind de la relația (2.2.42) se poate scrie

$$\vec{H}_{0T}(\rho,\phi) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{\gamma}\left[\hat{k}\times\vec{E}_{0T}(\rho,\phi)\right] = -\frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times\left(\hat{\rho}\frac{\partial E_{0z}(\rho,\phi)}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_{0z}(\rho,\phi)}{\partial \phi}\right)\right] \tag{2.4.38}$$

din care se scoate

$$H_{0\rho}(\rho,\phi) = -\frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\frac{n}{\rho}E_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi \tag{2.4.39}$$

$$H_{0\phi}(\rho,\phi) = -\frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{2.4.40}$$

Aplicând condiția (2.4.33) ecuației (2.4.34) rezultă

$$J_n(k_\lambda a) = 0 \tag{2.4.41}$$

din care se determină un număr infinit de valori proprii $k_\lambda$. Notăm cu $\rho_{nm} = k_\lambda a$ rădăcina de ordin *m* a funcției Bessel de speța întâia şi de ordin *n*; tabelul 2.1 prezintă câteva valori uzuale. Valorile proprii ale numărului de undă transversal $k_\lambda = \rho_{nm}/a$ determină lungimi de undă critice şi frecvențe critice

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi a}{\rho_{nm}a}, \quad \omega_{cr} = \frac{c_0\rho_{nm}}{a} \tag{2.4.42}$$

Expresiile câmpurilor fizice (valori instantanee) ale modurilor $TM_{nm}$ în ghidurile cilindrice ideale ($\gamma = +j\beta_g$) sunt

$$\mathscr{E}_z(\vec{r},t) = Re\left[E_{0z}(\rho,\phi)\,e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = E_0 J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi\cos(\omega t - \beta_g z) \tag{2.4.43}$$

$$\mathscr{E}_\rho(\vec{r},t) = Re\left[E_{0\rho}(\rho,\phi)\,e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_g}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi\sin(\omega t - \beta_g z) \tag{2.4.44}$$

$$\mathscr{E}_\phi(\vec{r},t) = Re\left[E_{0\phi}(\rho,\phi)\,e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = -\frac{\lambda_{cr}^2}{\lambda_g}\frac{n}{\rho}E_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi\sin(\omega t - \beta_g z) \tag{2.4.45}$$

$$\mathscr{H}_\rho(\vec{r},t) = Re\left[H_{0\rho}(\rho,\phi)\,e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{\lambda_{cr}^2}{2\pi\lambda_0 Z_0}\frac{n}{\rho}E_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi\sin(\omega t - \beta_g z) \tag{2.4.46}$$

$$\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t) = Re\left[H_{0\phi}(\rho,\phi)\,e^{-j\beta_g z}e^{j\omega t}\right] = \frac{\lambda_{cr}}{\lambda_0 Z_0}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi\sin(\omega t - \beta_g z) \tag{2.4.47}$$

### 2.4.3. Configurații particulare de moduri

În practica curentă se lucrează cu moduri care au frecvențe critice cât mai mici; deşi teoretic se recomandă modurile fundamentale (dominante) cu $\lambda_{cr}$ de valoare maximă, adesea se utilizează şi moduri având lungimi de undă critice apropiate de $\lambda_{cr\,max}$.

**1° Mod $TE_{11}$ (dominant) (undă $H_{11}$).** Din tabelul 2.1 rezultă că $\rho'_{nm}$ ia valoarea minimă pentru *n = 1, m = 1*, prin urmare modul $TE_{11}$ este un mod fundamental (dominant); el are o largă răspândire şi pentru faptul că este foarte stabil şi se excită uşor de la surse externe. Configurația liniilor de câmp se desenează pentru un moment dat de timp, care pentru simplitate se ia *t = 0;* astfel expresiile componentelor $H(\vec{r})$ şi $E(\vec{r})$ se obțin din relațiile (2.4.27), (2.4.31) făcând *t = 0* şi *n = 1, m = 1* ($\rho'_{11} = 1{,}841$); avem:

$$\mathscr{H}_z(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_z(\vec{r}) = H_0 J_1(\rho'_{11}\rho/a)\cos\phi\cos(\beta_g z)$$

$$\mathscr{H}_\rho(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_g} H_0 J'_1(\rho'_{11}\rho/a)\cos\phi\sin(-\beta_g z)$$

$$\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H\phi(\vec{r}) = -\frac{\lambda_{11}^2}{2\pi\lambda_g\rho} H_0 J_1(\rho'_{11}\rho/a)\sin\phi\sin(-\beta_g z) \qquad (2.4.48)$$

$$\mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda_{11}^2}{2\pi\lambda_0\rho} Z_0 H_0 J_1(\rho'_{11}\rho/a)\sin\phi\sin(-\beta_g z)$$

$$\mathscr{E}_\phi(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_\phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_0} Z_0 H_0 J'_1(\rho'_{11}\rho/a)\cos\phi\sin(-\beta_g z)$$

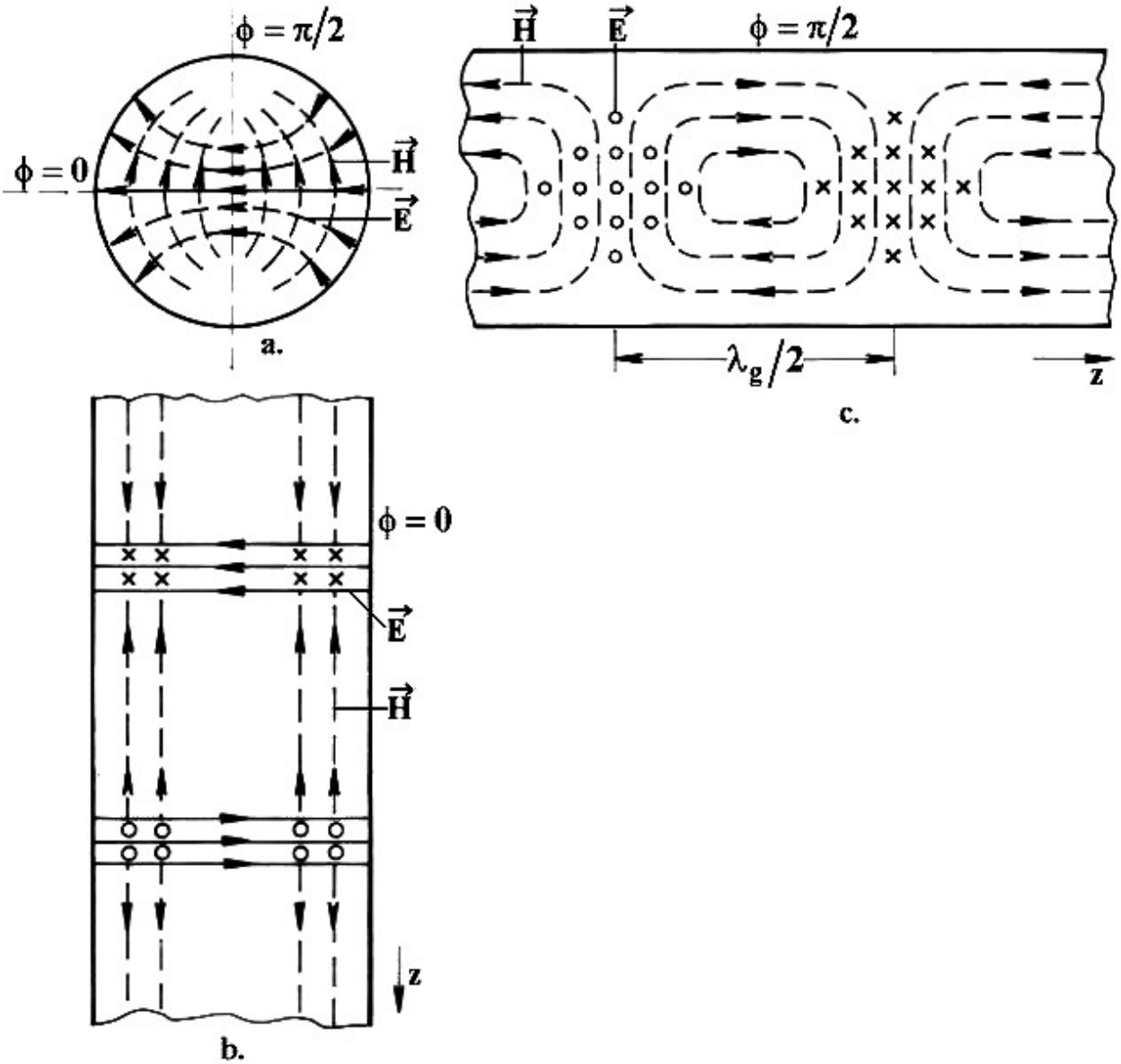



**Fig. 2.17. Configurația liniilor de câmp electric şi magnetic pentru modul $TE_{11}$ în ghidul circular: a – secțiune transversală ( $\rho,\phi$ ); b – secțiune longitudinală pentru $\phi = 0$ ; c - secțiune longitudinală pentru $\phi = \pi/2$**

Configurația definită de aceste relații este arătată în Fig. 2.17 în trei secțiuni: plan transversal *($\rho,\phi$)* şi în două planuri longitudinale definite de unghiurile $\phi = 0$ *şi* $\phi = \pi/2$.

*Distribuția curenților. Curentul de deplasare* are două componente, datorate câmpurilor $\mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)$ (2.4.30) şi $\mathscr{E}_\phi(\vec{r},t)$(2.4.31) şi au expresiile

$$\vec{J}_{d\rho} = \varepsilon_0 \hat{\rho} \left.\frac{\partial \mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{\rho}\varepsilon_0 \omega \frac{\lambda_{11}^2}{2\pi\lambda_0 \rho} Z_0 H_0 J_1(\rho'_{11}\rho/a) \sin\phi \cos(\beta_g z) \qquad (2.4.49)$$

$$\vec{J}_{d\phi} = \hat{\phi}\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \mathscr{E}_\phi(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{\phi}\varepsilon_0 \omega \frac{\lambda_{11}}{\lambda_0} Z_0 H_0 J'_1(\rho'_{11}\rho/a) \cos\phi \cos(\beta_g z) \qquad (2.4.50)$$

aceşti curenţi au sensul liniilor de câmp electric, fiind defazaţi în timp cu $\pi/2$ faţă de $\mathscr{E}$ .

*Curenţii de conducţie* sunt produşi numai de componentele $\mathscr{H}_z(\vec{r},t)$ (2.4.27) şi $\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)$ (2.4.29); curentul datorat componentei $\mathscr{H}_\rho(\vec{r},t)$este zero deoarece $\hat{\rho}\times\hat{\rho} = 0$ . Avem

$$\vec{J}_{cz} = \hat{\rho}\times\hat{k}\mathscr{H}_z(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{\phi} H_0 J_1(\rho'_{11}\rho/a)\cos\phi\ \cos(\beta_g z) \qquad (2.4.51)$$

$$\vec{J}_{c\phi} = \hat{\rho}\times\hat{\phi}\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{k}\frac{\lambda_{11}^2}{2\pi\lambda_g \rho} H_0 J'_1(\rho'_{11}\rho/a)\sin\phi \sin(-\beta_g z) \qquad (2.4.52)$$

Distribuţia curenţilor de deplasare şi de conducţie este arătată simplificat în Fig. 2.18

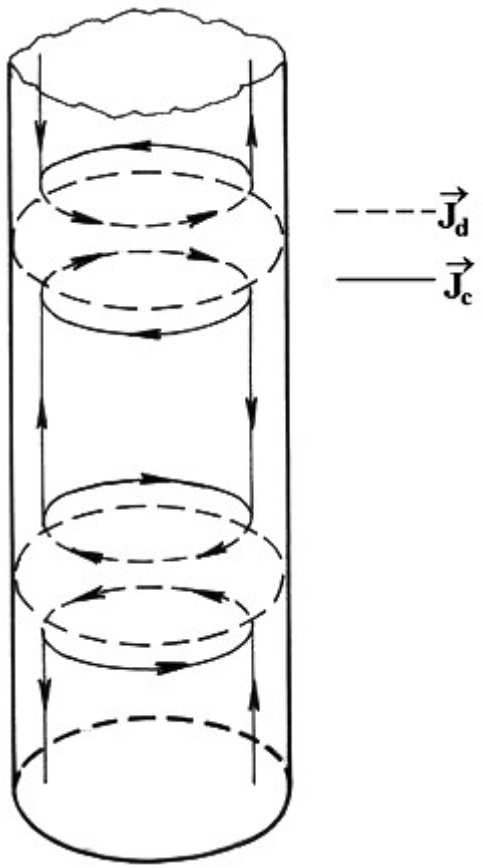



**Fig. 2.18. Distribuţia curenţilor pentru modul $TE_{11}$ în ghidul circular**

**2°. Mod $TE_{01}$ (unda $H_{01}$ )** Deşi nu este un mod fundamental, acest mod poate surveni fie ca o degenerare a modului $TM_{11}$, fie ca mod parazit la anumite discontinuităţi în ghid. Expresiile componentelor care definesc configuraţia liniilor de câmp rezultă din relaţiile (2.4.27)-(2.4.31) punând $n = 0$, $m = 1$ ( $\rho'_{01} = 3{,}832$ ) şi $t = 0$; avem

$$\mathscr{H}_z(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_z(\vec{r}) = H_0 J_0(\rho'_{01}\rho/a)\cos(\beta_g z)$$

$$\mathscr{H}_\rho(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_g} H_0 J'_0(\rho'_{01}\rho/a)\sin(-\beta_g z) \qquad (2.4.53)$$

$$\mathscr{E}_\phi(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_\phi(\vec{r}) = -\frac{\lambda_{01}}{\lambda_0} Z_0 H_0 J'_0(\rho'_{01}\rho/a)\sin(-\beta_g z)$$

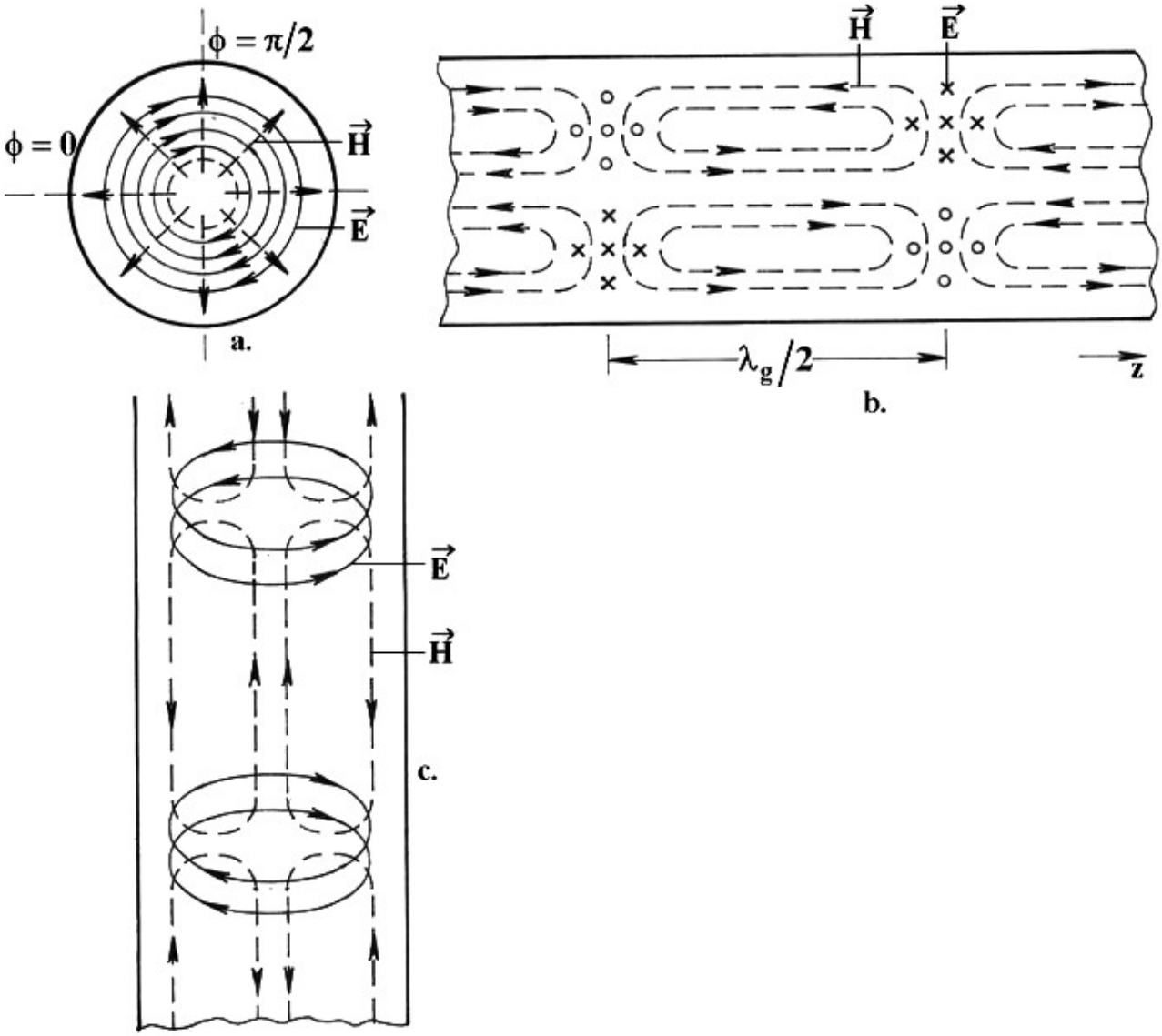



**Fig. 2.19. Configurația liniilor de câmp electric şi magnetic pentru modul $TE_{01}$ în ghidul circular: a – secțiune transversală ($\rho,\phi$); b – secțiune longitudinală; c – configurație spațială**

Configurația liniilor de câmp este arătată în Fig 2.19, în secțiune transversală ($\rho,\phi$) şi în secțiune longitudinală pentru $\phi = 0$ (ca urmare a simetriei axiale configurația în secțiunea longitudinală pentru $\phi = \pi/2$ este identică cu cea obținută pentru $\phi = 0$). O configurație spațială a liniilor de câmp *E* şi *H* este arătată simplificat în Fig. 2.19c.

Variațiile amplitudinilor componentelor $H_z$, $H_\rho$ şi $E_\phi$ sunt arătate în Fig. 2.20; legile de variație după $\rho$ (Fig.2.20a) sunt determinate de variațiile funcțiilor Bessel $J_0(\rho'_{01}\rho/a)$ şi

$J_0'(\rho_{01}'\rho/a)$ în funcție de coordonata $\rho$; curbele de variație după coordonata longitudinală depind de alegerea reperului $z = z_0$.

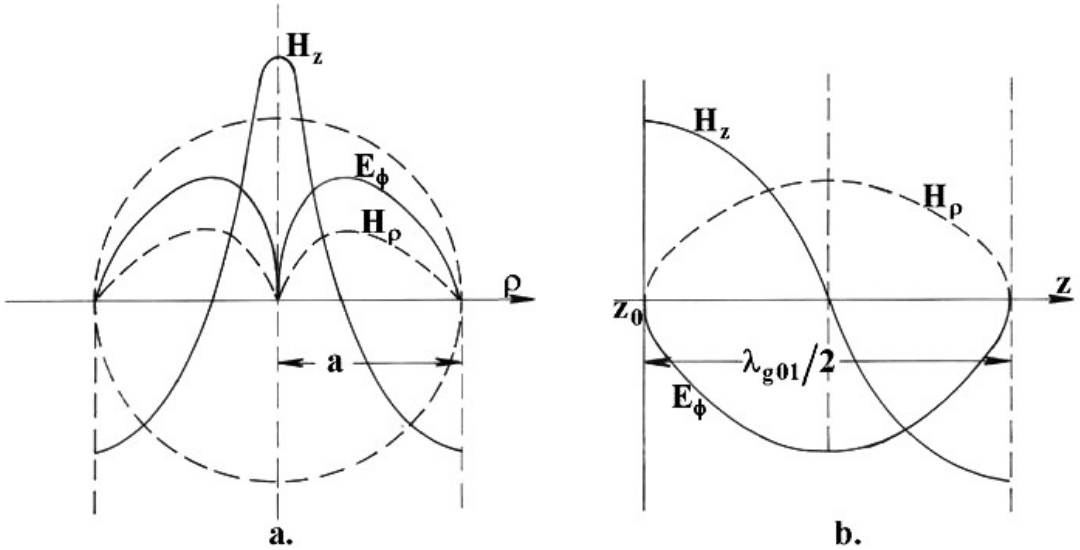



**Fig. 2.20. Variațiile amplitudinilor componentelor de câmp în ghidul circular pentru modul $TE_{01}$: a – după direcția radială ρ; b – după direcția z**

*Distribuția curenților*. Curentul de deplasare are componenta numai după coordonata $\phi$

$$\vec{J}_{d\phi} = \hat{\phi}\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \mathscr{E}_\phi(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{\phi}\varepsilon_0\omega\frac{\lambda_{01}}{\lambda_0}Z_0 J_0'(\rho_{01}'\rho/a)\cos(\beta_g z) \tag{2.4.54}$$

Curenții de conducție sunt produşi numai de componenta $\mathscr{H}_z(\vec{r},t)$, întrucât la calculul curentului dat de $\mathscr{H}_\rho(\vec{r},t)$ survine produsul $\hat{\rho}\times\hat{\rho} = 0$

$$\vec{J}_{cz} = \hat{\rho}\times\hat{k}\mathscr{H}_z(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = -\hat{\phi}\,H_0 J_0(\rho_{01}'\rho/a)\cos(\beta_g z) \tag{2.4.55}$$

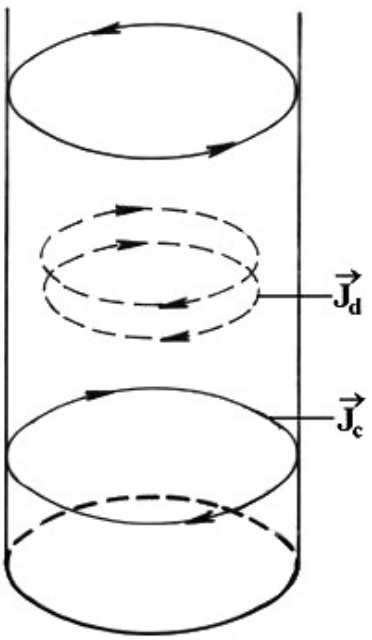



**Fig. 2.21. Distribuția curenților pentru modul $TE_{01}$ în ghidul circular**

Distribuția curenților este reprezentată simplificat în Fig. 2.21; se observă că maximele curenților de conducție sunt situate la distanța de $\lambda_g/4$ față de maximul curentului de deplasare şi

sunt de sensuri opuse. Această situație poate constitui o explicație a faptului că pierderile în ghid pentru modul $TE_{01}$ au o variație anormală cu frecvența: la majoritatea modurilor pierderile cresc cu frecvența, în timp ce la modul $TE_{01}$ pierderile scad cu frecvența câmpului care se propagă în ghid.

**3°. Mod $TM_{01}$ (unda $E_{01}$).** Este un mod fundamental (dominant) deoarece rădăcina $\rho_{01}$ are valoare minimă (= *2,405*), astfel lungimea de undă critică $\lambda_{01}$ are valoare maximă. Expresiile ce descriu configurația liniilor de câmp *E* şi *H* se obțin din (2.4.43)-(2.4.47) făcând *n = 0*, *m = 1* şi *t = 0;* avem

$$\mathscr{E}_z(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_z(\vec{r}) = E_0 J_0(\rho_{01}\rho/a)\cos(\beta_g z)$$

$$\mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_g} E_0 J_0'(\rho_{01}\rho/a)\sin(-\beta_g z) \qquad (2.4.56)$$

$$\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_\phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_0 Z_0} E_0 J_0'(\rho_{01}\rho/a)\sin(-\beta_g z)$$

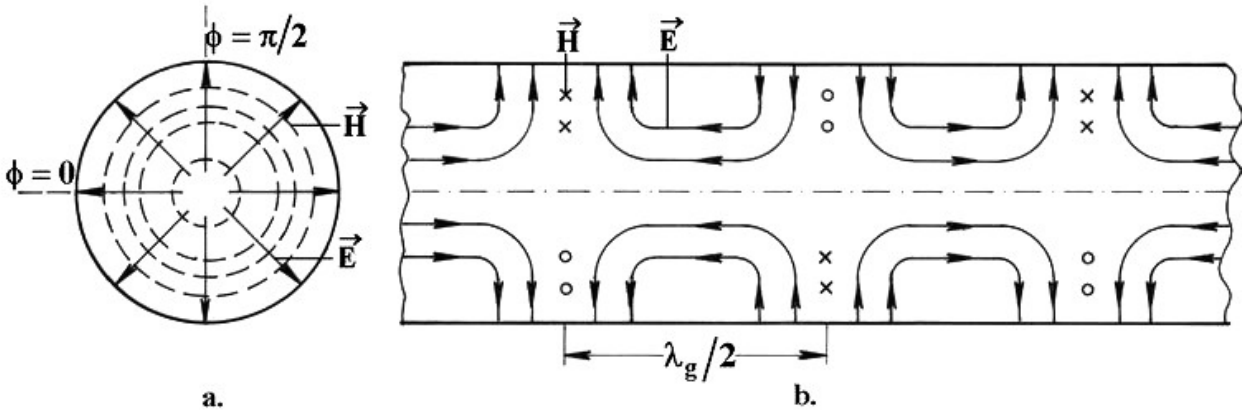



**Fig. 2.22. Configurația liniilor de câmp electric şi magnetic pentru modul $TM_{01}$ în ghidul circular: a – secțiune transversală ( $\rho, \phi$ ); b – secțiune longitudinală**

Configurațiile corespunzătoare sunt arătate în Fig. 2.22; ca urmare a simetriei axiale este suficientă o singură reprezentare în secțiune longitudinală.

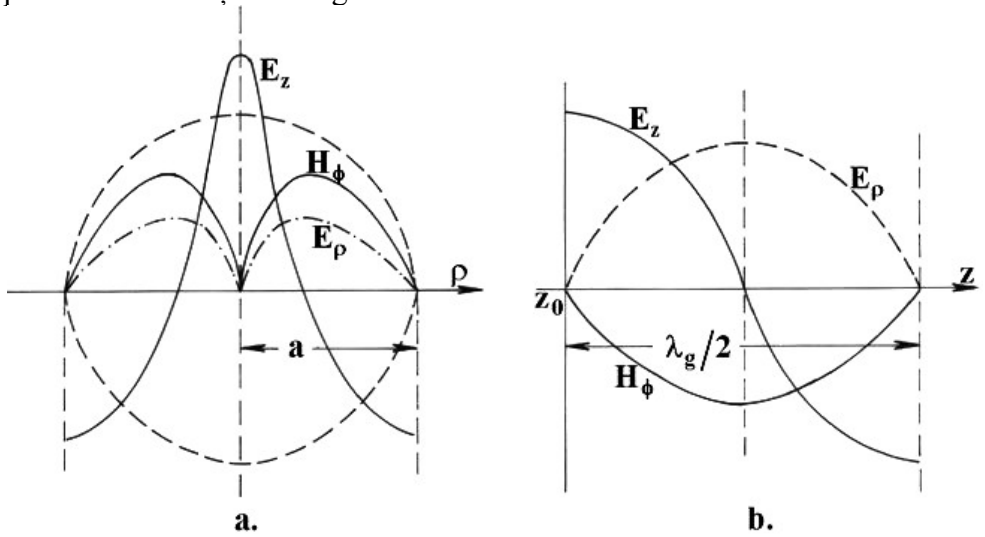



**Fig. 2.23. Variațiile amplitudinilor componentelor de câmp în ghidul circular pentru modul $TM_{01}$: a – după direcția radială ρ; b – după axa longitudinală z**

Variațiile amplitudinilor componentelor $E_z$, $E_\rho$ şi $H_\phi$ sunt arătate în Fig. 2.23; la fel ca în cazul graficelor din Fig. 2.20 legile de variație după ρ sunt determinate de variațiile funcțiilor Bessel $J_0(\rho_{01}\rho/a)$ şi $J_0'(\rho_{01}\rho/a)$.

*Distribuția curenților*. Curenții de deplasare au componente date de câmpurile $\mathscr{E}_z(\vec{r},t)$ şi $\mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)$

$$\vec{J}_{dz} = \varepsilon_0 \hat{k} \frac{\partial \mathscr{E}_z(\vec{r},t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\hat{k}\varepsilon_0 \omega E_0 J_0(\rho_{01}\rho/a) sin(-\beta_g z) \tag{2.4.57}$$

$$\vec{J}_{d\rho} = \varepsilon_0 \hat{\rho} \frac{\partial \mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \hat{\phi}\varepsilon_0 \omega \frac{\lambda_{01}}{\lambda_g} E_0 J_0'(\rho_{01}\rho/a) cos(\beta_g z) \tag{2.4.58}$$

Curentul de conducție are o singură componentă produsă de $\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)$, anume

$$\vec{J}_{c\phi} = \hat{\rho} \times \hat{\phi}\, \mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)\big|_{t=0} = +\hat{k} \frac{\lambda_{01}}{\lambda_0 Z_0} E_0 J_0'(\rho_{01}\rho/a) sin(-\beta_g z) \tag{2.4.59}$$

Distribuția curenților $J_d$ şi $J_c$ este arătată în Fig. 2.24, în secțiune.

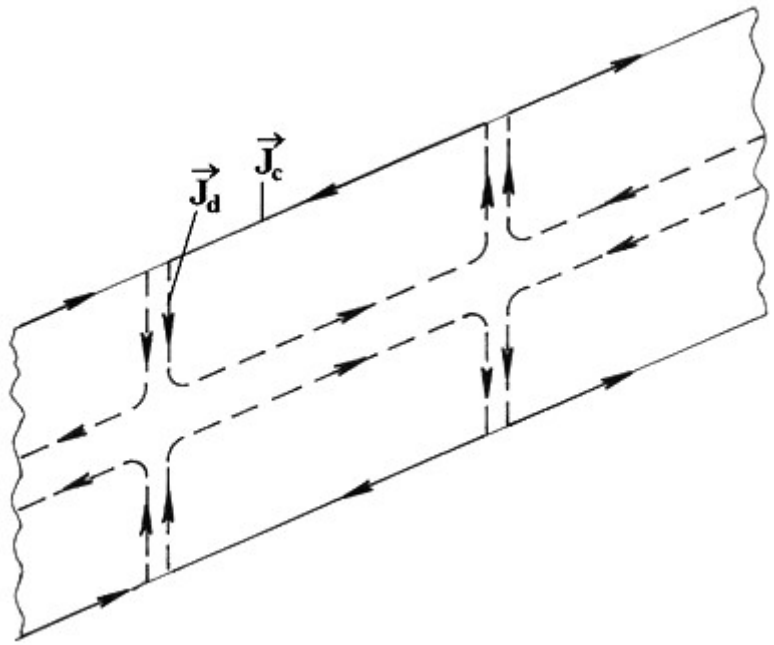



**Fig. 2.24. Schiță pentru distribuția curenților în cazul modului $TM_{01}$**

**4°. Mod $TM_{11}$ (unda $E_{11}$).** Expresiile ce descriu configurațiile liniilor de câmp derivă din (2.4.43)- (2.4.47), făcând *n = 1*, *m = 1* şi *t = 0;* avem:

$$\mathscr{E}_z(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_z(\vec{r}) = E_0 J_1(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi\cos(\beta_g z)$$

$$\mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_g} E_0 J_1'(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi\sin(-\beta_g z)$$

$$\mathscr{E}_\phi(\vec{r},t)\big|_{t=0} = E_\phi(\vec{r}) = -\frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g \rho} E_0 J_1(\rho_{11}\rho/a)\sin\phi\sin(-\beta_g z) \tag{2.4.60}$$

$$\mathscr{H}_\rho(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_\rho(\vec{r}) = \frac{\lambda_{11}^2}{2\pi\lambda_0 Z_0 \rho} E_0 J_1(\rho_{11}\rho/a)\sin\phi\sin(-\beta_g z)$$

$$\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)\big|_{t=0} = H_\phi(\vec{r}) = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_0 Z_0} E_0 J_1'(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi\sin(-\beta_g z)$$

Configurația descrisă de aceste relații este arătată în Fig. 2.25, pentru trei secțiuni: una transversală $(\rho,\phi)$ și două longitudinale pentru $\phi = 0$ și $\phi = \pi/2$.

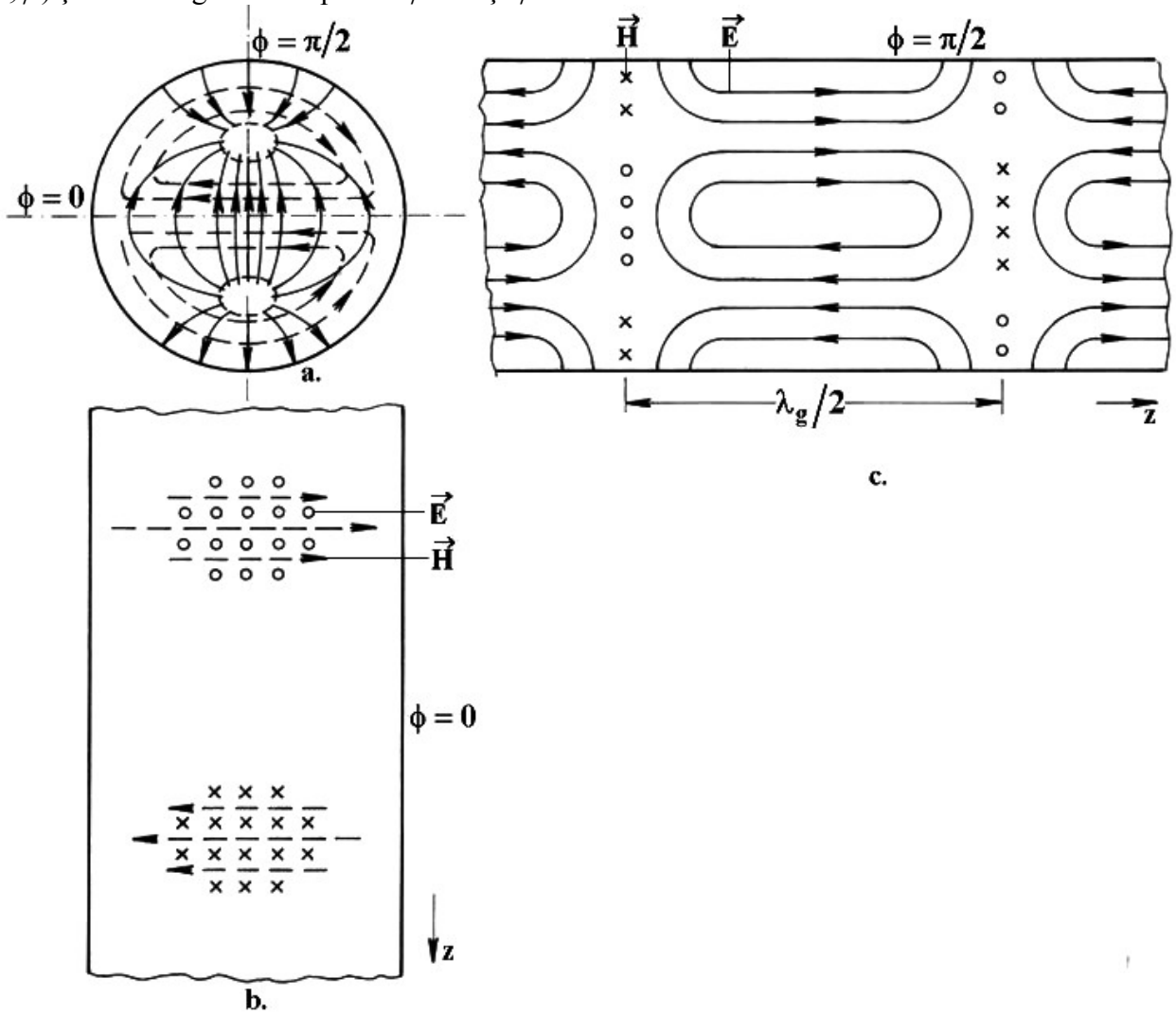



**Fig. 2.25. Configurația liniilor de câmp electric şi magnetic pentru modul $TM_{11}$ în ghidul circular: a – secțiune transversală ( $\rho,\phi$ ); b – secțiune longitudinală pentru $\phi = 0$ ; c - secțiune longitudinală pentru $\phi = \pi/2$**

*Distribuția curenților*. Curentul de deplasare are trei componente

$$\vec{J}_{dz} = \varepsilon_0 \hat{k} \left.\frac{\partial \mathscr{E}_z(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\hat{k}\varepsilon_0 \omega E_0 J_1(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi \sin(-\beta_g z) \tag{2.4.61}$$

$$\vec{J}_{d\rho} = \varepsilon_0 \hat{\rho} \left.\frac{\partial \mathscr{E}_\rho(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \hat{\rho}\varepsilon_0 \omega \frac{\lambda_{11}}{\lambda_g} E_0 J_1'(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi \cos(\beta_g z) \tag{2.4.62}$$

$$\vec{J}_{d\phi} = \varepsilon_0 \hat{\phi} \left.\frac{\partial \mathscr{E}_\phi(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = -\hat{\phi}\varepsilon_0 \omega \frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g \rho} E_0 J_1(\rho_{11}\rho/a)\sin\phi \cos(\beta_g z) \tag{2.4.63}$$

Curentul de conducție are o singură componentă, produsă de câmpul $\mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)$; avem:

$$\vec{J}_{c\phi} = \hat{\rho} \times \hat{\phi} \mathscr{H}_\phi(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = k \frac{\lambda_{11}}{\lambda_0 z_0} E_0 J_1'(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi \sin(-\beta_g z) \tag{2.4.64}$$

Pentru reprezentarea curenților $J_d$ şi $J_c$ s-a ales secțiunea longitudinală, în planul $\phi = \pi/2$ (Fig. 2.26).

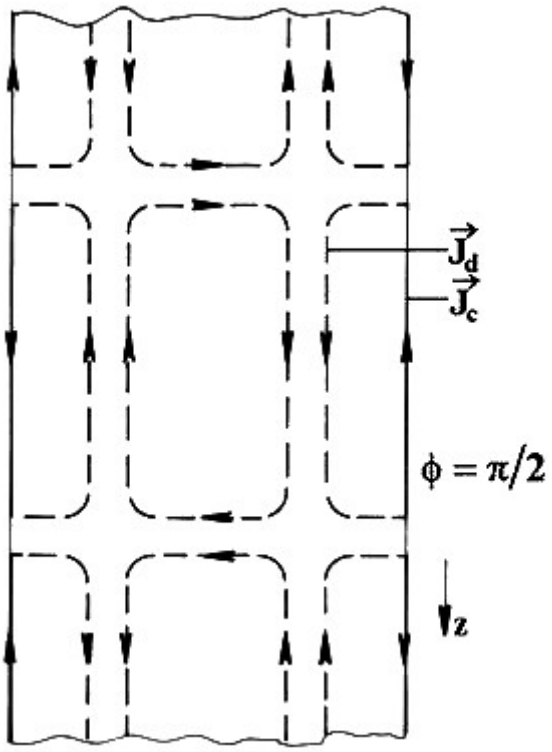



**Fig. 2.26. Distribuția curenților pentru modul $TM_{11}$ în ghidul circular, secțiune longitudinală cu $\phi = \pi/2$**

Trebuie observat că, în general modurile $TE_{0m}$ şi $TM_{1m}$ din ghidurile cilindrice sunt degenerate, adică au aceleaşi lungimi de undă critice; acest fapt este ilustrat în Tabelul 2.1 unde rădăcinile funcției $J_{1m}(k_\lambda \rho)$ sunt identice cu rădăcinile funcției $J'_{0m}(k_\lambda \rho)$.

## 2.5. PUTEREA TRANSMISĂ PRIN GHIDURILE METALICE. PIERDERI

### 2.5.1. Expresii generale ale puterii transmise.

Puterea transmisă prin ghidurile de undă metalice se determină prin utilizarea vectorului Poynting complex (1.4.21):

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}^*(\vec{r})\right] \tag{2.5.1}$$

unde $\vec{E}(\vec{r})$ şi $\vec{H}(\vec{r})$ sunt amplitudini complexe, iar $\vec{H}^*(\vec{r})$ este conjugata complexă a lui $\vec{H}(\vec{r})$. Ca urmare a faptului că în ghidurile de undă câmpul electromagnetic se propagă după axa *z*, este convenabilă reprezentarea câmpurilor sub formă de componente transversale şi longitudinale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_T(\vec{\eta}) + \hat{k}E_z(\vec{\eta}) \tag{2.5.2}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_T(\vec{\eta}) + \hat{k}H_z(\vec{\eta}) \tag{2.5.3}$$

unde : $\vec{\eta} = \vec{\eta}(x, y)$ în coordonate cartesiene şi $\vec{\eta} = \vec{\eta}(\rho, \phi)$ în coordonate cilindrice.

În scopul găsirii unor relații generale vom presupune la început că ghidurile de undă au pereții metalici de conductivitate infinită, iar pentru mediul din interiorul său se neglijează pierderile dielectrice. Astfel, puterea transmisă pe direcția *z* printr-un segment de ghid de secțiune dreptunghiulară intră şi iese numai prin secțiunile transversale care delimitează segmentul respectiv (Fig. 2.27); Această putere reprezintă partea reală a vectorului Poynting ce străbate aria $S_0$ a secțiunii transversale

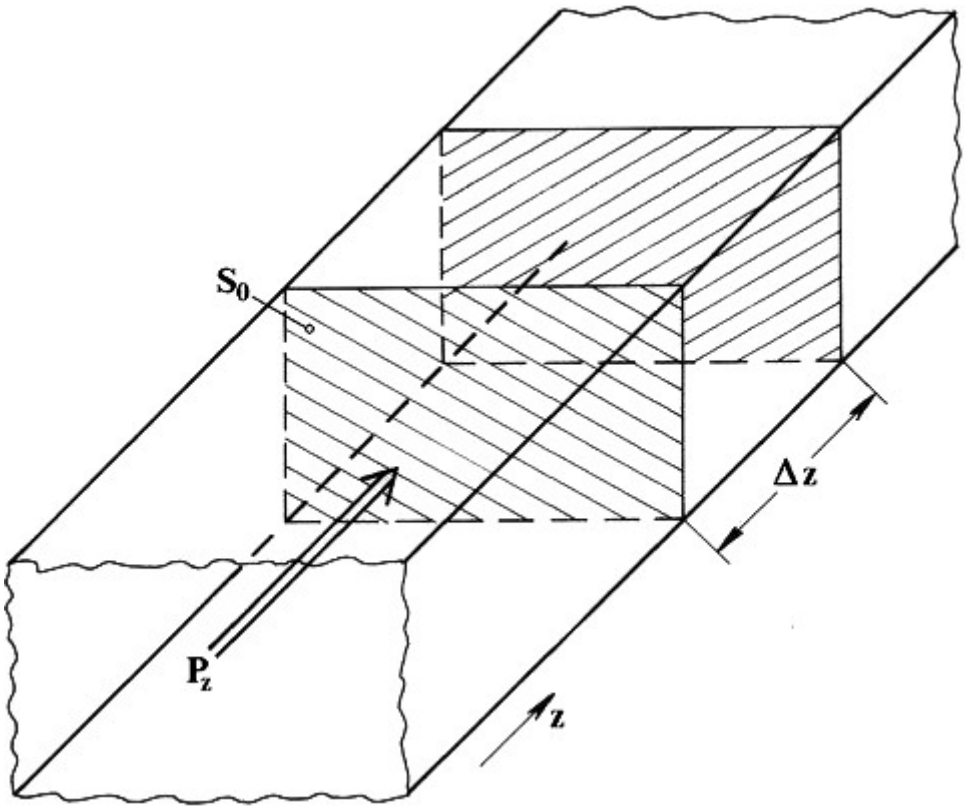



**Fig. 2.27. Ilustrarea puterii transmise prin ghidul de undă metalic**

$$P_z = \int_{S_0} Re\left(\vec{S}\right)\cdot d\vec{s}\ ; \quad d\vec{s} = \hat{k}ds \tag{2.5.4}$$

prin urmare expresia puterii transmise devine

$$P_z = \frac{1}{2} Re \int_{S_0} \left[\vec{E}(\vec{r})\times \vec{H}^*(\vec{r})\right]\cdot \hat{k}ds \tag{2.5.5}$$

Din produsul vectorial $\left[\vec{E}(\vec{r})\times \vec{H}^*(\vec{r})\right]$ se vor reține numai termenii paraleli cu $\hat{k}$; produsul scalar cu $\hat{k}$ al celorlalți termeni se anulează. Vectorul Poynting capătă expresia

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\left[\left(\vec{E}_T + \hat{k}E_z\right)\times\left(\vec{H}_T^* + \hat{k}H_z^*\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_T(\vec{\eta})\times \vec{H}_T^*(\vec{\eta})\right] = \vec{S}_z \tag{2.5.6}$$

unde $\vec{S}_z = \hat{k}S_z$. Având în vedere că fazorii vectoriali $\vec{E}_T(\vec{\eta})$ şi $\vec{H}_T^*(\vec{\eta})$ sunt ortogonali, avem $\left(sin\left(\vec{E}_T,\vec{H}_T^*\right) = 1\right)$

$$S_z = \left|\vec{E}_T\right|\left|\vec{H}_T^*\right| \tag{2.5.7}$$

prin urmare puterea transmisă devine:

$$P_z = \frac{1}{2}\int_{S_0}\left|\vec{E}_T(\vec{\eta})\right|\left|\vec{H}_T^*(\vec{\eta})\right| ds \tag{2.5.8}$$

Mărimile de câmp $\vec{E}_T$ şi $\vec{H}_T$ sunt legate prin intermediul impedanței de undă conform relațiilor (2.3.34)-(2.3.35); indiferent de modul de undă aceste relații pot fi scrise sub forma

$$\left|\vec{E}_T(\vec{\eta})\right| = \underline{Z}_g\left|\vec{H}_T(\vec{\eta})\right|;\quad \vec{E}_T^*(\vec{\eta}) = \underline{Z}_g\left|\vec{H}_T^*(\vec{\eta})\right| \tag{2.5.9}$$

Puterea transmisă poate fi calculată prin una din expresiile

$$P_z = \frac{1}{2\underline{Z}_g}\int_{S_0}\left|\vec{E}_T(\vec{\eta})\right|^2 ds \tag{2.5.10}$$

$$P_z = \frac{\underline{Z}_g}{2}\int_{S_0}\left|\vec{H}_T(\vec{\eta})\right|^2 ds \tag{2.5.11}$$

Prin utilizarea relațiilor dintre componentele transversale şi cele longitudinale pot fi scrise şi alte expresii ale puterii transmise:

*a) Moduri TM*. Ținând cont de (2.2.43) şi de relația evidentă

$$\nabla_T^2 E_z = -k_\lambda^2 E_z \tag{2.5.12}$$

se poate scrie ($\gamma = j\beta_g$)

$$P_z = \frac{1}{2\underline{Z}_{gE}}\int_{S_0}\frac{\beta_g^2}{k_\lambda^2}\left|E_z(\vec{\eta})\right|^2 ds \tag{2.5.13}$$

unde $\underline{Z}_{gE}$ pentru ghiduri fără pierderi ($\gamma = j\beta_g$) are expresia (2.3.36)

*b) Moduri TE*. Ținând cont de (2.2.49)şi de relația

$$\nabla_T^2 H_z = -k_\lambda^2 H_z \tag{2.5.14}$$

se poate scrie:

$$P_z = \frac{\underline{Z}_{gH}}{2}\int_{S_0}\frac{\beta_g^2}{k_\lambda^2}\left|H_z\right|^2 ds \tag{2.5.15}$$

unde $\underline{Z}_{gH}$ pentru ghiduri fără pierderi are expresia (2.3.37). În funcție de problema concretă se va utiliza una din expresiile (2.5.10), (2.5.11), (2.5.13) sau (2.5.15).

### 2.5.2. Aplicații la câteva moduri uzuale.

**1°. Mod $TE_{10}$ în ghidul dreptunghiular**. Întrucât la acest mod $\vec{E}_T(x,y)$ are o singură componentă, este convenabilă utilizarea expresiei (2.5.10); ținând cont de (2.3.65) şi (2.3.74) avem

$$\vec{E}_T(x,y) = \hat{j}E_y(x,y);\quad E_y(x,y) = E_0\sin(\pi x/a);\quad E_0 = (\lambda_{10}/\lambda_0)Z_0H_0 \tag{2.5.16}$$

Expresia puterii transmise devine

$$P_z = \frac{1}{2\underline{Z}_{gH}}\int_0^a\int_0^b\left|E_0\sin(\pi x/a)\right|^2 dxdy \tag{2.5.17}$$

iar după integrare se obține

$$P_z = \frac{E_0^2}{4Z_0}\left(1-\xi^2\right)^{1/2}S_0 = P_{z0}S_0\frac{\left(1-\xi^2\right)^{1/2}}{2} \tag{2.5.18}$$

în care s-a notat $S_0 = ab,\ \xi = \lambda_0/\lambda_{cr} = \omega_{cr}/\omega$ şi s-a ținut cont de expresia impedanței $Z_{gH}$ dată de (2.3.37); mărimea

$$P_{z0} = E_0^2/2Z_0 \tag{2.5.19}$$

reprezintă puterea maximă care poate fi transmisă în spațiul liber pe unitate de arie. Valoarea acestei puteri este limitată de străpungerea electrică a aerului de către tensiunea $E_0$ (la $x = a/2$ avem $E_y = E_0$). Aerul uscat la presiunea normală are tensiunea de străpungere $E_{str} \cong 30\ kV/cm$; având în vedere că în spațiul liber $Z_0 = 120\pi\Omega$, $P_{z0}$ are valoarea

$$P_{z0} = \frac{E_{str}^2}{2Z_0} = 1{,}19 \cdot 10^6 \; W/cm^2 \tag{2.5.20}$$

În practica curentă se ia un coeficient de siguranță de 300 %, astfel valoarea uzuală a câmpului electric se ia $E_0 = E_{max} = 10 \; KV/cm$, iar puterea $P_{z0}$ ia valoarea aproximativă de $130 \; kW/cm^2$. Atunci când se urmărește transmiterea unor puteri importante prin ghid, frecvența câmpului electromagnetic se ia $\omega = 1{,}5\omega_{cr}$ $\left(\lambda_0 = \lambda_{cr}/1{,}5\right)$; în acest caz (2.5.18) capătă valoarea

$$P_z = P_{z0} S_0 \cdot 0{,}3725 \cong S_0 \, 50 \; kW/cm^2 \tag{2.5.21}$$

De exemplu, prin ghidurile de bandă $X$ ( $S_0 = 2{,}286 \times 1{,}016 \; cm^2$ ) în cazul modului fundamental $TE_{10}$ se obține $P_z = 117 kW$.

Trebuie subliniat că, din punctul de vedere al transmiterii puterii, lungimea de undă $\lambda_0$ nu poate fi aleasă arbitrar în raport cu $\lambda_{cr}$; mărimea $\xi = \lambda_0/\lambda_{cr}$ poate avea valori cuprinse între $0{,}5 \le \xi \le 0{,}9$. Ne convingem de acest lucru introducând o putere normată

$$p_0 = P_z/\left(P_{z0} S_0/2\right) = \left(1 - \xi^2\right)^{1/2} \tag{2.5.22}$$

din care se scoate:

$$p_0^2 + \xi^2 = 1 \tag{2.5.23}$$

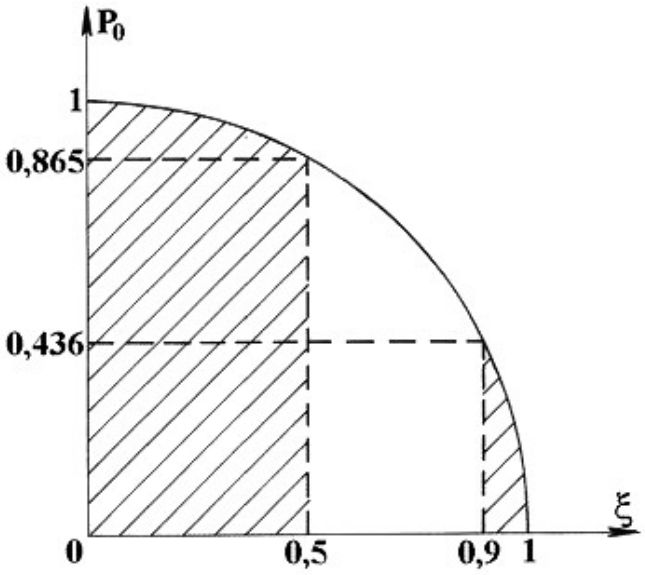



**Fig. 2.28. Delimitarea domeniului de frecvențe pentru transmisia optimă a puterii prin ghidul de undă metalic**

Primul cadran al acestui cerc este reprezentat în Fig.2.28, unde sunt determinate domeniile de valori admise pentru $\xi$; dacă $\omega \ge 2\omega_{cr}$ este posibilă apariția modurilor superioare ($TE_{20}$ de exemplu); dacă $\omega \le 1{,}1\omega_{cr}$ are loc o scădere importantă a puterii transmise.

**2°. Mod $TM_{11}$ în ghidul dreptunghiular**. Se va utiliza formula (2.5.10) în care

$$\vec{E}_T(x,y) = \hat{i}E_x(x,y) + \hat{j}E_y(x,y); \quad \left|\vec{E}_T\right|^2 = \left|E_x\right|^2 + \left|E_y\right|^2 \tag{2.5.24}$$

iar expresia puterii transmise este

$$\mathrm{P_z} = \frac{1}{2\underline{Z}_{gE}}\left[\int_{S_0}\left|E_x\right|^2 ds + \int_{S_0}\left|E_y\right|^2 ds\right] \tag{2.5.25}$$

Ținând cont de (2.3.15) şi (2.3.16) în care $\gamma = j\beta_g$, $\beta_g = 2\pi/\lambda_g$, $k_\lambda = 2\pi/\lambda_{cr}$ $(k_{11} = 2\pi/\lambda_{11})$, se poate scrie

$$E_x(x,y) = -j\frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g}\frac{E_0}{2a}\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{2.5.26}$$

$$E_y(x,y) = -j\frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g}\frac{E_0}{2b}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \tag{2.5.27}$$

Introducând în (2.5.25) rezultă

$$P_z = \frac{1}{2Z_{gE}}\left[\left(\frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g}\right)^2\left(\frac{E_0}{2a}\right)^2\int_0^a\int_0^b\cos^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)dxdy+\left(\frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_g}\right)^2\left(\frac{E_0}{2b}\right)^2\int_0^a\int_0^b\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)dxdy\right] \tag{2.5.28}$$

Ținând cont de expresia impedanței $Z_{gE}$ (2.3.36) după integrare se obține

$$P_z = \frac{E_0^2}{2\lambda_g^2 Z_0\left(1-\xi^2\right)^{1/2}}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2} \tag{2.5.29}$$

în care s-a înlocuit $\lambda_{11} = 2ab/\left(a^2+b^2\right)^2$.

**3°. Mod $TE_{01}$ în ghidul circular**. Pentru acest mod este convenabilă utilizarea expresiei (2.5.11), care ia forma

$$P_z = \frac{Z_0\left(1-\xi^2\right)^{1/2}}{2}\int_{S_0}\left|\vec{H}_T(\rho,\phi)\right|^2\rho\,d\rho\,d\phi \tag{2.5.30}$$

În cazul modului $TE_{01}$ câmpul $\vec{H}_T(\rho,\phi)$are o singură componentă (2.4.48), (2.4.53)

$$\vec{H}_T(\rho,\phi) = \hat{\rho}H_\rho(\rho,\phi);\;\; H_\rho(\rho,\phi)) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_g}H_0J_0'(\rho_0'\rho/a) \tag{2.5.31}$$

Prin urmare (2.5.30) devine

$$P_z = \frac{Z_0\left(1-\xi^2\right)^{1/2}}{2}\left(\frac{\lambda_{01}}{\lambda_g}H_0\right)^2\int_{\rho=0}^a\int_{\phi=0}^{2\pi}J_0'(\rho_{01}'\rho/a)\rho\,d\rho\;d\phi \tag{2.5.32}$$

Integrala după $\rho$ este de tip Lommel astfel expresia puterii transmise este

$$P_z = \frac{E_0^2\left(1-\xi^2\right)^{1/2}}{2Z_0}J_1'(\rho_{01}')S_0 \tag{2.5.33}$$

în care s-a notat $E_0 = Z_{TM}H_0$ şi $S_0 = \pi a^2$. Ținând cont de notația (2.5.19) şi considerând

$$p_0 = \frac{P_z}{P_{z0}S_0J_1'(\rho_{01}')} \tag{2.5.34}$$

se obține o relație similară cu (2.5.23).

O altă expresie a puterii transmise în cazul modului $TE_{01}$ în ghidul circular este [1]

$$P_z = \frac{E_0^2}{2}\frac{\pi\beta_g}{\omega\varepsilon_0^2\mu_0}(\rho_{01}')^2J_0^2(\rho_{01}') \tag{2.5.35}$$

Ținând cont de proprietățile funcțiilor Bessel (AII, (II.2.11)) se poate arăta că ultima expresie este identică cu (2.5.33).

**4°. Mod $TM_{11}$ în ghidul circular**. Se utilizează expresia (2.5.30), observând că $\vec{H}_T(\rho,\phi)$ are două componente (2.4.60)

$$\vec{H}_T(\rho,\phi)=\hat{\rho}H_\rho(\rho,\phi)+\hat{\phi}\,H_\phi(\rho,\phi) \tag{2.5.36}$$

$$H_\rho(\rho,\phi)=\frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_0}\frac{E_0}{2\pi Z_0\rho}J_1(\rho_{11}\rho/a)\sin\phi \tag{2.5.37}$$

$$H_\phi(\rho,\phi)=\frac{\lambda_{11}}{\lambda_0}\frac{E_0}{Z_0}J_1'(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi \tag{2.5.38}$$

Expresia puterii transmise este

$$P_z=\frac{Z_{gE}}{2}\left(\frac{\lambda_{11}}{\lambda_0}\right)^2\left(\frac{E_0}{Z_0}\right)^2\left[\left(\frac{\lambda_{11}}{2\pi}\right)^2\int_{\rho=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|\frac{J_1(\rho_{11}\rho/a)}{\rho}\sin\phi\right|^2\rho\,d\rho\,d\phi+\int_{\rho=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|J_1'(\rho_{11}\rho/a)\cos\phi\right|^2\rho\,d\rho\,d\phi\right] \tag{2.5.39}$$

Efectuând integrarea (AII, (II.2.9)) rezultă

$$P_z=\frac{E_0^2}{4Z_0}\frac{\lambda_{11}^2}{\lambda_0\lambda_g}S_0\left[J_1'(\rho_{11})\right]^2 \tag{2.5.40}$$

**5°. Mod $TE_{11}$ în ghidul circular**. Se porneşte de la expresia (2.5.11) în care componentele transversale ale lui $\vec{H}_T(\rho,\phi)$ rezultă din (2.4.18)-(2.4.19) şi (2.4.48); componentele lui $\vec{H}_T(\rho,\phi)$sunt

$$H_\rho(\rho,\phi)=\frac{\lambda_{11}}{\lambda_g}H_0J_1'(\rho_{11}'\rho/a)\cos\phi \tag{2.5.41}$$

$$H_\phi(\rho,\phi)=-\frac{\lambda_{11}^2}{2\pi\lambda_g}\frac{H_0}{\rho}J_1(\rho_{11}'\rho/a)\sin\phi \tag{2.5.42}$$

Introducem expresia lui $P_z$ definită de (2.5.30); avem

$$P_z=\frac{Z_{gH}}{2}\left(\frac{\lambda_{11}^2}{2\pi\lambda_g}\right)^2H_0^2\left[\int_{\rho=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi}k_\lambda^2J_1'^2(\rho_{11}\rho/a)\cos^2\phi\,\rho\,d\rho\,d\phi+\int_{\rho=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{\rho^2}J_1^2(\rho_{11}\rho/a)\sin^2\phi\,\rho\,d\rho\,d\phi\right] \tag{2.5.43}$$

Efectuând integrarea după $\phi$ se obține [10]

$$P_z=\frac{\pi\omega\mu_0\,\beta_g}{2k_\lambda^4}H_0^2\int_{\rho=0}^{a}\left[\rho k_\lambda^2J_1'^2(\rho_{11}\rho/a)+\frac{1}{\rho}J_1^2(\rho_{11}\rho/a)\right]d\rho \tag{2.5.44}$$

în care s-a notat $Z_{gH}=\omega\mu_0/\beta_g$ (2.3.37).

După efectuarea integrării după ρ se obține [10]

$$P_z=\frac{Z_0H_0^2}{\left(1-\xi^2\right)^{1/2}16\pi}\frac{\lambda_{11}^4}{\lambda_g^2}\left(\rho_{11}'-1\right)J_1^2(\rho_{11}') \tag{2.5.45}$$

### 2.5.3. Pierderi în ghidurile metalice

Există două cauze care produc atenuarea undelor electromagnetice transmise prin ghidurile metalice: pierderi dielectrice (aerul nu este pur şi uscat, astfel $\varepsilon_r'' \neq 0$) şi pierderi în pereţii metalici. Constanta de atenuare $\alpha_g$ va avea două componente: $\alpha_d$, datorată pierderilor dielectrice şi $\alpha_c$ datorată de pierderile în pereţii metalici, astfel $\alpha_g = \alpha_d + \alpha_c$.

Indiferent de natura pierderilor, constanta de atenuare cauzează atenuarea componentelor de câmp cu factorul $exp(-\alpha_g z)$ în timp ce puterea transmisă va fi atenuată cu factorul $exp(-2\alpha_g z)$; astfel, variaţia cu distanţa a puterii transmise este

$$P_z = P_0 e^{-2\alpha_g z} \tag{2.5.46}$$

unde $P_0$ este puterea în punctul de referinţă $z = 0$. Conform legii conservării energiei, puterea disipată pe unitate de lungime $dz$ este egală cu rata de variaţie a puterii transmise

$$P_{d0} = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = 2\alpha_g P_z \tag{2.5.47}$$

( semnul "– "din ultima relaţie exprimă faptul că $P_z$ variază în sensul scăderii); constanta de atenuare este

$$\alpha_g = P_{d0} / 2P_z \tag{2.5.48}$$

Adesea se utilizează noţiunea de atenuare pe o anumită lungime $l$, definită prin raportul

$$A = \frac{P_z(z=0)}{P_z(z=l)} = \frac{P_0}{P_l} \tag{2.5.49}$$

care de regulă se exprimă în neperi sau decibeli

$$\begin{aligned} A_{Np} &= \ln A = 2\alpha_g l \ (Np) \\ A_{dB} &= 10 \log A = 8{,}69\alpha_g l \ (dB) \end{aligned} \tag{2.5.50}$$

Randamentul ghidului de undă privit ca sistem de transmisie a energiei este definit prin relaţia

$$\eta = \frac{P_0 - P_{d0} l}{P_0} = 1 - 2\alpha_g l \tag{2.5.51}$$

**1°. Pierderi dielectrice**. Constanta de atenuare datorată pierderilor dielectrice se poate calcula pornind de la expresia constantei de propagare $\gamma = \alpha_d + j\beta_g$. Admiţând că ghidul este uniform umplut cu un mediu dielectric, numărul de undă $k$ este

$$\underline{k}^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j \tan\delta_E) \tag{2.5.52}$$

în care s-au neglijat pierderile magnetice ( $\mu_r = 1$) şi s-a ţinut cont de (1.3.13). Expresia constantei de propagare este

$$\gamma = \alpha_d + j\beta_g = \left[k_\lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r (1 - j \tan\delta_E)\right]^{1/2} \tag{2.5.53}$$

care se poate pune sub forma

$$\gamma = \left[\left(k_\lambda^2 - k^2\right) + jk^2 \tan\delta_E\right]^{1/2} \tag{2.5.54}$$

În practica curentă mediile dielectrice din interiorul ghidurilor au pierderi foarte mici, $\tan\delta_E << 1$; astfel se poate efectua o dezvoltare în serie Taylor a ultimei relaţii, reţinând numai primii doi termeni

$$\gamma \cong \left(k_\lambda^2 - k^2\right)^{1/2} + \frac{jk^2 \tan\delta_E}{2\left(k_\lambda^2 - k^2\right)^{1/2}} = \frac{k^2 \tan\delta_E}{2\beta_g} + j\beta_g \tag{2.5.55}$$

unde s-a notat $\left(k_\lambda^2 - k^2\right)^{1/2} = j\beta_g$ deoarece $k > k_\lambda$; se observă că în cazul pierderilor dielectrice mici constanta de fază $\beta_g$ nu se modifică, în schimb depinde puternic de $\varepsilon_r$. De regulă, constanta de atenuare cauzată de pierderile dielectrice se exprimă în (*Np/m*)

$$\alpha_d = \frac{k^2 \tan\delta_E}{2\beta_g} (Np/m) \tag{2.5.56}$$

**2°. Pierderi în pereții metalici**. Pentru calculul constantei de atenuare, cauzate de pierderile în pereții metalici, există mai multe abordări; două dintre ele sunt prezentate succint mai jos.

*A. Pereți metalici de conductivitate finită*. Din relația (1.3.11) în care se considera $\varepsilon'' << \sigma/\omega$, se poate scrie

$$\underline{\varepsilon}_{ec} = \varepsilon(1 - j\sigma/\omega\varepsilon); \quad k^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon(1 - j\sigma/\omega\varepsilon) \tag{2.5.57}$$

prin urmare expresia generală a constantei de propagare va fi

$$\gamma = \alpha_c + j\beta_g = \left[\left(k_\lambda^2 - k^2\right) + jk^2\sigma/\omega\varepsilon\right]^{1/2} \tag{2.5.58}$$

O mică fracțiune din puterea care se propagă în interiorul ghidului este disipată în metal; pentru a determina această putere disipată sunt necesare câteva precizări asupra proceselor fizice intrinseci. Pierderile în pereții metalici sunt datorate unei unde electromagnetice care se propagă perpendicular pe peretele metalic; se admite că această undă este de tip *TEM*, deci $k_\lambda = 0$; în aceste caz din (2.5.58) avem

$$\gamma = k\left[j\sigma/\omega\varepsilon - 1\right]^{1/2} \cong \omega(\mu_c\varepsilon)^{1/2}\left[j\sigma/\omega\varepsilon\right]^{1/2} = (1+j)/\delta_s \tag{2.5.59}$$

unde

$$\delta_s = \frac{1}{\alpha_c} = \left[\frac{2}{\omega\mu_c\sigma}\right]^{1/2} \tag{2.5.60}$$

reprezintă *adâncimea de pătrundere* a metalului, iar $\mu_c$ este permeabilitatea magnetică; după parcurgerea acestei distanțe amplitudinile câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt atenuate de *1/e ≅ 0,37* ori.

În interiorul metalului curenții de deplasare pot fi neglijați în comparație cu curenții de conducție, astfel ecuațiile Maxwell de evoluție iau forma:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_c\vec{H} \tag{2.5.61}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma\vec{E} \tag{2.5.62}$$

Notăm prin $\xi$ coordonata normală pe suprafața metalică, îndreptată spre interiorul metalului (Fig. 2.29a); având în vedere că variația spațială (atenuarea) pe direcția $\hat{\xi}$ este mult mai rapidă decât pe direcțiile paralele cu suprafața, operatorii $\nabla$ şi $\nabla^2$ pot fi exprimați după cum urmează ($\hat{\xi} = -\hat{n}$)

$$\nabla \cong -\hat{n}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{2.5.63}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \tag{2.5.64}$$

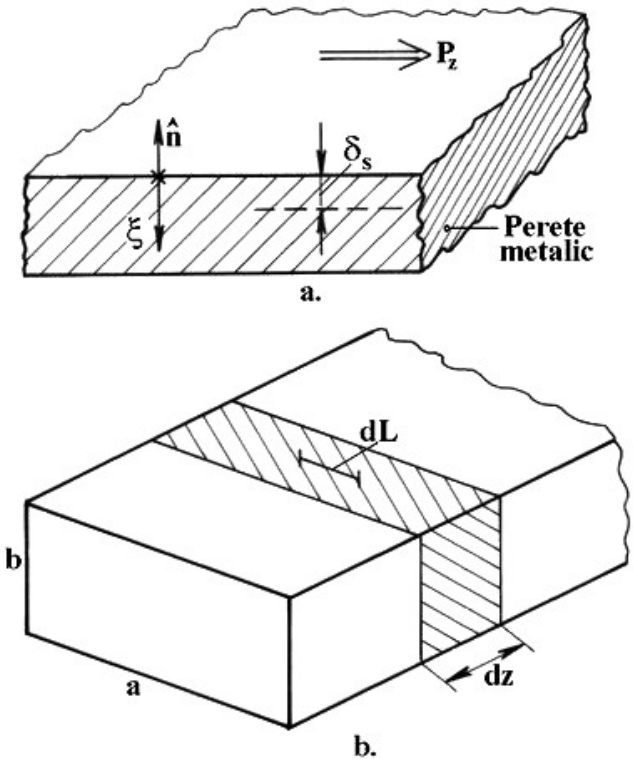



**Fig. 2.29. Pierderi în pereții metalici ai ghidului de undă; a –adâncime de pătrundere; b – calculul puterii disipate pe unitatea de lungime a ghidului**

Prin aplicarea operatorului (2.5.63) ecuațiilor (2.5.61)şi (2.5.62) se obține

$$-\hat{n}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial\xi}=\sigma\vec{E};\quad -\hat{n}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial\xi}=-j\omega\mu_c\vec{H} \tag{2.5.65}$$

fapt ce implică

$$\hat{n}\cdot\vec{E}=0;\quad \hat{n}\cdot\vec{H}=0 \tag{2.5.66}$$

prin urmare $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt câmpuri în interiorul metalului, *paralele* cu suprafața de separație aer-metal.

Ecuațiile de propagare ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ se pot obține prin aplicarea operației de multiplicare vectorială ($\nabla\times$) ecuațiilor (2.5.61) şi (2.5.62); se obține

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial\xi^2}-j\frac{2}{\delta_s^2}\vec{E}=0 \tag{2.5.67}$$

$$\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial\xi^2}-j\frac{2}{\delta_s^2}\vec{H}=0 \tag{2.5.68}$$

Soluțiile ecuațiilor sunt de forma

$$\vec{E}_{||}=\vec{E}_{0||}e^{-\xi/\delta_s}e^{-j\xi/\delta_s} \tag{2.5.69}$$

$$\vec{H}_{||}=\vec{H}_{0||}e^{-\xi/\delta_s}e^{-j\xi/\delta_s} \tag{2.5.70}$$

care indică faptul că câmpurile $\vec{E}_{||}$ şi $\vec{H}_{||}$ sunt tangențiale la suprafață, aşa cum rezultă din (2.5.66). Soluțiile de mai sus trebuie să satisfacă ecuațiile Maxwell; de exemplu, introducând în (2.5.65) rezultă

$$\frac{1+j}{\delta_s}\hat{n}\times\vec{H}_{||}=\sigma\vec{E}_{||} \tag{2.5.71}$$

de unde

$$\vec{E}_{||} = \frac{1+j}{\sigma\delta_s}\hat{n}\times\vec{H}_{||} \tag{2.5.72}$$

Ca urmare a condiției de continuitate a componentelor tangențiale la suprafața de separație aer – metal, prezența câmpului $\vec{E}_{||}$ în metal implică existența unei componente tangențiale a câmpului electric în aer, în imediata vecinătate a interfeței; această componentă se obține din (2.5.72), făcând $\xi = 0$

$$\vec{E}_{0||} = \frac{1+j}{\sigma\delta_s}\hat{n}\times\vec{H}_{0||} = \frac{1+j}{\sigma\delta_s}\vec{J}_{sf} \tag{2.5.73}$$

unde $\vec{J}_{sf}$ este densitatea curentului de suprafață [*A/m*] definit prin relația (1.3.55). Se definește o impedanță de suprafață (văzută de la aer spre metal) $\underline{Z}_{sm}$ ca raportul ($\vec{E}_{0||}/\vec{J}_{sf}$); din (2.5.73) rezultă

$$\frac{\vec{E}_{0||}}{\vec{J}_{sf}} = \underline{Z}_{sm} = \frac{1+j}{\sigma\delta_s} = R_S + jX_S\,; \quad R_S = X_S = \frac{1}{\sigma\delta_s} \tag{2.5.74}$$

Puterea disipată în peretele metalic se calculează după o relație similară cu cea a puterii transmise (2.5.11)

$$P_c = \frac{Re(\underline{Z}_{sm})}{2}\int_{\Sigma}\left|\vec{H}_{0||}\right|^2 ds \tag{2.5.75}$$

unde $\Sigma$ este aria suprafeței metalice; de regulă această putere se determină pe unitate de lungime după axa *z*, astfel se poate scrie

$$P_{c0} = \frac{Re(\underline{Z}_{sm})}{2}\int_{Lg} dL\int_{z=0}^{1}\left|\vec{H}_{0||}\right|^2 dz = \frac{R_S}{2}\int_{Lg}\left|\vec{H}_{0||}\right|^2 dL \tag{2.5.76}$$

unde *Lg* este circumferința ghidului. În interiorul ghidului de secțiune dreptunghiulară (Fig. 2.29b) avem $Lg = 2(a + b)$. Referindu-ne numai la pierderile în pereții metalici se poate scrie o expresie generală a constantelor de atenuare conform formulei (2.5.48); dacă pentru puterea transmisă $P_z$ se utilizează relația (2.5.11), avem

$$\alpha_c = \frac{1}{2}\frac{R_S}{\underline{Z}}\frac{\int_{Lg}\left|\vec{H}_{0||}\right|^2 dL}{\int_{S_0}\left|\vec{H}_T\right|^2 ds} \tag{2.5.77}$$

unde : $\vec{H}_T$ este câmpul magnetic transversal care se propagă în ghid pe direcția *z*, iar $S_0$ este aria transversală a ghidului; $\vec{H}_{0||}$ este componenta tangențială a câmpului magnetic în ghid, la suprafața de separație aer-metal.

*B. Utilizarea curenților de suprafață*. O variantă foarte convenabilă pentru calculul puterii disipate în pereții metalici ai ghidului constă în utilizarea curentului de suprafață $\vec{J}_{sf}$. În cadrul acestei variante nu este necesară cunoașterea configurației câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ în interiorul conductorului ( deci nu este necesară aproximația de undă plană cu direcția de propagare după versorul $\xi$). Chiar dacă metalul este considerat conductor ideal se definește un curent de suprafață conform relației (1.3.55) $\vec{J}_{sf} = \hat{n}\times\vec{H}$ ; acest curent poate fi definit pentru orice configurație de câmp şi pentru orice formă a pereților metalici; rezultă că această variantă este mai generală decât varianta precedentă.

Puterea disipată în peretele metalic se calculează după formula

$$P_c = \frac{Re(Z_{sm})}{2}\int_{\Sigma}\left|\vec{J}_{sf}\right|^2 ds = \frac{Rs}{2}\int_{\Sigma}\left|\vec{H}_t\right|^2 ds \tag{2.5.78}$$

unde $\vec{H}_t$ este câmpul magnetic tangențial la suprafața metalică. Pe unitate de lungime a ghidului se poate scrie

$$P_{c0} = \frac{Rs}{2}\int_{Lg}\left|\vec{J}_{sf}\right|^2 dL \tag{2.5.79}$$

unde *Lg* este circumferința ghidului în locul unde se evaluează pierderile.

**3°. Exemple de calcul a constantei de atenuare $\alpha_c$**

*a) Mod $TE_{10}$ în ghidul dreptunghiular*. Din relațiile (2.3.76)-(2.3.80) se observă că este suficient să calculăm pierderile pentru un singur perete vertical şi pentru un singur perete orizontal; puterea totală disipată pe unitate de lungime a ghidului se obține prin dublarea acestor pierderi. Avem

$$\begin{aligned} P_{c0} &= \frac{R_S}{2}\int_{Lg}\left|\vec{J}_{sf}\right|^2 dL = R_S\int_{y=0}^{b}\left|\vec{J}_{coz}\right|^2 dy + R_S\int_{x=0}^{a}\left[\left|\vec{J}_{coz}\right|^2 + \left|\vec{J}_{cox}\right|^2\right]dx = \\ &= R_S\left|\vec{H}_0\right|^2\left[b + \frac{a}{2} + \frac{a^3}{2\pi^2}\beta_g^2\right] \end{aligned} \tag{2.5.80}$$

Puterea transmisă $P_z$ este dată de relația (2.5.18), astfel constanta de atenuare $\alpha_c$ este

$$\alpha_c = \frac{P_{c0}}{2P_z} = \frac{2R_S}{Z_{gH}}\frac{b + a/2 + a^3\beta_g^2/2\pi^2}{ab} \tag{2.5.81}$$

Considerăm un ghid de bandă *X* (dimensiuni *a = 2,286 cm*, b = *1,016 cm*) cu *f = 10 GHz* şi $f_{cr} = 6{,}562\ GHz$, având pereții din *Cu* de conductivitate $\sigma = 5{,}8\cdot 10^7\ S/m$. Se obțin rezultatele numerice: $Z_{TE} = Z_{gH} = \omega\mu_c/\beta_g$, $\beta_g = \left[k^2 - k_\lambda^2\right] = \left[k^2 - (\pi/a)\right]^{1/2} = 158 m^{-1}$;
$R_S = \left(\omega\mu_c/2\sigma\right)^{1/2} = 0{,}026\,\Omega$; astfel constanta de atenuare $\alpha_c = 0{,}0125\,Np/m$ sau $\alpha_c = -20\log e^{-\alpha_c} = 0{,}11\,dB/m$.

*b) Mod $TE_{11}$ în ghidul cilindric*.

Conform relațiilor (2.4.51) şi (2.4.52) în cadrul acestui mod $\vec{J}_{sf}$ are două componente, astfel se poate scrie

$$P_{c0} = \frac{R_S}{2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left|\vec{J}_{sf}\right|^2 a\,d\phi = \frac{R_S}{2}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\left|\vec{J}_{cz}\right|^2 + \left|\vec{J}_{c\phi}\right|^2\right]a\,d\phi \tag{2.5.82}$$

după înlocuire şi efectuarea calculelor se obține

$$P_{c0} = \frac{\pi a H_0^2 R_S}{2}\left(1 + \frac{\beta_g^2}{a^2 k_\lambda^4}\right)J_1^2\left(\rho'_{11}\right) \tag{2.5.83}$$

Ținând cont de expresia (2.5.45) a puterii transmise $P_z$, constanta de atenuare $\alpha_c$ este

$$\alpha_c = \frac{P_{c0}}{2P_z} = \frac{R_S\left(a^2k_\lambda^4 + \beta_g^2\right)}{a\beta_g Z_0 k\left(\rho'^2_{11} - 1\right)}\ (Np/m) \tag{2.5.84}$$

în care s-a făcut uz de notațiile: $\lambda_{11} = 2\pi/k_\lambda$, $\lambda_g = 2\pi/\beta_g$, $Z_{TE} = Z_0\left(1-\xi^2\right)^{1/2}$ și $k = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$.

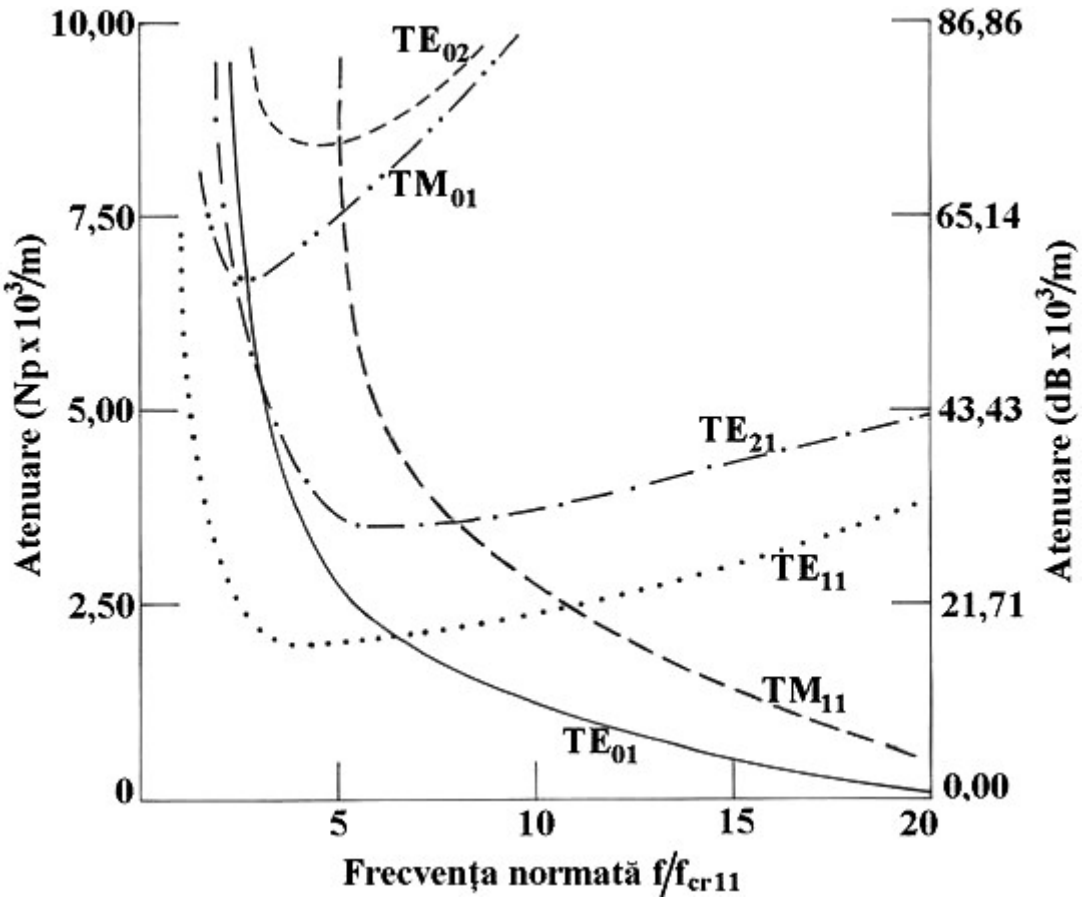



**Fig. 2.30. Variația atenuării în funcție de frecvența pentru un ghid circular din Cu având raza a = 1,5 cm; în abscisă s-au considerat frecvențe normate în raport cu frecvența critică a modului dominant $f_{cr11}$ = 3,68 GHz**

În Fig. 2.30 sunt prezentate grafice de variație a constantei de atenuare cu frecvența pentru câteva moduri uzuale în ghidurile de undă de secțiune circulară; pe abscisă s-au luat frecvențe normate în raport cu frecvența de tăiere a modului dominant, $f_{cr11}$. Ghidul este confecționat din cupru ($\sigma = 5{,}7 \times 10^7\ S/m$) având raza a = 1,5 cm [1].

## CAP. 2. Bibliografie


1. D.K. Cheng „Field and Wave Electromagnetics", Addison Wesley Publ. Company, N.Y.,(1989)
2. M.H. Choudhury „Electromagnetism", Ellis Horwood Limited, Division of John Wiley and Sons, (1989)
3. A. Ishimaru „Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering", Prentice – Hall Int. Ed., N.Y., (1991)
4. J.C. Slater „Microwave Electronics", Dover Publ., Inc., N.Y., (1969)
5. A.F. Harvey „Microwave Engineering", Academic Press, London, N.Y., (1963)
6. G. Rulea „Tehnica frecvențelor foarte înalte", E.D.P, (1972)
7. G. Rulea „Bazele teoretice şi experimentale ale Tehnicii Microundelor", Ed. Şt. şi Enciclopedică, (1989)
8. H. Baudrand „Introduction au calcul des circuits microondes", INP, Toulouse (2000)
9. R. Chatterjee „Elements of Microwave Engineering", Ellis Horwood Series in Electrical and Electronic Engineering, Division of John Wiley and Sons, (1986)
10. D.M. Pozar „Microwave Engineering", Addison Wesley Publ.Company, N.Y., 1990, (reprinted 1993)
11. A.M. Kuguşev, N.S. Golubeva „Osnovy radioelektroniki" (l. rusă), Energia, Moskva, (1969)
12. R.E. Collin „Field Theory of Guided Waves", sec. edition, Oxford University Press, (1991)
13. R.A. Waldron „Theory of Guided Electromagnetic Waves", Van Nostrand, London, (1969)
14. L. Levin „Theory of Waveguides", Butterworth and Co. Publ. Ltd, London, (1975)
15. D. Alexa "Tehnica microundelor", Edit. Institutului Politehnic, Iaşi, (1979)

# CAPITOLUL 3

# STRUCTURI PARTICULARE DE PROPAGARE GHIDATĂ A MICROUNDELOR.

Aşa cum s-a arătat în Capitolul 2, ghidurile de undă metalice constituie structuri clasice de propagare ghidată a microundelor; modurile de undă şi fenomenele de propagare în aceste ghiduri pot fi determinate în urma unei analize riguroase, bazată pe ecuaţii de propagare Helmholtz şi condiţii la limită (pe frontieră) adecvate. Cu toate acestea la ghidurile metalice se constată câteva neajunsuri importante: sunt prezente fenomene de dispersie (ca urmare a existenţei numărului de undă transversal care determină o frecvenţă critică $\omega_{cr}$); dimensiuni geometrice relativ mari în comparaţie cu elementele de generare şi detecţie actuale; se pot propaga numai moduri transversal magnetice (TM) şi transversal electrice (TE), dar nu se pot propaga moduri transversal electromagnetice (TEM).

În multe echipamente şi instalaţii de microunde se utilizează şi alte tipuri de structuri de propagare ghidată; cele mai răspândite sunt liniile de transmisie bifilare, ghidurile de undă (linii) coaxiale, linii microstrip şi stripline. În astfel de structuri se pot propaga moduri TEM sau unde electromagnetice în care modul TEM este dominant (fundamental).

## 3.1. LINII DE TRANSMISIE BIFILARE

### 3.1.1. Ecuaţii de propagare

Linia bifilară clasică constă din două conductoare lungi de diametru *2a*, situate la distanţa *D* (Fig. 3.1a); această structură este considerată linie de transmisie dacă lungimea ei este suficient de mare în raport cu lungimea de undă $l >> \lambda$. Teoria liniilor de transmisie comportă două aspecte; primul, consideră că parametrii electrici sunt daţi şi se studiază propagarea undelor electromagnetice în lungul liniei; al doilea, cunoscându-se configuraţia conductoarelor şi mediul dinte ele, se urmăreşte determinarea parametrilor liniei cum ar fi: impedanţa caracteristică, constanta de propagare şi viteza de propagare. Se va arăta mai jos că în orice structură de propagare ghidată care conţine două sau mai multe conductoare longitudinale se pot propaga moduri TEM.

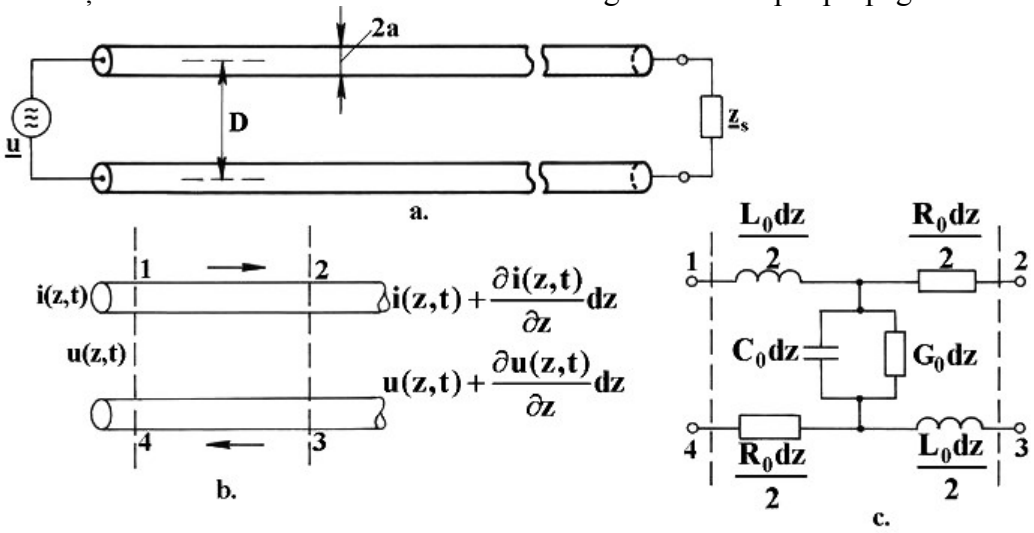



**Fig. 3.1. Linie de transmisie bifilară: a - structură fizică; b – segment infinitesimal; c – circuit echivalent simetric cu parametri lineici**

În această secțiune ne oprim asupra ecuațiilor de propagare; fenomenele de propagare din liniile bifilare pot fi studiate prin două metode: extinderea teoriei clasice a circuitelor; analiza de câmp, bazată pe forme particulare ale ecuațiilor Maxwell diferențiale. În general liniile de transmisie cu $l > \lambda$ sunt considerate sisteme cu parametrii (constante) distribuiți; teoria acestor sisteme constituie o punte de legătură între teoria circuitelor cu constante concentrate şi analiza de câmp; prin urmare metodele dezvoltate în acest domeniu sunt deosebit de importante pentru analiza joncțiunilor şi componentelor din traiectele de microunde; în plus ele pot constitui baza unor metode de analiză numerică.

Considerăm un segment infinitesimal de linie având lungimea $\Delta z$ (Fig.3.1b); este uzuală caracterizarea acestui segment prin *parametrii lineici* (pe unitate de lungime): $L_0(H/m)$, $C_0(F/m)$, $R_0(\Omega/m)$ şi $G_0(S/m)$; astfel segmentul de lungime $\Delta z$ poate fi modelat printr-un circuit echivalent simetric (Fig.3.1c) având parametrii: $L_0\Delta z$, $C_0\Delta z$, $R_0\Delta z$ şi $G_0\Delta z$. Pentru stabilirea ecuațiilor ce descriu circuitul echivalent există două abordări: prima constă în utilizarea ecuațiilor Kirchhoff pentru tensiuni şi curenți, a doua constă în utilizarea ecuațiilor Maxwell sub formă integrală; aici se va utiliza a doua abordare.

Variația tensiunilor în lungul liniei poate fi dedusă plecând de la ecuația Maxwell integrală (1.1.19):

$$\oint_{L_c} \vec{\mathscr{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{\mathscr{B}} \cdot d\vec{s} \tag{3.1.1}$$

unde: $\vec{\mathscr{E}}(z,t)$ şi $\vec{\mathscr{B}}(z,t)$ sunt câmpuri fizice (valori instantanee); $L_C$ este conturul format prin parcurgerea succesivă a distanțelor dintre punctele 1-2, 2-3, 3-4, 4-1; S este aria delimitată de acest contur. Se consideră că segmentul de linie are $\Delta z$ foarte mic, astfel prin trecerea la limită $\Delta z \to 0$ la bornele din dreapta ale circuitului echivalent se poate scrie

$$\begin{aligned} u(z+\Delta z,t) &= u(z,t) + \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} dz \\ i(z+\Delta z,t) &= i(z,t) + \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} dz \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Integrala din membrul stâng al relației (3.1.1) are patru termeni:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \vec{\mathscr{E}} \cdot d\vec{l} &= \frac{i(z,t)R_0 dz}{2}, \quad \int_2^3 \vec{\mathscr{E}} \cdot d\vec{l} = u(z,t) + \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} dz \\ \int_3^4 \vec{\mathscr{E}} \cdot d\vec{l} &= \frac{i(z,t)R_0 dz}{2}, \quad \int_4^1 \vec{\mathscr{E}} \cdot d\vec{l} = -u(z,t) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Fluxul de inducție magnetică prin aria S este

$$\int_S \vec{\mathscr{B}} \cdot d\vec{s} = \Phi_0 dz = i(z,t) L_0 dz \tag{3.1.4}$$

Introducând (3.1.3) şi (3.1.4) în relația de definiție (3.1.1) se obține

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + L_0 \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} + R_0 i(z,t) = 0 \tag{3.1.5}$$

Pentru găsirea ecuației ce descrie propagarea curenților în lungul liniei se utilizează ecuația de continuitate sub forma integrală (1.1.27) (legea conservării sarcinii)

$$\int_\Sigma \vec{\mathscr{J}}_n \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV \tag{3.1.6}$$

Având în vedere că la un moment dat de timp liniile de câmp încep pe un conductor şi se termină pe celălalt, curenții din cele două conductoare sunt egali şi de semn opus. Integrala din membrul stâng are mai mulți termeni: pe ariile transversale la $z$ şi $z + \Delta z$ şi pe ariile laterale ale conductoarelor. Întrucât versorul la suprafață este considerat cu sensul pozitiv spre exterior, se poate scrie:

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma(z)}\vec{\mathcal{J}}_n\cdot d\vec{s}&=-\int_{\Sigma(z)}\mathcal{J}_z ds=-i(z,t)\\ \int_{\Sigma(z+dz)}\vec{\mathcal{J}}_n\cdot d\vec{s}&=-\int_{\Sigma(z+dz)}\mathcal{J}_z ds=i(z,t)+\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}dz\\ \int_{\Sigma\,lat}\vec{\mathcal{J}}_n\cdot d\vec{s}&=-\int_{\Sigma\,lat}\mathcal{J}_l ds=u(z,t)G_0 dz\end{aligned}\qquad(3.1.7)$$

Integrala din membrul drept se pune sub forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV=\frac{\partial[C_0 dz\,u(z,t)]}{\partial t}=C_0 dz\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}\qquad(3.1.8)$$

Introducând (3.1.7) şi (3.1.8) în relaţia de definiţie (3.1.6) rezultă:

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}+C_0\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}+G_0 u(z,t)=0\qquad(3.1.9)$$

Se observă că ecuaţiile (3.1.5) şi (3.1.9) reprezintă ecuaţii de propagare pentru valorile instantanee *u(z,t)* şi *i(z,t)*; ele sunt numite ecuaţii de propagare ale liniilor lungi în domeniul timp, sau *ecuaţiile telegrafiştilor* în domeniul timp.

În cazul semnalelor armonice se poate pune $u(z,t)=\underline{U}(z)e^{j\omega t}$, $i(z,t)=\underline{I}(z)e^{j\omega t}$; astfel ecuaţiile (3.1.5) şi (3.1.9) iau forma

$$\frac{d\underline{U}(z)}{\partial z}+(R_0+j\omega L_0)\underline{I}(z)=0\qquad(3.1.10)$$

$$\frac{d\underline{I}(z)}{\partial z}+(G_0+j\omega C_0)\underline{U}(z)=0\qquad(3.1.11)$$

unde $\underline{U}(z)$ şi $\underline{I}(z)$ sunt amplitudini complexe. Aceste ecuaţii reprezintă de asemenea *ecuaţii de propagare* implicite *în domeniul frecvenţă*. Ele pot fi aduse la forme explicite prin operaţii uzuale: ecuaţia (3.1.10) se derivează în raport cu *z* şi se ţine seama apoi de (3.1.11) ; ecuaţia (3.1.11) se derivează în raport cu *z* şi se ţine seama de (3.1.10). În final se obţine

$$\frac{d^2\underline{U}(z)}{dz^2}-\gamma^2\underline{U}(z)=0\qquad(3.1.12)$$

$$\frac{d^2\underline{I}(z)}{dz^2}-\gamma^2\underline{I}(z)=0\qquad(3.1.13)$$

unde:

$$\gamma=\alpha+j\beta=[(R_0+j\omega L_0)(G_0+j\omega C_0)]^{1/2}\qquad(3.1.14)$$

reprezintă *constanta de propagare complexă* în linia de transmisie. Ecuaţiile (3.1.12), (3.1.13) reprezintă ecuaţii de propagare în domeniul frecvenţă şi sunt numite, de asemenea, ecuaţii ale telegrafiştilor.

Soluţiile ecuaţiilor de propagare au forma generală

$$\underline{U}(z)=\underline{U}_i e^{-\gamma z}+\underline{U}_r e^{\gamma z}\qquad(3.1.15)$$

$$\underline{I}(z)=\underline{I}_i e^{-\gamma z}+\underline{I}_r e^{\gamma z}\qquad(3.1.16)$$

unde termenii $e^{-\gamma z}$ reprezintă unde care se propagă în direcţia $+z$, iar termenii $e^{\gamma z}$ reprezintă propagarea unor unde în direcţia $-z$. *Impedanţa caracteristică* $\underline{Z}_c$ se defineşte prin relaţia

$$\underline{Z}_c=\left[\frac{R_0+j\omega L_0}{G_0+j\omega C_0}\right]^{1/2}\qquad(3.1.17)$$

această ultimă relație se obține după cum urmează: se derivează (3.1.15) în raport cu *z* şi se compară cu (3.1.10), rezultând astfel expresia curentului $\underline{I}(z)$,

$$\underline{I}(z)=\frac{\gamma}{R_0+j\omega L_0}\left[\underline{U}_i e^{-\gamma z}-\underline{U}_r e^{\gamma z}\right] \tag{3.1.18}$$

de unde avem $\underline{Z}_c=[(R_0+j\omega L_0)/\gamma]$ şi ținând cont de (3.1.14) rezultă (3.1.17). Se observă că în (3.1.16) s-au introdus relațiile

$$\underline{I}_i=\frac{\underline{U}_i}{\underline{Z}_c},\ \underline{I}_r=\frac{-\underline{U}_r}{\underline{Z}_c} \tag{3.1.19}$$

Primii termeni din membrul drept ai relațiilor (3.1.15), (3.1.16) reprezintă *unde incidente* (directe); ceilalți doi termeni reprezintă *unde reflectate* (inverse). În cazul liniilor uniforme şi infinit lungi se poate considera că nu există unde reflectate, iar relațiile (3.1.15), (3.1.16) se simplifică

$$\begin{aligned}\underline{U}(z)&=\underline{U}_i e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\\ \underline{I}(z)&=\underline{I}_i e^{-\alpha z}e^{-j\beta z}\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Deşi mărimile importante ce caracterizează fenomenele de propagare în liniile bifilare sunt discutate mai jos (secțiunea 3.1.3) aici ne oprim pe scurt asupra lungimii de undă, vitezei de fază şi impedanței caracteristice. Având mărimea $\underline{U}(z)$ din (3.1.15), se poate obține valoarea instantanee a tensiunii

$$u(z,t)=Re\left[\underline{U}(z)e^{j\omega t}\right]=|\underline{U}_i|e^{-\alpha z}\cos(\omega t-\beta z+\phi_i)+|\underline{U}_r|e^{+\alpha z}\cos(\omega t+\beta z+\phi_r) \tag{3.1.21}$$

Aplicând formalismul discutat in secțiunea 2.1 (expresiile (2.1.9) şi (2.1.10) ), se poate scrie

$$v_{ph}=\frac{\omega}{\beta}=\lambda f \tag{3.1.22}$$

unde

$$\lambda=2\pi/\beta \tag{3.1.23}$$

În cazul liniei fără pierderi (ideale) avem $R_0=0, G_0=0, \alpha=0$; astfel pot fi scrise expresiile

$$\begin{aligned}\gamma&=j\omega(L_0C_0)^{1/2}\quad,\quad \beta=\omega(L_0C_0)^{1/2}\\ \underline{Z}_c&=Z_{co}=(L_0/C_0)^{1/2}\\ v_{ph}&=(L_0C_0)^{-1/2}\quad,\quad \lambda=\frac{2\pi}{\omega(L_0C_0)^{1/2}}\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

## 3.1.2. Linii de lungime finită. Diagrama Smith

Atât ghidurile de undă metalice tratate în capitolul 2 cât şi structurile de propagare ghidată care suportă moduri TEM sunt denumite generic linii de transmisie a semnalelor de microunde. Dacă aceste structuri sunt uniforme şi infinit lungi ($l >> \lambda$) energia se propagă sub formă de unde progresive de la generator spre consumator (receptor); în aplicațiile curente de laborator aceste structuri sunt de lungime finită şi în lungul lor pot fi prezente diferite tipuri de obstacole: neuniformități de construcție, diafragme, impedanțe neadaptate, cuplaje, alte dispozitive şi componente; un obstacol clasic este bucla de scurtcircuit la linii şi pistonul de scurtcircuit la ghidurile de undă.

**1°. Coeficient de reflexie şi factor de undă staționară.**

Situația uzuală de conectare a liniei bifilare este arătată în Fig. 3.2.; pentru simplitate vom considera linia fără pierderi ($\alpha = 0$), iar la generator nu au loc reflexii. În general se consideră o

sarcină arbitrară $\underline{Z}_s \neq Z_{co}$ ,prin urmare în linie vor exista unde incidente şi unde reflectate; tensiunea şi curentul într-un punct de coordonată *z* sunt

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_i e^{-j\beta z} + \underline{U}_r e^{j\beta z} \tag{3.1.25}$$

$$\underline{I}(z) = \frac{\underline{U}_i}{Z_{c0}} e^{-j\beta z} - \frac{\underline{U}_r}{Z_{c0}} e^{-j\beta z} \tag{3.1.26}$$

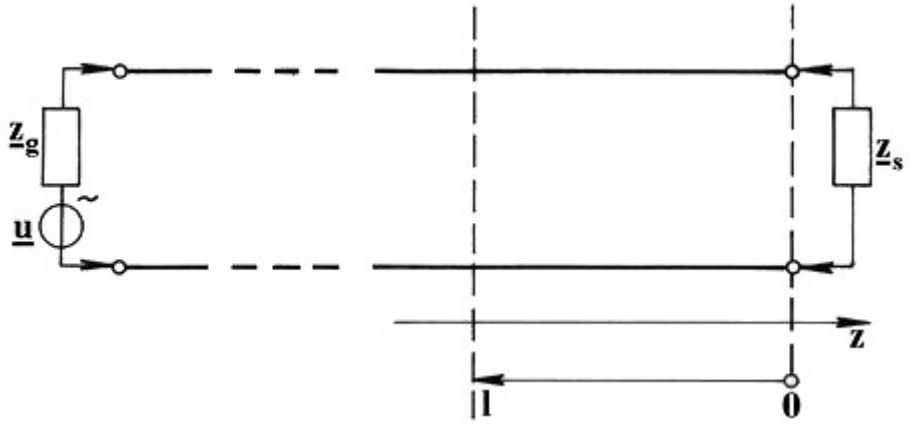



**Fig. 3.2. Linie de lungime finită**

Referința se ia la sarcină, astfel la *z = 0* se poate scrie

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}(0)}{\underline{I}(0)} = \frac{\underline{U}_i + \underline{U}_r}{\underline{U}_i - \underline{U}_r} Z_{c0} \ ; \tag{3,1,27}$$

din (3.1.27) rezultă

$$\underline{U}_r = \frac{\underline{Z}_s - Z_{c0}}{\underline{Z}_s + Z_{c0}} \underline{U}_i \tag{3.1.28}$$

Coeficientul de reflexie în tensiune, la sarcină, se defineşte prin expresia

$$\underline{\Gamma}_s = \frac{\underline{U}_r(0)}{\underline{U}_i(0)} = \frac{\underline{Z}_s - Z_{c0}}{\underline{Z}_s + Z_{c0}}; \ \underline{\Gamma}_s = \Gamma_s e^{j\phi_s} \ , \ \Gamma_s = \left|\underline{\Gamma}_s\right| \tag{3.1.29}$$

În mod similar se poate scrie expresia coeficientului de reflexie în curent

$$\underline{\Gamma}_i = \frac{\underline{I}_r(0)}{\underline{I}_i(0)} = -\underline{\Gamma}_s \tag{3.1.30}$$

Pot fi discutate câteva situații particulare: $\underline{Z}_s = 0$ (linie în scurtcircuit), avem $\underline{\Gamma}_s = -1$, adică $\Gamma_s = 1$, $\Phi_s = \pi$; $\underline{Z}_s = \infty$ (linie în gol), avem $\underline{\Gamma}_s = 1$, adică $\Gamma_s = 1$, $\Phi_s = 0$; $\underline{Z}_s = jX_s$ (sarcină reactivă), avem $\underline{\Gamma}_s = (jX_s - Z_{co})/(jX_s + Z_{co})$, adică $\Gamma_s = 1$, $\phi_s = -2\,arctan(X_s/Z_{c0})$; dacă $\underline{Z}_s = Z_{co}$ rezultă $\underline{\Gamma}_s = 0$ fapt ce corespunde situației de sarcină adaptată.

Trebuie subliniat că coeficientul de reflexie (3.1.29) a fost definit la sarcină, însă expresia poate fi generalizată pentru un punct arbitrar de pe linie la distanța *l* de sarcină. Dacă în (3.1.25) se pune *l = - z* , se poate scrie

$$\underline{\Gamma}(l) = \frac{\underline{U}_r e^{-j\beta l}}{\underline{U}_i e^{j\beta l}} = \underline{\Gamma}_s e^{-2j\beta l} \tag{3.1.31}$$

Ținând cont că $\underline{\Gamma}_s$ este caracterizat prin modul şi fază (3.1.29), ultima relație devine:

$$\underline{\Gamma}(l) = \underline{\Gamma}_s e^{j(\phi_s - 2\beta l)} = \underline{\Gamma}_s e^{j\theta_z} \tag{3.1.32}$$

de unde rezultă că modulul lui $\underline{\Gamma}(l)$ este egal cu $|\underline{\Gamma}_s|$, fiind determinat de natura şi valoarea impedanţei de sarcină, în timp ce faza totală $\theta_z = \phi_s - 2\beta l$ variază cu distanţa de la sarcină.

Acum putem exprima pe $\underline{U}(z)$ şi $\underline{I}(z)$ din (3.1.25) şi (3.1.26) cu ajutorul coeficientului de reflexie

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_i\left(e^{-j\beta z} + \underline{\Gamma}_s e^{j\beta z}\right) = \underline{U}_i e^{-j\beta z}\left(1 + \underline{\Gamma}_s e^{2j\beta z}\right) \tag{3.1.33}$$

$$\underline{I}(z) = \left(\underline{U}_i / Z_{c0}\right)\left(e^{-j\beta z} - \underline{\Gamma}_s e^{j\beta z}\right) = \left(\underline{U}_i / Z_{c0}\right)e^{-j\beta z}\left(1 - \underline{\Gamma}_s e^{2j\beta z}\right) \tag{3.1.34}$$

Dacă avem o sarcină adaptată $\underline{Z}_s = Z_{co}$, atunci $\underline{\Gamma}_s = 0$ şi magnitudinea (modulul) tensiunii $|\underline{U}(z)| = |\underline{U}_i(z)|e^{-j\beta z}|$ este constantă în lungul liniei. Când sarcina este neadaptată $\underline{Z}_s \neq Z_{co}$ există unde reflectate, care împreună cu undele incidente formează *unde staţionare*, iar magnitudinea tensiunii $\underline{U}(z)$ nu este constantă în lungul liniei. Într-adevăr avem

$$|\underline{U}(z)| = |\underline{U}_i(z)|\left|\left(1 + \underline{\Gamma}_s e^{2j\beta z}\right)\right| = |\underline{U}_i(z)|\left|\left(1 + \underline{\Gamma}_s e^{-2j\beta l}\right)\right| = |\underline{U}_i(z)|\left|\left(1 + \Gamma_s e^{j(\phi_s - 2\beta l)}\right)\right| \tag{3.1.35}$$

în care $l = -z$ este o distanţă pozitivă măsurată de la sarcină ($z = 0$). Maximul lui $|\underline{U}(z)|$ survine când faza totală $\theta_{z\max} = \Phi_s - 2\beta l$ este egală cu 2nπ pentru care $exp(j2n\pi) = 1$, deci

$$|\underline{U}(z)|_{max} = U_M = |\underline{U}_i(z)|(1 + \Gamma_s); \tag{3.1.36}$$

minimul lui $|\underline{U}(z)|$ survine când faza totală este $\theta_{z\min} = (2n+1)\pi$, pentru care $exp[j(2n+1)\pi] = -1$, prin urmare

$$|\underline{U}(z)|_{min} = U_m = |\underline{U}_i(z)|(1 - \Gamma_s) \tag{3.1.37}$$

Raportul dintre valoarea maximă şi cea minimă este numit *factor de undă staţionară* (mărime scalară)

$$\sigma_{us} = \frac{U_M}{U_m} = \frac{1 + \Gamma_s}{1 - \Gamma_s} \tag{3.1.38}$$

(în literatura de limbă engleză este numit „*voltage standing wave ratio*", fiind identificat prin acronimul VSWR). Se observă că $\sigma_{us}$ poate lua valori între $1 \leq \sigma_{us} < \infty$; valoarea $\sigma_{us} = 1$ corespunde cazului de sarcină adaptată $\underline{Z}_s = Z_{co}$. Din (3.1.33) se observă că distanţa dintre două maxime succesive ale tensiunii este $\Delta l_M = 2\pi / 2\beta = \lambda / 2$, iar distanţa dintre un maxim şi un minim este $\Delta l_{mM} = \lambda / 4$; λ este lungimea de undă în linia de transmisie.

**2°. Impedanţa de intrare**

Termenul *impedanţă de intrare* defineşte impedanţa liniei de transmisie văzută în punctul $l = -z$, spre sarcină. Având în vedere că pentru linii neadaptate $|\underline{U}(z)|$ şi $|\underline{I}(z)|$ variază în lungul liniei, iar puterea mediată în timp transmisă este constantă (pentru o sarcină dată), *impedanţa de intrare variază cu distanţa* de la sarcină. Prin analogie cu (2.5.8) puterea mediată în timp transmisă prin linie, definită în punctul $z$, este (ţinând cont de (3.1.33) şi (3.1.34))

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} Re\left[\underline{U}(z)\underline{I}^*(z)\right] = \frac{1}{2}\frac{|\underline{U}_i(z)|^2}{Z_{c0}} Re\left[1 - \Gamma_s^2 + \underline{\Gamma}_s e^{j2\beta z} - \underline{\Gamma}_s{}^* e^{-j2\beta z}\right] \tag{3.1.39}$$

Având în vedere că diferenţa ultimilor doi termeni din paranteza pătrată dă o mărime pur imaginară, se obţine

$$\langle P \rangle = \frac{|\underline{U}_i(z)|^2}{2Z_{c0}}\left(1 - \Gamma_s^2\right) \tag{3.1.40}$$

Evident pentru $\Gamma_s = 1$ ($\underline{Z}_s = 0$ şi $\underline{Z}_S = \infty$) întreaga putere este returnată la generator (se admite că generatorul este adaptat la linie); dacă $\Gamma_s = 0$ ($\underline{Z}_s = Z_{co}$) întreaga putere este transmisă sarcinii.
Dacă fixăm originea la sarcină *(z = 0)* din (3.1.15) şi (3.1.16) se poate scrie: la sarcină

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_2,\ \underline{I}(0) = \underline{I}_2,\ \underline{Z}_s = \underline{U}_2 / \underline{I}_2; \tag{3.1.41}$$

la distanța *l* de sarcină

$$\underline{U}(l) = \underline{U}_1,\ \underline{I}(l) = \underline{I}_1, \tag{3.1.42}$$

Ținând cont şi de notațiile (3.1.19), soluțiile (3.1.15), (3.1.16) pot fi aduse la forma:

$$\underline{U}(z) = \underline{U}_2 \cosh(\gamma z) + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \sinh(\gamma z) \tag{3.1.43}$$

$$\underline{I}(z) = (\underline{U}_2 / \underline{Z}_c) \sinh(\gamma z) + \underline{I}_2 \cosh(\gamma z) \tag{3.1.44}$$

Impedanța de intrare în punctul *l* va fi

$$Z_{in}(l) = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cosh(\gamma l) + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \sinh(\gamma l)}{(\underline{U}_2 / \underline{Z}_c) \sinh(\gamma l) + \underline{I}_2 \cosh(\gamma l)} \tag{3.1.45}$$

care se aduce la forma (după divizare cu $\underline{I}_2 \cosh(\gamma l)$)

$$\underline{Z}_{in}(l) = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_s + \underline{Z}_c \tanh(\gamma l)}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_s \tanh(\gamma l)} \tag{3.1.46}$$

În cazul liniilor de transmisie fără pierderi avem $\underline{Z}_c = Z_{co}$, iar ultima relație devine

$$\underline{Z}_{in}(l) = Z_{c0} \frac{\underline{Z}_s + jZ_{c0} \tan(\beta l)}{Z_{c0} + j\underline{Z}_s \tan(\beta l)} \tag{3.1.47}$$

Cazuri particulare: a) pentru $\underline{Z}_s = Z_{co}$ rezultă $\underline{Z}_{in}(l) = Z_{co}$, astfel impedanța de intrare la generatorul plasat la distanța *l* de sarcină, este egală cu impedanța caracteristică; b) pentru $\underline{Z}_s = 0$ rezultă $\underline{Z}_{in}(l) = jZ_{co} \tan(\beta l)$; c) pentru $\underline{Z}_s = \infty$ rezultă $\underline{Z}_{in}(l) = -jZ_{co} \tan(\beta l)$; d) pentru linia de lungime l = λ/4 (βl = π/2) rezultă

$$\underline{Z}_{in}(\lambda/4) = Z_{c0}^2 / \underline{Z}_s \tag{3.1.48}$$

astfel linia de lungime λ/4 se comportă ca un transformator de impedanță, adică transformă impedanța de sarcină, urmărindu-se adaptarea.

**3°. Diagrama circulară Smith**

Diagrama Smith constituie o tehnică grafică de reprezentare a impedanțelor şi a coeficientului de reflexie în liniile de transmisie; această diagramă este extrem de utilă pentru ilustrarea fenomenelor care au loc în linii şi poate constitui un suport important în proiectarea asistată de calculator. Utilitatea reală a diagramei Smith constă în faptul că permite trecerea de la coeficienții de reflexie la impedanțele normate, şi invers.

În general, diagrama Smith se construieşte fie „la sarcină", fie într-un punct oarecare pe linie; ne oprim întâi asupra variantei „la sarcină". Notăm prin $\underline{Z}_{sn}$ impedanța de sarcină normată

$$\underline{Z}_{sn} = \frac{\underline{Z}_s}{Z_{c0}} = R_n + jX_n \tag{3.1.49}$$

(s-a considerat linie fără pierderi). Coeficientul de reflexie la sarcină (3.1.29) devine

$$\underline{\Gamma}_s = \frac{\underline{Z}_{sn} - 1}{\underline{Z}_{sn} + 1} = \Gamma_s e^{j\phi_s} \tag{3.1.50}$$

de unde se scoate

$$\underline{Z}_{sn} = \frac{1+\underline{\Gamma}_s}{1-\underline{\Gamma}_s} = \frac{1+\Gamma_s e^{j\phi_s}}{1-\Gamma_s e^{j\phi_s}} \tag{3.1.51}$$

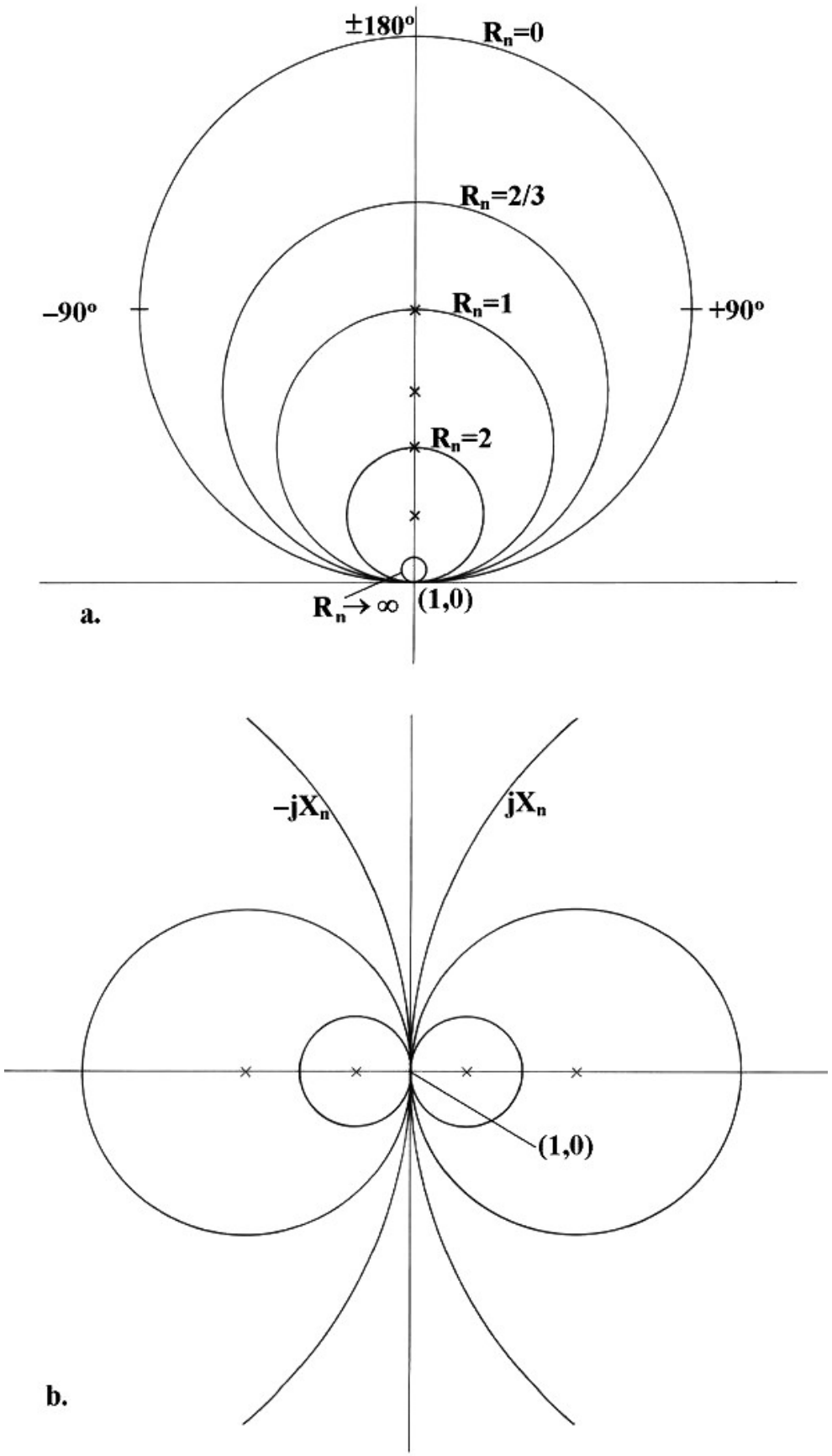



**Fig. 3.3. Construcția diagramei circulare Smith: a – cercuri de rezistență constantă; b – cercuri de reactanță constantă**

Punem

$$\underline{\Gamma}_s = \Gamma_r + j\Gamma_i \tag{3.1.52}$$

ținând cont de (3.1.49) şi (3.1.52) se poate scrie

$$R_n + jX_n = \frac{(1+\Gamma_r)+j\Gamma_i}{(1-\Gamma_r)-j\Gamma_i} \tag{3.1.53}$$

Prin identificarea părților reale şi imaginare se obține

$$R_n = \frac{1-\Gamma_r^2-\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{3.1.54}$$

$$X_n = \frac{2\Gamma_i^2}{(1-\Gamma_r)^2+\Gamma_i^2} \tag{3.1.55}$$

care pot fi puse sub forme convenabile pentru interpretări geometrice; rezultă

$$\left(\Gamma_r - \frac{R_n}{1+R_n}\right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1+R_n}\right)^2 \tag{3.1.56}$$

$$(\Gamma_r - 1)^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{X_n}\right)^2 = \frac{1}{X_n^2} \tag{3.1.57}$$

relații care reprezintă două familii de cercuri în planul complex $(\Gamma_r, \Gamma_i)$. Relația (3.1.56) reprezintă ecuația unei familii de cercuri pentru rezistențe normate $R_n = \mathrm{Re}(\underline{Z}_{sn})$, având centrele de coordonate $[R_n/(1+R_n), 0]$ şi raze $r_N = 1/(1+R_n)$. Centrele acestor cercuri sunt dispuse pe axa rezistențelor $(\Gamma_i = 0)$ şi toate trec prin punctul *(1,0)*, adică $\Gamma_r = 1, \Gamma_i = 0$ (Fig.3.3a). Relația (3.1.57) reprezintă ecuația unei familii de cercuri pentru reactanțe normate $X_n = \mathrm{Im}(\underline{Z}_{sn})$, având centrele de coordonate $[1,\ 1/X_n]$ şi raze $r_N = 1/X_n$. Centrele acestor cercuri sunt dispuse pe axa orizontală $\Gamma_r = 1$ şi toate trec prin același punct *(1,0)*, așa cum se arată în Fig. 3.3b; pentru claritate originea acestor cercuri a fost deplasată în jos.

Trebuie observat că cercurile de rezistență constantă şi cele de reactanță constantă, reprezentate în planul complex $\Gamma_s$ al coeficientului de reflexie, sunt ortogonale în punctele de intersecție; având în vedere că şi dreptele $R_n = const$, $X_n = const$ sunt ortogonale în planul complex $\underline{Z}_{sn}$, se poate afirma că relațiile (3.1.49) - (3.1.57) definesc transformări conforme, deoarece se conservă ortogonalitatea curbelor în punctele de intersecție.

Liniatura standard a diagramei Smith este arătată în Fig. 3.4. în care s-a efectuat coincidența punctelor de tangență ale cercurilor *(1,0)* şi a fost reținută numai partea superioară a Fig.3b.; se observă că diagrama standard are cercuri periferice calibrate în lungimi de undă "spre generator" şi "spre sarcină". Prezența acestor cercuri este justificată de faptul că diagrama Smith poate fi utilizată ca metodă grafică de rezolvare a problemelor legate de impedanța de intrare a liniilor de transmisie. Impedanța de intrare $\underline{Z}_{in}(l)$ (3.1.47) poate fi exprimată în funcție de coeficientul de reflexie generalizat (3.1.31); dacă în (3.1.33) şi (3.1.34) se pune *l = -z*, se poate scrie o expresie a impedanței de intrare în funcție de coeficientul de reflexie

$$\underline{Z}_{in} = Z_{c0}\frac{1+\underline{\Gamma}_s e^{-j2\beta l}}{1-\underline{\Gamma}_s e^{-j2\beta l}} = Z_{c0}\frac{1+\underline{\Gamma}_s e^{j(\phi_s-2\beta l)}}{1-\underline{\Gamma}_s e^{j(\phi_s-2\beta l)}} \tag{3.1.58}$$

această expresie se poate obține şi din (3.1.51) în care mai întâi se generalizează coeficientul de reflexie.

În expresia (3.1.58) $l$ este o mărime pozitivă măsurată de la generator spre sarcină; de asemenea (3.1.58) diferă de (3.1.51) numai prin unghiul de fază. Astfel dacă se determină coeficientul de reflexie la sarcină $\underline{\Gamma}_s$ , atunci se poate determina impedanța de undă normată $\underline{Z}_{in}(l)/Z_{co} = \underline{Z}_{inN}(l)$ văzută la distanța $l$ de sarcină. Pentru aceasta este suficient să rotim punctul găsit pe diagramă cu unghiul $2\beta l$ în sensul acelor ceasornicului; raza rămâne aceiaşi deoarece modulul coeficientului de reflexie rămâne neschimbat. Se observă ca scala cercurilor periferice acoperă valorile cuprinse între 0 şi λ /2; astfel o linie de lungime $\lambda/2$ necesită o rotație de $\beta l = \pi$ în jurul centrului diagramei, adică punctul revine la poziția inițială după o rotație completă; acest fapt pune în evidență periodicitatea fenomenelor din liniile de transmisie. Exemple interesante de utilizare a diagramei Smith pot fi găsite de cititor în referințele [1], [4].

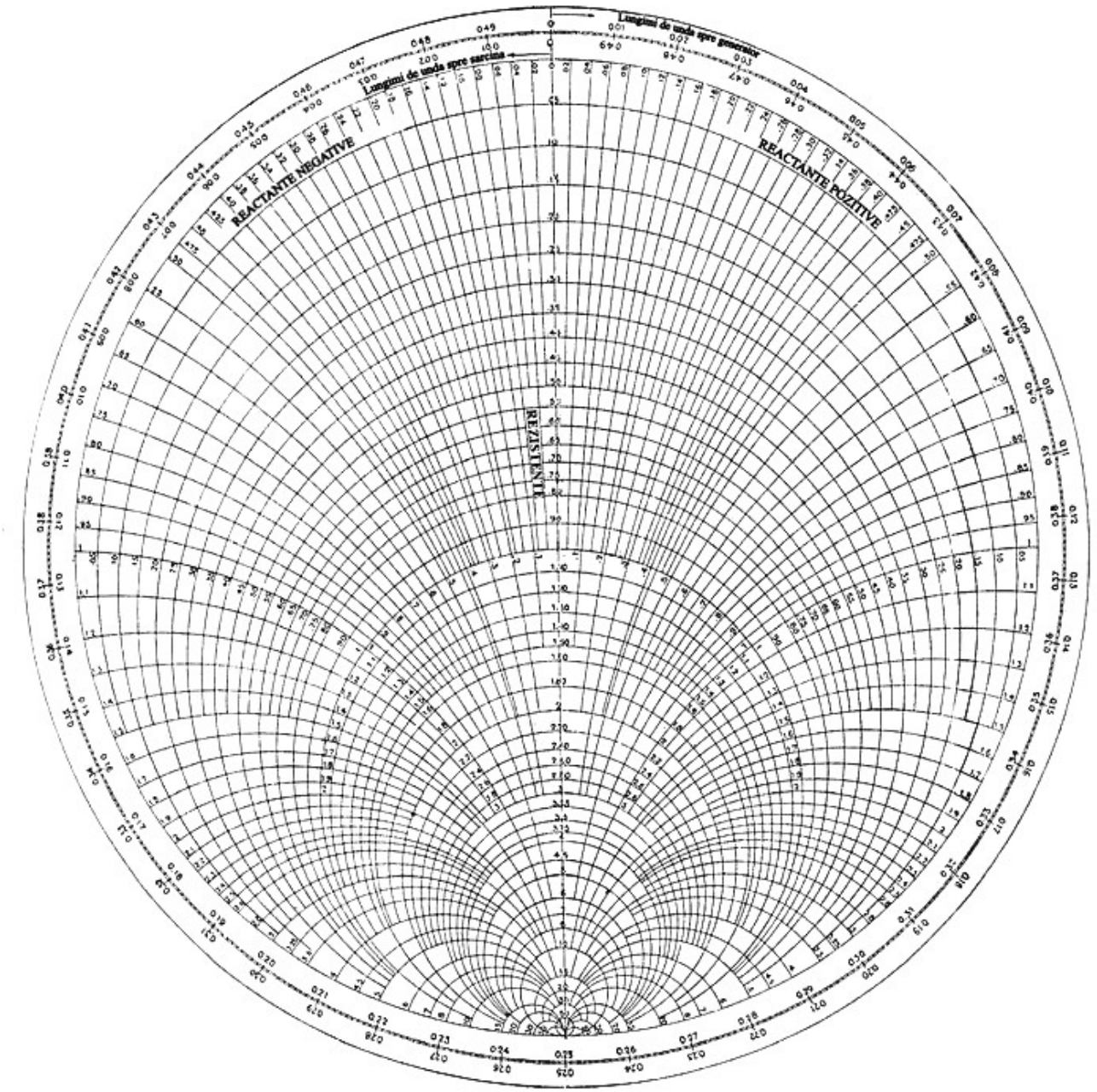



**Fig. 3.4. Diagrama Smith; Liniatură standard**

### 3.1.3. Parametrii liniilor bifilare

Sub formă generală parametrii lineici ai liniilor bifilare $L_0, C_0, R_0, G_0$ se determină pe baza unei analize de câmp; liniile de câmp electric şi magnetic se întind pe un spaţiu relativ mare, astfel determinarea riguroasă a condiţiilor la limită devine o sarcină laborioasă. Având în vedere că linia bifilară reprezintă un sistem deschis, determinarea precisă a parametrilor constituie o încercare extrem de dificilă. O analiză de câmp riguroasă pentru determinarea parametrilor lineici pate fi efectuată în cadrul ghidurilor de undă coaxiale şi a liniilor microstrip. În secţiunea de faţă se prezintă metode aproximative de determinare a parametrilor lineici, în cadrul cărora se disting trei etape: 1°) se consideră linia ideală (fără pierderi) şi se determină parametrii $L_0$ şi $C_0$; 2°) mediul dintre conductoare este un dielectric cu pierderi şi se determină parametrul $G_0$; 3°) cele două conductoare sunt de conductivitate finită şi se determină parametrul $R_0$.

**1°. Linie ideală.**

Se presupune că linia este formată din două conductoare metalice de conductivitate infinită şi secţiuni transversale uniforme; mediul ce înconjoară conductoarele se presupune omogen, isotrop şi fără pierderi, caracterizat prin parametrii electromagnetici (ε, μ); de asemenea, se admite că orice alte corpuri sunt suficient de depărtate pentru a nu perturba distribuţia liniilor de câmp din jurul celor două conductoare. Într-o astfel de linie ideală se poate propaga modul transversal-electromagnetic (TEM). Configuraţiile câmpului electric şi magnetic în plan transversal şi longitudinal sunt arătate în Fig. 3.5.a, b.

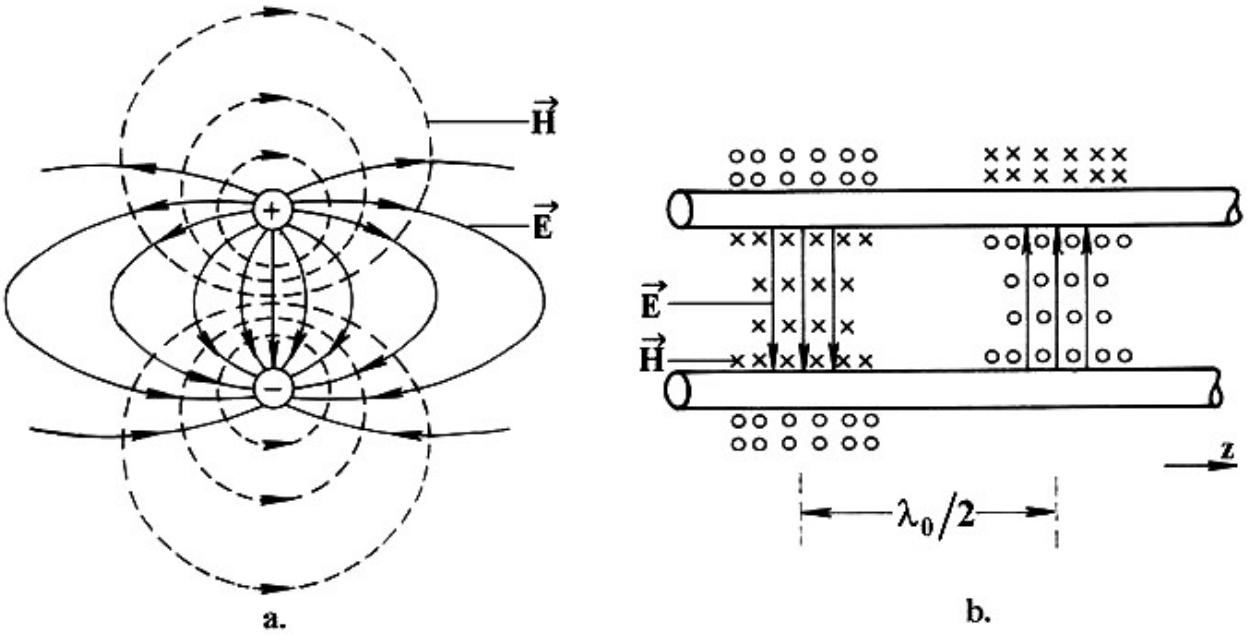



**Fig. 3.5. Configuraţia liniilor de câmp electric şi magnetic în linia bifilară: a – secţiune transversală; b – secţiune longitudinală**

În cazul modului TEM avem concomitent $E_z = 0$ , $H_z = 0$. Pe baza relaţiilor existente între componentele transversale şi longitudinale deduse în Capitolul 2 (relaţiile(2.2.24) şi (2.2.30)) se poate scrie

$$\nabla_T \cdot \vec{E}_{0TEM} = 0, \quad \nabla_T \times \vec{E}_{0TEM} = 0 \tag{3.1.59}$$

Ultimele două relaţii implică faptul că $\vec{E}_{OTEM}$ reprezintă soluţia unei probleme bidimensionale din electrostatică; a doua ecuaţie din (3.1.59) permite să scriem

$$\vec{E}_{0TEM} = -\nabla_T \Psi_{TEM}(x, y) \tag{3.1.60}$$

$$E_{TEM} = \vec{E}_T = -\nabla_T \Psi_{TEM}(x, y) e^{-jkz} = \vec{E}_{OT} e^{-jkz}$$

unde: $\Psi_{TEM}(x,y)$ este un potențial scalar transversal între cele două conductoare; $k=\omega(\varepsilon\mu)^{1/2}$ este constanta de propagare; s-a notat $\vec{E}_{OT}=\vec{E}_{OTEM}$. Prima ecuație din (3.1.59) devine

$$\nabla_T^2\Psi_{TEM}(x,y)=0 \tag{3.1.61}$$

care este o ecuație de tip Laplace; comparând cu ecuația (2.2.35) se observă că în (3.1.61) avem $k_\lambda^2=0$, fapt ce permite să scriem $\gamma=j\beta$, $\beta=k=\omega(\varepsilon\mu)^{1/2}$ (vezi (2.2.36)). Pentru câmpul magnetic se poate scrie o expresie similară cu (3.1.60)

$$\vec{H}_{TEM}=\vec{H}_T=(\vec{E}_T/\underline{Z}_{TEM})=\vec{H}_{OT}e^{-jkz} \tag{3.1.62}$$

În plan transversal avem $\nabla_T\times\vec{E}_T=0$, astfel valoarea integralei de câmp între cele două conductoare nu depinde de drum; explicația fizică constă în faptul că absența componentei longitudinale a câmpului magnetic face imposibilă inducerea unui potențial în jurul oricărei curbe închise în planul (x,y); se poate scrie

$$U_0(x,y)=-\int_{C_1}^{C_2}\vec{E}_{OT}\cdot d\vec{l}=\int_{C_1}^{C_2}\nabla_T\Psi(x,y)\cdot d\vec{l}=\int_{C_1}^{C_2}d\Psi(x,y) \tag{3.1.63}$$

unde $C_2-C_1=D-2a$ (Fig. 3.1.a), prin urmare, asociat cu unda $\vec{E}_T$ definită de (3.1.60), va exista o tensiune unică $U_0(x,y)$ care se propagă în lungul liniei cu aceiaşi constantă de propagare k.

Pentru obținerea inductanței lineice $L_0$ este necesar să se calculeze energia înmagazinată în câmpul magnetic transversal; se disting două componente: prima se referă la câmpul magnetic din materialul conductoarelor, a doua la câmpul magnetic dintre conductoare. Din teorema Poynting rezultă că energia mediată în timp a câmpului magnetic pe unitate de lungime a liniei are expresia (1.4.29)

$$W_H=\frac{\mu}{4}\int_S\vec{H}_{0T}\cdot\vec{H}_{0T}^*dS \tag{3.1.64}$$

unde S este aria transversală; din teoria clasică a circuitelor avem $W_E=L_0|I_0|^2/4$, prin urmare inductanța lineică este

$$L_0=\frac{\mu}{|I_0|^2}\int_S\vec{H}_{0T}\cdot\vec{H}_{0T}^*dS \tag{3.1.65}$$

unde $|I_0|$ este modulul curentului longitudinal printr-un conductor. Inductanța $L_0$ are două componente $L_{01}$ datorată câmpului magnetic din interiorul conductoarelor; $L_{02}$ datorată câmpului magnetic din spațiul ce înconjoară conductoarele. Conform referinței [3] se obține: $L_{01}=\mu_c/4\pi$ unde $\mu_c$ este permeabilitatea magnetică a metalului;

$$L_{02}=\frac{\mu}{4}\ln\left(\frac{(D-a)}{a}\right) \tag{3.1.66}$$

unde μ este permeabilitatea magnetică a mediului dintre conductoare. În multe cazuri se poate aproxima *D>>a*, astfel se obține

$$L_0=L_{01}+L_{02}=\frac{\mu_c}{4\pi}+\frac{\mu}{\pi}\ln\left(\frac{(D-a)}{a}\right)\cong\frac{\mu}{\pi}\ln(D/a) \tag{3.1.67}$$

Pentru obținerea capacității lineice $C_0$ este necesar să se calculeze energia înmagazinată în câmpul electric a cărui configurație este arătată în Fig. 3.5a. Conform teoremei Poynting, energia mediată în timp a câmpului electric transversal pe unitate de lungime este dată de expresia (1.4.28)

$$W_E=\frac{\varepsilon}{4}\int_S\vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}_{0T}^*dS \tag{3.1.68}$$

Din teoria circuitelor cu constante concentrate avem expresia $W_E = C_0|U_0|^2/4$, prin urmare capacitatea lineică este:

$$C_0 = \frac{\varepsilon}{|U_0|^2}\int_S \vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}_{0T}^{*}\,dS \tag{3.1.69}$$

Expresia aproximativă a mărimii $C_0$ este [3]

$$C_0 \cong \frac{\pi\varepsilon}{\ln(D/a)} \tag{3.1.70}$$

unde s-a considerat mediul dielectric fără pierderi; o expresie exactă $C_0 = \pi\varepsilon/arccos\,h(D/a)$ este dată în [1]. Pe baza expresiilor (3.1.67) şi (3.1.70) se pot face precizări suplimentare asupra mărimilor ce caracterizează linia de transmisie ideală; expresiile date în (3.1.24) devin:

$$\begin{aligned}
\beta &= \omega\left[\frac{\mu}{\pi}ln(D/a)\frac{\pi\varepsilon}{ln(D/a)}\right]^{1/2} = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} = k\\
\underline{Z}_c = Z_{c0} &= \frac{1}{\pi}ln(D/a)\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{1/2} = \frac{1}{\pi}ln(D/a)Z_0\\
v_{ph} &= (L_0C_0)^{-1/2} = (\mu\varepsilon)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{3.1.71}$$

în care $Z_0 = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ reprezintă impedanța de undă *intrinsecă* a mediului în care sunt amplasate conductoarele.

Expresiile (3.1.71) ne permit să formulăm câteva constatări importante cu privire la linia fără pierderi: impedanța caracteristică $Z_{co}$ este determinată de configurația geometrică în plan transversal a conductoarelor şi de parametrii mediului, prin intermediul impedanței intrinseci; constanta de fază β şi viteza de fază $v_{ph}$ au aceleaşi expresii ca şi în cazul propagării undelor electromagnetice plane într-un mediu dielectric, isotrop, infinit şi fără pierderi, caracterizat prin parametrii ε şi μ; rezultă că unda electromagnetică TEM din linia bifilară fără pierderi are viteza de fază egală cu cea a undelor electromagnetice plane. Prin urmare în linia fără pierderi energia electromagnetică se propagă prin mediul în care sunt amplasate conductoarele; calculele arată că o fracțiune importantă a energiei (în jur de 80%) se propagă în spațiul dintre conductoare, delimitat prin curbele îngroşate din Fig. 3.5a.

Puterea transportată în lungul liniei poate fi pusă sub forma (se ține cont de (1.4.28) şi (1.4.29))

$$P_z = \frac{1}{2}Re\int_S \vec{E}_{0T}\times\vec{H}_{0T}^{*}\cdot\hat{k}ds = \frac{1}{2Z_{c0}}Re\int_S \vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}_{0T}^{*}ds = \frac{2W_E}{\varepsilon Z_{c0}} = v_{ph}(W_E + W_H) \tag{3.1.72}$$

Ținând cont de mărimile $U_0$ şi $I_0$ definite mai sus şi de relația $Z_{CO} = U_0/I_0$, ultima relație se aduce la forma

$$P_z = \frac{1}{2}Z_{c0}I_0^2 = \frac{1}{2}U_0I_0 \tag{3.1.73}$$

Prin urmare linia ideală se comportă ca un element de circuit cu constante concentrate (de joasă frecvență); undele de tensiune şi de curent au expresiile:

$$U(z) = U_0e^{-jkz}, \qquad I(z) = I_0e^{-jkz} \tag{3.1.74}$$

**2°. Linii cu pierderi.**

Față de linia ideală în care modul fundamental (dominant) de propagare este un mod TEM, în liniile cu pierderi are loc o perturbare a acestui mod prin apariția de componente longitudinale; având în vedere că, în general, liniile bifilare au pierderi mici, componentele longitudinale au valori foarte mici în comparație cu componentele transversale, astfel pentru determinarea parametrilor $G_0$

şi $R_0$ se vor folosi metode de perturbaţie. Pierderile sunt de două tipuri: a) pierderi în mediul ce înconjoară conductoarele, care determină valoarea conductanţei lineice $G_0$ şi b) pierderi în conductoarele metalice, care determină valoarea rezistenţei lineice $R_0$.

*a) Pierderi în mediul dielectric*. Mediul care înconjoară cele două conductoare poate prezenta atât pierderi dielectrice clasice cauzate de partea imaginară $\varepsilon''$ a permitivităţii, cât şi pierderi datorate unor sarcini libere care duc la apariţia unei conductivităţi $\sigma_m$ a mediului. Ambele tipuri de pierderi pot fi luate în considerare prin introducerea permitivităţii echivalente, definită prin relaţiile (1.3.11) şi (1.3.12); într-adevăr se poate scrie

$$\underline{\varepsilon}_{\text{ec}} = \varepsilon - \text{j}\sigma_{\text{m}}/\omega = \varepsilon'\text{-j}(\varepsilon''+\sigma_{\text{m}}/\omega) = \varepsilon'(1-\tan\delta_E) \tag{3.1.75}$$

unde $\tan\delta_E = (\varepsilon''+\sigma_m/\omega)/\varepsilon'$. Caracterul pierderilor în mediu depinde de factorul dominant din (3.1.75): dacă $\varepsilon'' >> \sigma_m/\omega$ dominante sunt pierderile dielectrice; dacă $\varepsilon'' << \sigma_m/\omega$ dominante sunt pierderile datorate conductivităţii $\sigma_m$. În majoritatea cazurilor practice avem $\sigma_m/\omega >> \varepsilon''$ şi $\sigma_m = \omega\varepsilon\tan\delta_E$, astfel pierderile sunt datorate curenţilor transversali dintre conductoare, pe unitate de lungime; se poate scrie

$$I_{tr} = \int_{S_{12}} \sigma_m \hat{n}\cdot\vec{E}dl \tag{3.1.76}$$

unde $S_{12}$ este o lungime mediată a liniilor de câmp electric dintre conductoare; $\hat{n}$ este versorul normalei care iese din conductorul presupus cu sarcină pozitivă în momentul considerat. Efectuând integrarea se obţine

$$I_{tr} = \int_{S_{12}} \sigma_m \frac{\rho_s}{\varepsilon} dl = \frac{\sigma_m}{\varepsilon} Q \tag{3.1.77}$$

unde: $\rho_S$ este densitatea de sarcină de suprafaţă, Q este sarcina electrică existentă pe suprafaţa conductorului, pe unitate de lungime. Având în vedere relaţia $U_0 = Q/C_0$, se poate defini conductanţa lineică datorată sarcinilor libere:

$$G_{0\sigma} = \frac{I_{tr}}{U_0} = \frac{\sigma_m C_0}{\varepsilon} = \omega C_0 \tan\delta_E \tag{3.1.78}$$

Se observă că, spre deosebire de problema similară din electrostatică, conductanţa $G_{0\sigma}$ variază cu frecvenţa, atât direct prin factorul ω cât şi prin $\tan\delta_E$ în al cărei argument intră şi frecvenţa. În acest caz constanta de propagare devine o mărime complexă; într-adevăr, ţinând cont de (3.1.75) se poate scrie (se consideră $\varepsilon'' = 0$ şi $\tan\delta_E << 1$)

$$jk = j\omega[\mu\varepsilon(1-j\tan\delta_E)]^{1/2} \cong j\omega(\mu\varepsilon)^{1/2}(1-j\frac{1}{2}\tan\delta_E) = \alpha + j\beta \tag{3.1.79}$$

Plecând de la relaţiile (3.1.71) şi (3.1.78) avem

$$\gamma = \alpha + j\beta = \frac{1}{2} Z_{co} G_{o\sigma} + j\omega(\mu\varepsilon)^{1/2} \tag{3.1.80}$$

Dacă se iau în considerare şi pierderile dielectrice clasice, definite prin relaţia (1.4.32) se poate scrie

$$P_{d0} = \frac{\omega\varepsilon''}{2}\int_{V_l} \vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}^*_{0T}\, dl \tag{3.1.81}$$

unde $V_l$ este volumul pe unitate de lungime al spaţiului dintre şi în jurul conductoarelor, în care acţionează câmpul electric transversal. Din teoria circuitelor cu constante concentrate avem $P_{do} = G_{od}\left|U_0\right|^2/2$, prin urmare conductanţa lineică datorată pierderilor dielectrice clasice este

$$G_{0d} = \frac{\omega\varepsilon''}{|U_0|^2}\int_{V_1}\vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}_{0T}^{*}\,dl \tag{3.1.82}$$

Linia va prezenta o conductanță totală $G_0 = G_{0\sigma} + G_{0d}$.

*b) Pierderi în conductoare*. Dacă cele două conductoare au conductivitatea finită, o fracțiune din puterea transmisă este absorbită în conductoare, prin urmare va exista o componentă transversală a vectorului Poynting, având sensul de la mediu spre conductoare; existența acestei componente implică faptul că va trebui să fie prezentă cel puțin o componentă longitudinală a câmpului electric $E_z$. În general, vor exista componente longitudinale atât pentru câmpul electric, cât şi pentru cel magnetic; la rândul ei componenta longitudinală a câmpului magnetic duce la apariția unor curenți transversali pe conductoare. Trebuie subliniat că aceşti curenți transversali apar ca urmare a perturbației modului dominant TEM, astfel curenții transversali sunt foarte mici în comparație cu curenții longitudinali. Pierderile datorate curenților transversali sunt foarte mici în comparație cu pierderile datorate curenților longitudinali; astfel într-o primă aproximație se vor neglija curenții transversali [2].

Aşa cum s-a arătat în secțiunea 2.5.3 procesele de propagare de la dielectric spre conductor pot fi caracterizate prin introducerea unei impedanțe se suprafață $\underline{Z}_{sm}$, având expresia (2.5.74)

$$\underline{Z}_{sm} = \frac{1+j}{\sigma\delta_s} = R_s + jX_s \tag{3.1.83}$$

unde $\delta_s = (2/\omega\mu\sigma)^{1/2}$ este adâncimea de pătrundere. Componenta longitudinală a câmpului electric este

$$E_z = \underline{Z}_{sm}\dot{J}_{sf} \tag{3.1.84}$$

unde $\dot{J}_{sf}$ este densitatea curentului de suprafață [A/m], definit prin relațiile (1.3.45), (2.3.47). Puterea pierdută în conductoare pe unitate de lungime este (2.5.79)

$$P_{c0} = \frac{R_S}{2}\oint_{2C_1}\left|J_{sf}\right|^2 dl \tag{3.1.85}$$

Unde: $C_1$ este circumferința unui conductor; $\left|J_{sf}\right|$ este magnitudinea densității de curent pentru modul TEM neperturbat. Pentru a defini o rezistență lineică $R_0$ se utilizează relația $P_c = R_0 I_0/2$, unde $I_0$ reprezintă curentul total pe suprafața unui conductor, fiind dat de expresia

$$I_0 = \oint_{C_1}\left|J_{sf}\right|dl \tag{3.1.86}$$

Expresia rezistenței lineice este

$$R_0 = \frac{2P_{c0}}{I_0^2} = \frac{R_S\oint_{2C_1}\left|J_{sf}\right|^2 dl}{\left(\oint_{C_1}\left|J_{sf}\right|dl\right)^2} \tag{3.1.87}$$

Dacă se iau în considerare ambele tipuri de pierderi determinate prin metode de perturbație, se poate calcula constanta de atenuare, conform definiției (2.5.48) pe care o scriem sub forma

$$\alpha = P_L/2P_z \tag{3.1.88}$$

Considerăm că expresia puterii transportate $P_z$ (3.1.73) rămâne valabilă şi pentru cazul liniei cu pierderi, iar $P_L$ înglobează ambele tipuri de pierderi $P_L = P_{d0} + P_{c0}$; astfel ultima relație devine

$$\alpha = \frac{P_{co}+P_{do}}{2P_z} = \frac{(R_0I_0^2/2)+(G_0U_0^2/2)}{U_0I_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_0}{Z_{co}} + G_0Z_{co}\right) \tag{3.1.89}$$

şi conform (3.1.14) vom scrie $\gamma = \alpha + j\beta$. În practică liniile bifilare sunt considerate sisteme cu pierderi mici, $R_0 << \omega L_0, G_0 << \omega C_0$; în acest caz pentru mărimile β şi $\underline{Z}_c$ se pot utiliza expresiile aproximative

$$\beta \cong \omega(L_0C_0)^{1/2}\left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{R_0}{\omega L_0}-\frac{G_0}{\omega C_0}\right)^2\right] \tag{3.1.90}$$

$$\underline{Z}_c \cong \left(\frac{L_0}{C_0}\right)^{1/2}\left[1-j\left(\frac{R_0}{\omega L_0}-\frac{G_0}{\omega C_0}\right)\right] \tag{3.1.91}$$

Alte expresii aproximative pentru mărimile γ şi $\underline{Z}_c$ pot fi găsite în referința [1] capitolul 3; de exemplu pentru constanta de propagare se propune expresia:

$$\gamma \cong \omega(L_0C_0)^{1/2}\left[1-\frac{j}{2}\left(\frac{R_0}{\omega L_0}-\frac{G_0}{\omega C_0}\right)\right] \tag{3.1.92}$$

## 3.2. GHIDURI DE UNDĂ COAXIALE

### 3.2.1 Ecuații de propagare. Configurații de câmp

**1°.Modul dominant TEM.**

Ghidurile coaxiale (inclusiv cablurile coaxiale) sunt elemente foarte des utilizate în tehnica microundelor; structura uzuală a ghidului coaxial este formată dintr-un conductor central şi un cilindru metalic exterior (Fig.3.6).Câmpul electromagnetic se propagă în spațiul dintre cei doi cilindri metalici; în cazul cablurilor coaxiale acest spațiu este umplut cu un dielectric, iar cilindrul exterior este înlocuit printr-un ecran metalic flexibil. Sub formă generală, expresiile câmpurilor fizice $\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t)$ şi $\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t)$ care se propagă în spațiul dintre conductoare sunt (2.2.14), (2.2.15))

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{\eta})e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \tag{3.2.1}$$

$$\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{\eta})e^{-\gamma z}e^{j\omega t} \tag{3.2.2}$$

unde $\vec{\eta} = \vec{\eta}(\rho,\Phi)$ este un vector bidimensional care , în sistemul de coordonate cilindrice ($\rho,\Phi,z$), depinde de $\rho$ şi de $\Phi$. Descompunând câmpurile $\vec{E}(\vec{r})$ şi $\vec{H}(\vec{r})$ în componentele transversale şi longitudinale conform relațiilor (2.2.1) şi (2.2.2), ecuațiile Maxwell iau forma definită de sistemul (2.2.22) - (2.2.25); considerând modul transversal electromagnetic (TEM) avem concomitent $E_z = 0, H_z = 0$. Referindu-ne la câmpul electric din expresiile (2.2.24) şi (2.2.30) rezultă

$$\nabla_T \cdot \vec{E}_{0T} = 0 \tag{3.2.3}$$

$$\nabla_T \times \vec{E}_{0T} = 0\,; \tag{3.2.4}$$

referindu-ne la câmpul magnetic, din (2.2.25) şi (2.2.32) rezultă

$$\nabla_T \cdot \vec{H}_{0T} = 0 \tag{3.2.5}$$

$$\nabla_T \times \vec{H}_{0T} = 0 \tag{3.2.6}$$

iar din (2.2.29) avem

$$\vec{H}_{0T} = \frac{\gamma}{j\omega\mu}\hat{k}\times\vec{E}_{0T} \tag{3.2.7}$$

Prin urmare relația dintre $\vec{H}_{OT}$ şi $\vec{E}_{OT}$ corespunde unei unde electromagnetice plane.

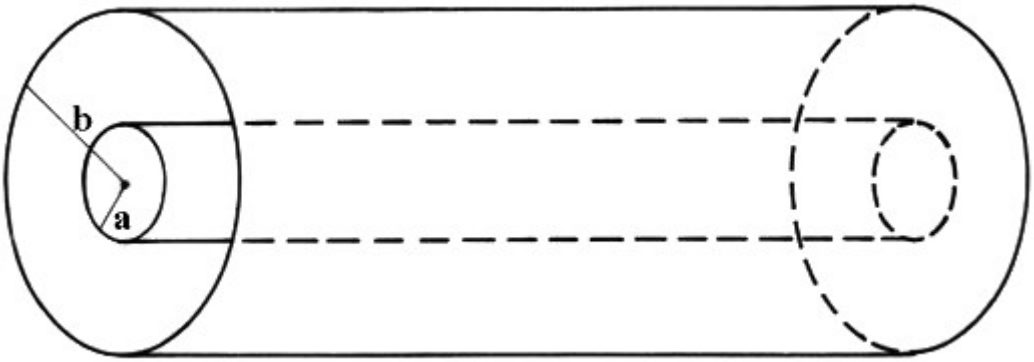



**Fig. 3.6. Ghid metalic coaxial**

Pentru început admitem că ghidul coaxial formează o linie de transmisie ideală având impedanța caracteristică $Z_{co}$ şi constanta de fază $\beta$, în care se propagă modul fundamental (dominant) transversal-electromagnetic; astfel ecuațiile (3.2.1), (3.2.2) pot fi puse sub forma

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) = \vec{E}_{0T}(\rho,\Phi)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} = E_T(\rho,\Phi)e^{j\omega t} \tag{3.2.8}$$

$$\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) = \vec{H}_{0T}(\rho,\Phi)e^{-j\beta z}e^{j\omega t} = H_T(\rho,\Phi)e^{j\omega t} \tag{3.2.9}$$

Relațiile (3.2.3), (3.2.4) implică faptul că $\vec{E}_{OT}(\rho,\Phi)$ reprezintă soluția unei probleme bidimensionale din electrostatică; astfel (3.2.4) permite să scriem

$$\vec{E}_{0T}(\rho,\Phi) = -\nabla_T \Psi(\rho,\Phi) \tag{3.2.10}$$

unde $\Psi(\rho,\Phi)$ reprezintă potențialul scalar transversal între conductorul central şi cilindrul exterior. Introducând în (3.2.3) obținem

$$\nabla_T \cdot \left(-\nabla_T \Psi(\rho,\Phi)\right) = 0; \quad \nabla_T^2 \Psi(\rho,\Phi) = 0 \tag{3.2.11}$$

care reprezintă o ecuație de tip Laplace. Comparând ultima ecuație cu ecuația Helmholtz (2.4.1) pentru ghidul cilindric fără pierderi *($\gamma = j\beta$)* se obține

$$k_\lambda^2 = k^2 + \gamma^2 = k^2 - \beta^2 = 0;\ \beta = k = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} \tag{3.2.12}$$

Prin urmare constanta de fază a ghidului coaxial $\beta$ este egală cu constanta de fază $k$ a mediului dintre conductoare; dacă acest mediu este aer uscat avem $\beta = k_0 = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$ Ghidurile metalice clasice de secțiune dreptunghiulară şi circulară nu pot suporta modul TEM deoarece în astfel de structuri $\Psi(x,y)$ sau $\Psi(\rho,\Phi)$ sunt egale cu zero.

Ținând cont de expresia operatorului Laplace $\nabla_T^2$ în coordonate cilindrice (2.4.4), ecuația Laplace (3.2.11) ia forma

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Psi(\rho,\Phi)}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Psi(\rho,\Phi)}{\partial\Phi^2} = 0 \tag{3.2.13}$$

având condițiile la limită

$$\begin{aligned}\Psi(a,\Phi) &= U_0\\ \Psi(b,\Phi) &= 0\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Pentru rezolvare se aplică metoda separării variabilelor

$$\Psi(\rho,\Phi) = R(\rho)\Psi(\Phi) \tag{3.2.15}$$

astfel (3.2.13) se pune sub forma

$$\frac{\rho^2}{R(\rho)}\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2}+\frac{\rho}{R(\rho)}\frac{dR(\rho)}{d\rho}+\frac{1}{\Psi(\Phi)}\frac{d^2\Psi(\Phi)}{d\Phi^2}=0 \tag{3.2.16}$$

Această ecuație poate fi separată în două ecuații independente, procedând similar ca la ghidul cilindric (2.4.9) şi (2.4.10); fiecare ecuație trebuie să fie egală cu o constantă

$$\frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\Phi^2}=-k_\Phi^2 \tag{3.2.17}$$

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)=-k_\rho^2 \tag{3.2.18}$$

iar

$$k_\Phi^2+k_\rho^2=0 \tag{3.2.19}$$

Soluția generală a ecuației (3.2.17) este de forma

$$\Psi(\Phi)=A_1\cos n\Phi+A_2\sin n\Phi \tag{3.2.20}$$

unde $k_\Phi=n$ trebuie să fie un număr întreg deoarece o rotație cu $2\pi$ a unghiului $\Phi$ nu va schimba soluția; mai mult, potențialul scalar $\Psi(\rho,\Phi)$ nu variază cu unghiul Φ, deci *n* trebuie să fie zero şi (3.2.20) se reduce la o constantă $\Psi_0$. Din (3.2.19) rezultă că şi $k_\rho$ trebuie să fie zero, astfel (3.2.18) devine

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dR(\rho)}{d\rho}\right)=0 \tag{3.2.21}$$

a cărei soluție este de forma

$$R(\rho)=B_1\ln\rho+B_2\,; \tag{3.2.22}$$

de asemenea, ataşând constanta $\Psi_0$, se poate scrie

$$\Psi(\rho,\Phi)=D_1\ln\rho+D_2 \tag{3.2.23}$$

unde constantele de integrare $D_1=\Psi_0B_1, D_2=\Psi_0B_2$ se determină din condițiile la limită (3.2.14); se obține

$$\Psi(\rho,\Phi)=U_0\frac{\ln(b/\rho)}{\ln(b/a)} \tag{3.2.24}$$

Utilizând (3.2.10) se determină câmpul electric transversal

$$\vec{E}_{0T}(\rho,\Phi)=-\nabla_T\Psi(\rho,\Phi)=-\left(\hat{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}+\hat{\Phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\Phi}\right)=\hat{\rho}\frac{U_0}{\rho\ln(b/a)} \tag{3.2.25}$$

iar

$$\vec{E}_T(\rho,\Phi,z)=\vec{E}_{0T}(\rho,\Phi)e^{-j\beta z}=\hat{\rho}\frac{U_0}{\rho\ln(b/a)}e^{-j\beta z} \tag{3.2.26}$$

Pentru determinarea câmpului magnetic se utilizează relația de definiție (3.2.7) în care punem $\gamma=j\beta$; se obține

$$\vec{H}_{0T}(\rho,\Phi)=\frac{\hat{k}\times\hat{\rho}}{Z_0}\frac{U_0}{\rho\ln(b/a)}=\hat{\Phi}\frac{U_0}{Z_0\rho\ln(b/a)} \tag{3.2.27}$$

$$\vec{H}_T(\rho,\Phi,z)=\hat{\Phi}\frac{U_0}{Z_0\rho\ln(b/a)}e^{-j\beta z} \tag{3.2.28}$$

unde $Z_0 = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ este impedanța intrinsecă (de undă) a mediului dintre conductorul central şi cilindrul exterior. Se observă că câmpul electric are componentă numai după direcția $\hat{\rho}$, iar câmpul magnetic are componentă numai după unghiul $\Phi$; cele două componente sunt ortogonale şi perpendiculare pe direcția z.

Expresiile câmpurilor fizice sunt

$$\vec{\mathscr{E}}_T(\rho,\Phi,z,t) = Re\left[\vec{E}_T(\rho,\Phi,z)e^{j\omega t}\right] = \hat{\rho}\frac{U_0}{\rho\, ln(b/a)}cos(\omega t - \beta z) \tag{3.2.29}$$

$$\vec{\mathscr{H}}_T(\rho,\Phi,z,t) = Re\left[\vec{H}_T(\rho,\Phi,z)e^{j\omega t}\right] = \hat{\Phi}\frac{U_0}{\rho Z_0\, ln(b/a)}cos(\omega t - \beta z) \tag{3.2.30}$$

Pentru desenarea configurației câmpului electromagnetic se procedează la fel ca şi pentru ghidurile circulare; avem

$$\vec{\mathscr{E}}_T(\rho,\Phi,z,t)\Big|_{t=0} = \hat{\rho}\frac{U_0}{\rho\, ln(b/a)}cos(\beta z) \tag{3.2.31}$$

$$\vec{\mathscr{H}}_T(\rho,\Phi,z,t)\Big|_{t=0} = \hat{\Phi}\frac{U_0}{\rho Z_0\, ln(b/a)}cos(\beta z) \tag{3.2.31}$$

unde $\beta = 2\pi/\lambda$. Configurația determinată de ultimele două relații este arătată în Fig. 3.7.; în plan transversal configurația este identică cu cea din electrostatică, iar în plan longitudinal tabloul se inversează la fiecare $z = \lambda/2$.

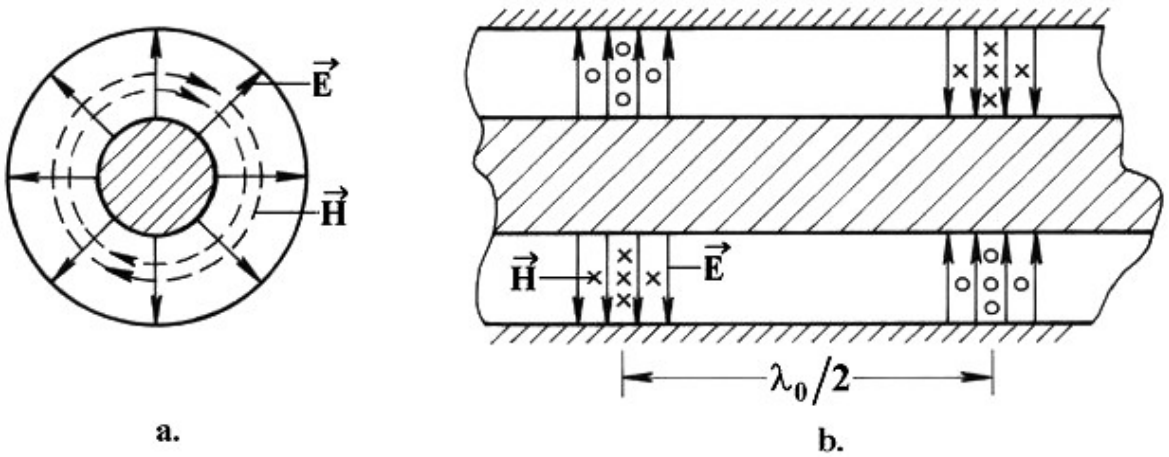



**Fig. 3.7. Configurație de câmp pentru modul dominant TEM în ghidul metalic coaxial: a – secțiune transversală; secțiune longitudinală**

**2° Moduri superioare**.

Pe lângă modul dominant (fundamental) TEM ghidurile coaxiale pot suporta şi moduri TE şi TM, numite *moduri superioare* („moduri de ghid"). În realitate modurile TE şi TM sunt moduri „de tăiere" (evanescente), astfel dacă aceste moduri sunt excitate, ele au doar un efect reactiv asupra surselor şi discontinuităților din ghidul coaxial. Totuşi este bine să fim informați asupra frecvenței critice ("de tăiere") a celui mai inferior „mod de ghid", în scopul înlăturării acestor moduri; în caz contrar pot apărea efecte perturbatoare cauzate de suprapunerea a două sau mai multe moduri cu constante de propagare diferite. Înlăturarea modurilor superioare necesită impunerea de condiții asupra dimensiunilor transversale maxime, în special a razei cilindrului exterior; prin aceasta se limitează puterea maximă care poate fi transmisă prin ghidul coaxial.

*a) Moduri superioare TE*. Aşa cum s-a arătat în secțiunea 2.4.3, modul dominant în ghidul circular este $TE_{11}$, a cărui frecvență de tăiere este minimă (lungimea de undă critică este maximă). Ecuația de propagare Helmholtz pentru componenta longitudinală $H_{oz}(\rho,\Phi)$ are expresia (2.4.1), iar condițiile la limită sunt de tip Neumann (2.4.2); soluția acestei ecuații este dată de produsul expresiilor (2.4.13) şi (2.4.15); rezultă

$$H_{0Z}(\rho,\Phi) = \Psi_0[A_1 J_n(k_\lambda \rho) + A_2 N_n(k_\lambda \rho)]\cos n\Phi \tag{3.2.33}$$

În cazul ghidului coaxial avem $a \le \rho \le b$ , astfel trebuie păstrat şi termenul ce conţine funcţia Neumann, $N_n(k_\lambda \rho)$ . Condiţiile la limită convenabile pentru determinarea constantelor de integrare $A_1$ şi $A_2$ sunt

$$E_{o\Phi}(\rho,\Phi)\big|_{\rho=a} = 0; \quad E_{o\Phi}(\rho,\Phi)\big|_{\rho=b} = 0 \tag{3.2.34}$$

Componentele transversale ale câmpului electric se determină prin utilizarea relaţiilor generale între componentele transversale şi longitudinale (2.2.48); în cazul structurilor cilindrice coaxiale ecuaţia (2.2.48) ia forma (2.4.20) în care $H_{0z}(\rho,\Phi)$ are expresia (3.2.23); se obţine

$$E_{0\rho}(\rho,\Phi) = \frac{j\omega\mu}{k_\lambda^2 \rho} n\Psi_0[A_1 J_n(k_\lambda \rho) + A_2 N_n(k_\lambda \rho)]\sin n\Phi \tag{3.2.35}$$

$$E_{0\Phi}(\rho,\Phi) = \frac{j\omega\mu}{k_\lambda} \Psi_0[A_1 J_n^{'}(k_\lambda \rho) + A_2 N_n^{'}(k_\lambda \rho)]\cos n\Phi \tag{3.2.36}$$

Aplicând condiţiile la limită (3.2.340) ecuaţiei (3.2.36) se obţine

$$A_1 J_n^{'}(k_\lambda a) + A_2 N_n^{'}(k_\lambda a) = 0 \tag{3.2.37}$$

$$A_1 J_n^{'}(k_\lambda b) + A_2 N_n^{'}(k_\lambda b) = 0 \tag{3.2.38}$$

Soluţia netrivială $(A_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0)$ a acestui sistem se obţine când determinantul este zero, astfel rezultă relaţia

$$J_n^{'}(k_\lambda a) N_n^{'}(k_\lambda b) = J_n^{'}(k_\lambda b) N_n^{'}(k_\lambda a) \tag{3.2.39}$$

care reprezintă o ecuaţie caracteristică (de valori proprii) pentru $k_\lambda$ .Valorile lui $k_\lambda$ care satisfac (2.3.39) definesc modurile $TE_{nm}$ în ghidul coaxial; însă (3.2.39) este o ecuaţie transcedentală şi de regulă se rezolvă numeric. Un exemplu de soluţie grafică pentru modul $TE_{11}$ este arătată în Fig.3.8 [1] pentru diferite rapoarte (b/a). O soluţie aproximativă pentru numărul de undă transversal este

$$k_\lambda = [(a+b)/2]^{-1} \tag{3.2.40}$$

iar lungimea de undă critică pentru acest mod va fi

$$\lambda_{H11} = \frac{2\pi}{k_\lambda} \cong \pi(a+b)\,; \tag{3.2.41}$$

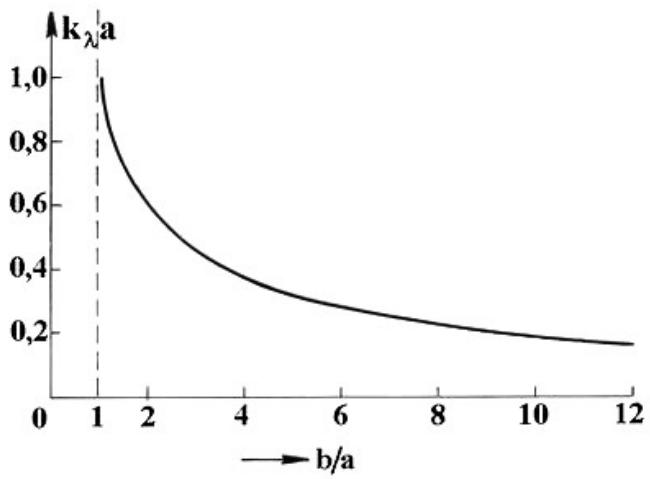



**Fig.3.8. Variaţia frecvenţei de tăiere normate pentru modul $TE_{11}$ în ghidul coaxial**

în [7] pentru modul $TE_{11}$ se dă valoarea $\lambda_{H11} \approx 2.95(a+b)$. Considerăm de exemplu un segment de ghid coaxial având dimensiunile a = 3mm, b = 7mm şi cu aer în interior; din Fig. 3.8 (sau relația (3.2.40)) rezultă $k_\lambda a \cong 0{,}62 (k_\lambda \cong 0{,}21 mm^{-1})$. Frecvența de tăiere va fi $f_{cr} = 10\ GHz$; la frecvențe mai mari decât $f_{cr}$, pe lângă modul fundamental TEM pot apărea şi moduri superioare $TE_{nm}$, începând cu $TE_{11}$.

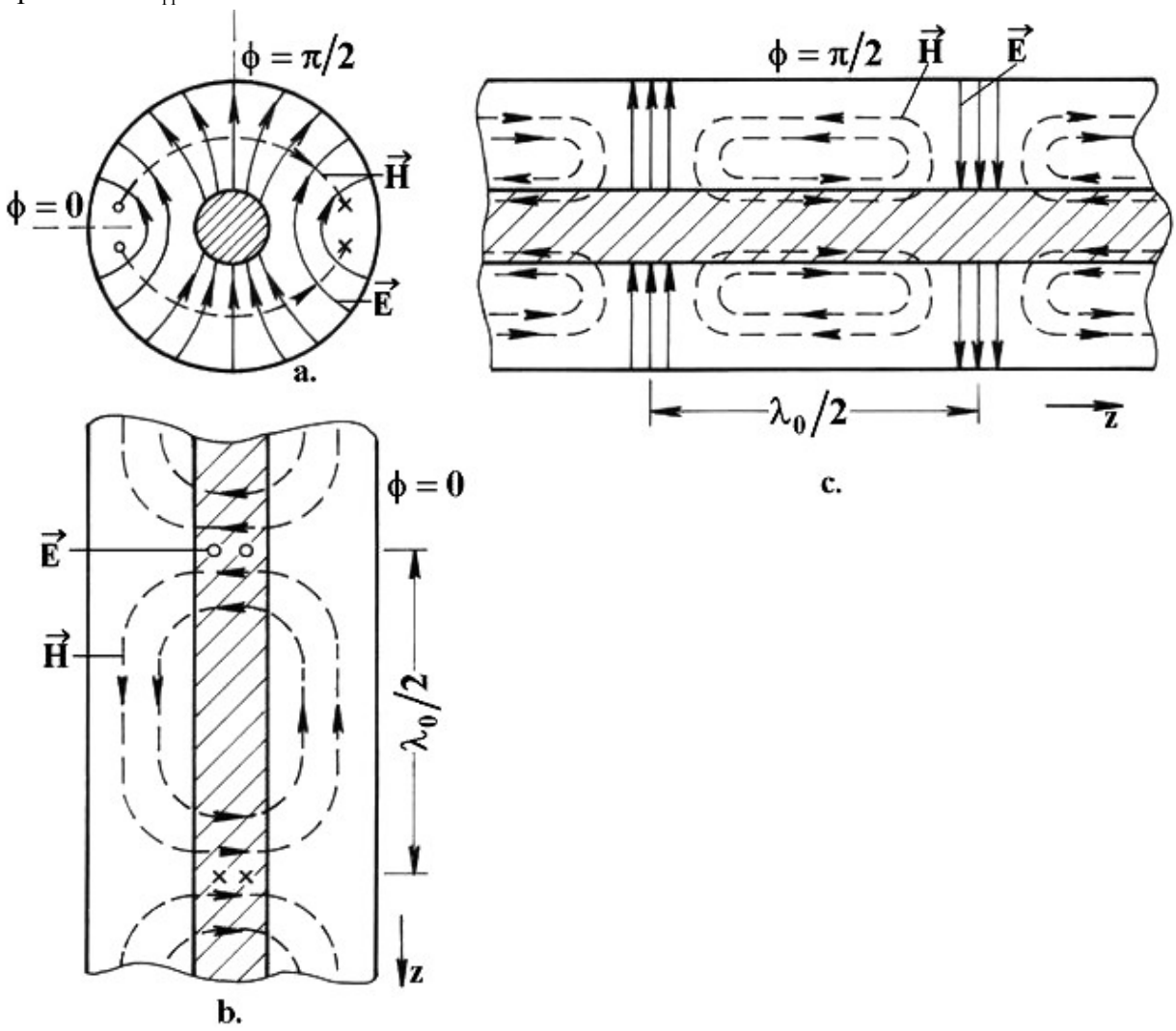



**Fig. 3.9. Configurație de câmp pentru modul $TE_{11}$ în ghidul coaxial: a – secțiune transversală; b – secțiune longitudinală, $\phi = 0$ ; c - secțiune longitudinală, $\phi = \pi/2$**

Din (3.2.37) şi (3.2.3) se scoate

$$-\frac{A_1}{A_2} = \frac{N_n^{'}(k_\lambda a)}{J_n^{'}(k_\lambda a)} = \frac{N_n^{'}(k_\lambda b)}{J_n^{'}(k_\lambda b)} \tag{3.2.42}$$

Ținând cont de dezvoltarea asimptotică a funcțiilor Bessel (Anexa II.2) se poate scrie o expresie generală pentru componenta $H_{oz}(\rho, \Phi)$

$$H_{0z}(\rho,\Phi) = \frac{\Psi_0 A_1}{N_n^{'}(\rho_{nm}^{'})}\left[ N_n^{'}(\rho_{nm}^{'}) J_n^{'}\left(\frac{\rho_{nm}^{'}}{a}\rho\right) - J_n^{'}(\rho_{nm}^{'}) N_n^{'}\left(\frac{\rho_{nm}^{'}}{a}\rho\right)\right] \cos n\Phi \tag{3.2.43}$$

unde $\rho_{nm}^{'} = k_\lambda a$.

Componentele transversale se determină prin utilizarea de relații similare ca la ghidul cilindric (2.4.17) şi (2.4.20).

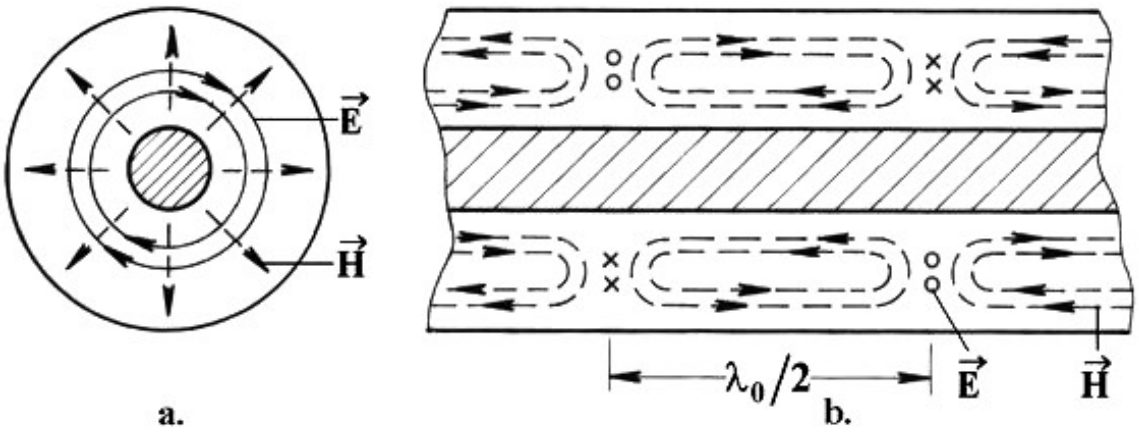



**Fig. 3.10. Configurație de câmp pentru modul $TE_{01}$ în ghidul coaxial:**
**a – secțiune transversală; b – secțiune longitudinală**

Configurația de câmp pentru modul $TE_{11}$ este arătată în Fig. 3.9, iar pentru modul $TE_{01}$ în Fig.3.10.

*b) Moduri superioare TM*. Ecuația de propagare Helmholtz pentru componenta longitudinală $E_{oz}(\rho,\Phi)$ este de forma (2.4.32) cu condiții la limită de tip Dirichlet. Soluția generală a ecuației Helmholtz (2.4.32) are expresia (vezi (2.4.15))

$$E_{0z}(\rho,\Phi)=\Psi_0 \cos n\Phi[B_1 J_n(k_\lambda \rho)+B_2 N_n(k_\lambda \rho)] \tag{3.2.44}$$

Condițiile la limită iau forma

$$E_{0z}(\rho,\Phi)\big|_{\rho=a}=0;\;\; E_{0z}(\rho,\Phi)\big|_{\rho=b}=0 \tag{3.2.45}$$

astfel din (3.2.44 se scoate)

$$\begin{aligned} B_1 J_n(k_\lambda a)+B_2 N_n(k_\lambda a)&=0\\ B_1 J_n(k_\lambda b)+B_2 N_n(k_\lambda b)&=0 \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

Condiția de soluție netrivială ($B_1 \neq 0,\ B_2 \neq 0$) a acestui sistem impune ca determinantul să fie zero:

$$J_n(k_\lambda a)N_n(k_\lambda b)=J_n(k_\lambda b)N_n(k_\lambda a) \tag{3.2.47}$$

care reprezintă o ecuație caracteristică (de valori proprii) pentru numărul de undă transversal $k_\lambda$; valorile lui $k_\lambda$ obținute definesc modurile $TM_{nm}$ în ghidurile coaxiale; modul fundamental transversal magnetic în ghidul cilindric este $TM_{01}$. Ecuația transcedentală (3.2.47) se rezolvă numeric, similar ca la modurile $TE_{nm}$; la frecvențe mai mari decât cea critică pe lângă modul fundamental TEM pot apărea şi moduri superioare $TM_{nm}$, începând cu $TM_{01}$.

Din (3.2.46) se scot rapoartele

$$-\frac{B_1}{B_2}=\frac{N_n(k_\lambda a)}{J_n(k_\lambda a)}=\frac{N_n(k_\lambda b)}{J_n(k_\lambda b)} \tag{3.2.48}$$

Procedând similar ca şi în cazul modurilor $TE_{nm}$, se poate scrie expresia generală pentru componenta $E_{oz}(\rho,\Phi)$

$$E_{0z}(\rho,\Phi)=\frac{\Psi_0 B_1}{n_n(\rho_{nm})}\left[N_n(\rho_{nm})J_n\left(\frac{\rho_{nm}}{a}\rho\right)-J_n(\rho_{nm})N_n\left(\frac{\rho_{nm}}{a}\rho\right)\right]\cos n\Phi \tag{3.2.49}$$

unde $\rho_{nm}=k_\lambda a$. Componentele transversale se obțin prin utilizarea relațiilor (2.4.35) şi (2.4.38), rezultă

$$E_{0\rho}(\rho,\Phi) = -\frac{\gamma}{k_\lambda}\frac{A_1}{N_n(\rho_{nm})}\left[N_n(\rho_{nm})J_n'(k_\lambda\rho) - J_n(\rho_{nm})N_n'(k_\lambda\rho)\right]\cos n\Phi \tag{3.2.50}$$

$$E_{0\Phi}(\rho,\Phi) = \frac{\gamma}{k_\lambda^2}\frac{A_1\Psi_0}{N_n(\rho_{nm})}\frac{n}{\rho}\left[N_n(\rho_{nm})J_n(k_\lambda\rho) - J_n(\rho_{nm})N_n(k_\lambda\rho)\right]\sin n\Phi \tag{3.2.51}$$

$$H_{0\rho}(\rho,\Phi) = -\frac{1}{\underline{Z}_E}E_{0\Phi}(\rho,\Phi) \tag{3.2.52}$$

$$H_{0\Phi}(\rho,\Phi) = \frac{1}{\underline{Z}_E}E_{0\rho}(\rho,\Phi) \tag{3.2.53}$$

unde $\underline{Z}_E$ este impedanța de undă a modurilor $TM_{nm}$.

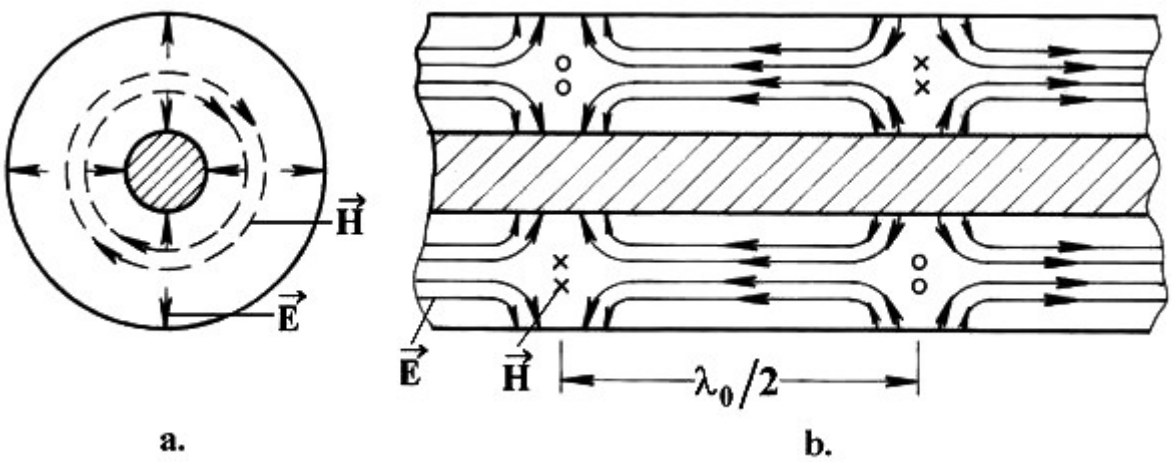



**Fig. 3.11. Configurație de câmp pentru modul $TM_{01}$ în ghidul coaxial: a – secțiune transversală; b – secțiune longitudinală**

Configurația câmpului electromagnetic corespunzătoare modului $TM_{01}$ este arătată în Fig.3.11; un alt mod TM care poate surveni este $TM_{11}$ a cărui configurație este reprezentată în Fig. 3.12. Lungimile de undă aproximative pentru modurile $TM_{01}$ și $TM_{11}$ sunt [7] $\lambda_{E01} \cong 2(b-a)$, $\lambda_{E11} \cong 1{,}92(b-a)$.

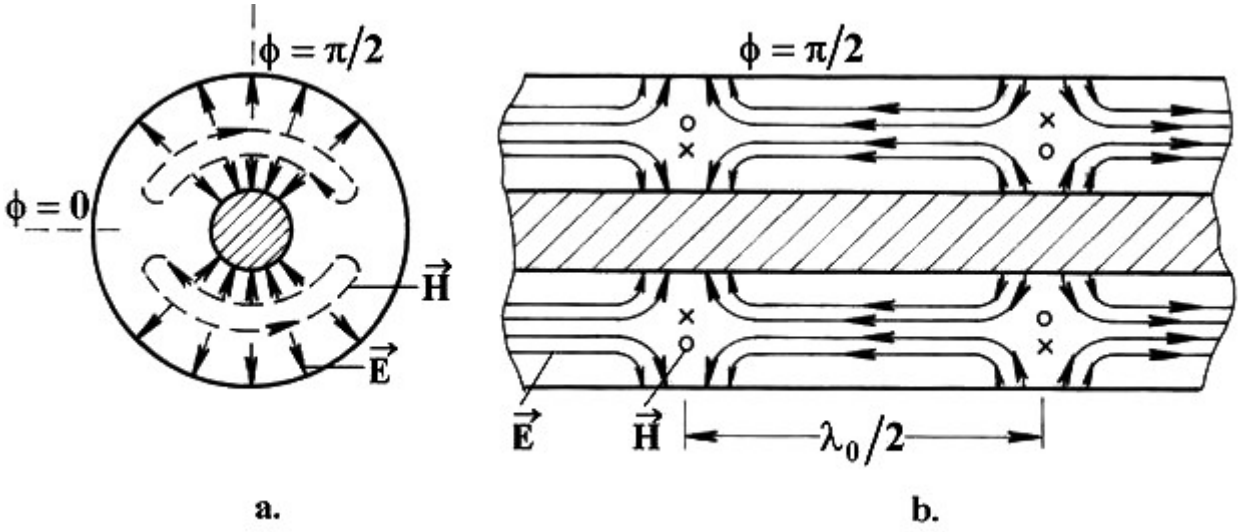



**Fig. 3.12. Configurație de câmp pentru modul $TM_{11}$ în ghidul coaxial: a – secțiune transversală; b – secțiune longitudinală**

### 3.2.2. Parametrii lineici ai ghidurilor coaxiale. Putere transmisă

Parametrii lineici ai ghidului coaxial în care se propagă modul fundamental (dominant) TEM sunt $L_0, C_0, R_0, G_0$ ; cu ajutorul acestor parametri se determină impedanța caracteristică $\underline{Z}_c$ şi constanta de propagare $\gamma$. Vom considera întâi ghidul coaxial fără pierderi, urmărindu-se determinarea parametrilor lineici $C_0$ şi $L_0$; apoi se iau în considerare pierderile şi se determină parametrii lineici $G_0$ şi $R_0$, utilizându-se metode de perturbație.

**1°. Ghid coaxial fără pierderi.**

Admitem că spațiul dintre cele două conductoare este umplut cu un mediu dielectric fără pierderi caracterizat prin parametrii ($\varepsilon,\mu$), iar cele două conductoare sunt de conductivitate infinită; parametrii $C_0, L_0, Z_{c0}$ şi $\beta$ se determină în mod similar ca la linia bifilară.

Energia înmagazinată în câmpul electric pe unitate de lungime este dată de expresia (1.4.28), care pentru sistemele de propagare ghidată cu mod TEM ia forma

$$W_E = \frac{\varepsilon}{4}\int_S \vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}^*_{OT}\,ds \tag{3.2.54}$$

unde $S$ reprezintă aria transversală a coroanei de cilindru cuprins între cele două conductoare. Prin utilizarea relației $W_E = C_0U_0^2/4$ se poate determina capacitatea lineică

$$C_0 = \frac{\varepsilon}{U_0^2}\int_S \vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}^*_{OT}\,ds \tag{3.2.55}$$

Ținând cont de expresia (3.2.25) a mărimii $\vec{E}_{OT}(\rho,\Phi)$ se poate scrie ($ds = \rho d\rho d\Phi$)

$$C_0 = \frac{\varepsilon}{[ln(b/a)]^2}\int_{\Phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b}\left(\frac{1}{\rho}\right)^2\rho\,d\rho\,d\Phi = \frac{2\pi\varepsilon}{ln(b/a)} \tag{3.2.56}$$

Această expresie a lui $C_0$ se poate obține şi pe o cale mai simplă; utilizând teorema lui Gauss se poate scrie

$$\int_{S_\rho}\vec{E}_{0T}\cdot ds = \frac{Q}{\varepsilon} \tag{3.2.57}$$

unde $S_\rho$ este suprafața laterală a unui cilindru de rază $\rho$, pe unitate de lungime, iar Q este sarcina electrică pe suprafața conductorului interior. După integrare se obține

$$\vec{E}_{0T}(\rho,\Phi) = \frac{Q}{2\pi\rho\varepsilon}\hat{\rho} \tag{3.2.58}$$

Iar

$$U_0 = \int_{\rho=a}^{b}\vec{E}_{0T}(\rho,\Phi)\cdot d\vec{\rho} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon}ln(b/a); \tag{3.2.59}$$

prin definiție $C_0 = Q/U_0$, deci $C_0 = 2\pi\varepsilon/ln(b/a)$.

Energia înmagazinată în câmpul magnetic pe unitate de lungime este dată de expresia (1.4.29) care , pentru ghidul coaxial cu mod TEM, ia forma (3.1.64)

$$W_H = \frac{\mu}{4}\int_S \vec{H}_{0T}\cdot\vec{H}^*_{OT}\,ds \tag{3.2.60}$$

unde $S$ este aria transversală a coroanei de cilindru cuprins între cele două conductoare. Ținând cont de relația clasică $W_H = L_0I_0^2/4$ se poate determina inductanța lineică

$$L_0 = \frac{\mu}{I_0^2}\int_S \vec{H}_{0T}\cdot\vec{H}_{OT}ds \tag{3.2.61}$$

În cazul structurii coaxiale (închise) se poate stabili uşor o relaţie între $\vec{H}_{0T}(\rho,\Phi)$ şi curentul $I_0$, utilizând teorema Ampere; avem

$$\int_{C_1}\vec{H}_{0T}d\vec{l} = I_0 \tag{3.2.62}$$

unde $C_1$ este un contur închis de rază $\rho$, iar $I_0$ este curentul care circulă prin conductorul central în sensul +z, iar pe cilindrul exterior în sens invers. Observând că $d\vec{l} = \hat{\Phi}\rho\, d\Phi$ după integrare rezultă

$$\vec{H}_{0T}(\rho,\Phi) = \frac{I_0}{2\pi\rho}\hat{\Phi},\ \ iar\ \vec{B}_{0T}(\rho,\Phi) = \frac{\mu I_0}{2\pi\rho}\hat{\Phi} \tag{3.2.63}$$

Introducând direct pe $\vec{H}_{OT}$ în (3.2.61) se obţine

$$L_0 = \frac{\mu}{(2\pi)^2}\int_{\Phi=0}^{2\pi}\int_{\rho=a}^{b}\left(\frac{1}{\rho}\right)^2\rho d\rho d\Phi = \frac{\mu}{2\pi}ln(b/a) \tag{3.2.64}$$

Este posibilă şi o abordare mai simplă prin utilizarea conceptului de flux al inducţiei magnetice $\Phi_0$. Delimităm un element de arie A pe unitate de lungime a ghidului astfel încât $d\vec{A} = \hat{\Phi}\, d\rho dz$. Fluxul de inducţie magnetică care străbate această arie pe unitate de lungime este

$$\Phi_0 = \int_A \vec{B}_{OT}\cdot d\vec{A} = \int_{\rho=a}^{b}\frac{\mu I_0}{2\pi\rho}d\rho\int_0^1 dz = \frac{\mu I_0}{2\pi}ln(b/a) \tag{3.2.65}$$

Prin definiţie $L_0 = \Phi_0/I_0$ (în cazul variaţiilor neliniare $L_0 = d\Phi_0/dI_0$), astfel se obţine $L_0 = (\mu/2\pi)ln(b/a)$.

Impedanţa caracteristică a ghidului coaxial fără pierderi se defineşte în general ca raportul $\underline{Z}_c = U_0/I_0$; ţinând cont de expresiile mărimilor $U_0$ şi $I_0$ rezultă

$$\underline{Z}_c = Z_{c0} = \left(\frac{L_0}{I_0}\right)^{1/2} = \frac{1}{2\pi}ln(b/a)Z_0 \tag{3.2.66}$$

Constanta de propagare va fi $\gamma = j\beta$, iar constanta de fază are expresia

$$\beta = \omega(L_0C_0)^{1/2} = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2} \tag{3.2.67}$$

**2°. Puterea transmisă prin ghidul coaxial.**

În general ghidurile coaxiale reprezintă linii de transmisie cu pierderi mici, astfel puterea transmisă poate fi calculată presupunând linia ideală. Având în vedere definiţia vitezei de fază $v_{ph} = \omega/\beta$, din (3.2.67) avem $v_{ph} = (\mu\varepsilon)^{-1/2}$, prin urmare câmpul electromagnetic se propagă prin mediul dintre conductoare. Vectorul Poynting mediat în timp definit de (1.4.19), va avea expresia

$$\begin{aligned} &<\vec{\mathcal{S}}(\vec{r},t)>=\vec{S}_r(\vec{r}) = \frac{1}{2}Re\left[\vec{E}_{0T}(\rho,\Phi)\times H^*_{0T}(\rho,\Phi)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{U_0}{\rho\, ln(b/a)}\hat{\rho}\times\frac{I_0^*}{2\pi\rho}\hat{\Phi}\right] = \frac{1}{2}\left[U_0I_0^*\,\frac{1}{2\pi\rho^2\, ln(b/a)}\right]\hat{k} \end{aligned} \tag{3.2.68}$$

Puterea transmisă prin mediul dintre cele două conductoare este

$$P_z = \int_{S_0}\vec{S}_r(r)\cdot d\vec{s} \tag{3.2.69}$$

unde $d\vec{s} = \hat{k}ds$, iar $S_0$ reprezint[ aria transversală a coroanei de cilindru mărginit de cele două conductoare ($ds = \rho\, d\rho\, d\Phi$). Efectuând integrarea se obține

$$P_z = \frac{1}{2}\int_{\rho=a}^{b}\int_{\Phi=0}^{2\pi}\left[\frac{U_0 I_0^*}{2\pi\rho^2\, ln(\,b/a\,)}\right]\rho\, d\rho\, d\Phi = \frac{1}{2}U_0 I_0^* \tag{3.2.70}$$

Trebuie subliniat din nou că în ghidurile coaxiale puterea este transmisă prin intermediul câmpurilor electric şi magnetic existente în spațiul dintre cele două conductoare; puterea nu este transmisă prin conductoare.

**3°. Ghid coaxial cu pierderi**.

La calculul parametrilor $G_0$ şi $R_0$ care iau în considerare pierderile, se operează cu componentele câmpului determinate pentru ghidul coaxial ideal; prin urmare pentru calculul acestor parametri se utilizează metode de perturbație.

*a) Pierderi în mediul dielectric*. Având în vedere că spațiul dintre conductoare este „închis" se pot neglija pierderile datorate sarcinilor libere; de asemenea se neglijează pierderile magnetice ($\mu'' = 0$). Considerăm că pierderile sunt determinate în principal de partea imaginară a permitivității $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$; în aceste caz pierderile $P_{d0}$ se calculează după relația (3.1.81), iar conductanța lineică $G_0$ se determină cu ajutorul relației (3.1.82)

$$G_0 = \frac{\omega\varepsilon''}{U_0^2}\int_{V_l}\vec{E}_{0T}\cdot\vec{E}_{OT}^{*}\,dV \tag{3.2.71}$$

unde $V_l$ este volumul pe uitate de lungime al spațiului dintre cele două conductoare, deci $dV = \rho\, d\rho\, d\Phi\, dz$, cu $dz=1$. Ținând cont de (3.2.25) se poate scrie

$$G_0 = \frac{\omega\varepsilon''}{[\,ln(b/a)]^2}\int_{\rho=a}^{b}\int_{\Phi=0}^{2\pi}\left(\frac{1}{\rho}\right)^2\rho d\rho d\Phi = \frac{2\pi\omega\varepsilon''}{ln(b/a)} \tag{3.2.72}$$

*b)Pierderi în conductoare*. Dacă conductoarele sunt de conductivitate finită, puterea pierdută pe unitate de lungime a ghidului coaxial este (2.5.76)

$$P_{co} = \frac{R_S}{2}\int_{C_1+C_2}\vec{H}_{0T}\cdot\vec{H}_{0T}^{*}\,dl_c \tag{3.2.73}$$

unde $C_1$ şi $C_2$ reprezintă circumferința conductorului central, respectiv a cilindrului exterior; $R_S = Re(\underline{Z}_{sm}) = 1/\sigma\delta_S$ este rezistența de suprafață definită în (2.5.74) şi (3.1.83). Rezistența lineică se obține din relația $P_{c0} = R_0 I_0^2/2$; trebuie subliniat că în cazul de față pierderile în conductoare au două componente $P_{c0} = P_{c1} + P_{c2}$, unde $P_{c1}$ se referă la conductorul central, iar $P_{c2}$ la cilindrul exterior. Se poate scrie

$$R_0 = \frac{R_S}{2}\int_{C_1+C_2}\vec{H}_{0T}\cdot\vec{H}_{0T}^{*}\,dl\,; \tag{3.2.74}$$

ținând cont de (3.2.63) avem

$$R_0 = \frac{R_S}{(2\pi)^2}\left[\int_{\Phi=0}^{2\pi}\frac{1}{a^2}a\,d\Phi + \int_{\Phi=0}^{2\pi}\frac{1}{b^2}b\,d\Phi\right] = \frac{R_S}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \tag{3.2.75}$$

În funcție de valorile rapoartelor $R_0/\omega L_0$ şi $G_0/\omega C_0$ se pot da diferite expresii aproximative pentru $\underline{Z}_c$ şi $\gamma$ (vezi şi (3.1.89) - (3.1.92)).

## 3.3. GHIDURI CU PLĂCI METALICE PARALELE

Un sistem format din două plăci metalice paralele reprezentat în Fig. 3.13, la care dimensiunile *d* şi *w* se află în raportul *d/w <<1*, constituie un „ghid de undă plat”; propagarea are loc după direcția *z* şi întrucât se admite *w >>d* se neglijează variațiile câmpului electromagnetic după direcția *x*, precum şi efectele de margine (la *x = 0* şi *x = w*). Considerăm că plăcile metalice au conductivitatea infinită, iar mediul dielectric dintre plăci este fără pierderi, fiind caracterizat prin parametrii *(ε,μ)*. Prin structura din Fig. 3.13 se pot propaga atât modul dominant (fundamental) TEM cât şi moduri superioare (“de ghid”) TM şi TE la care se disting frecvențe critice (de tăiere).

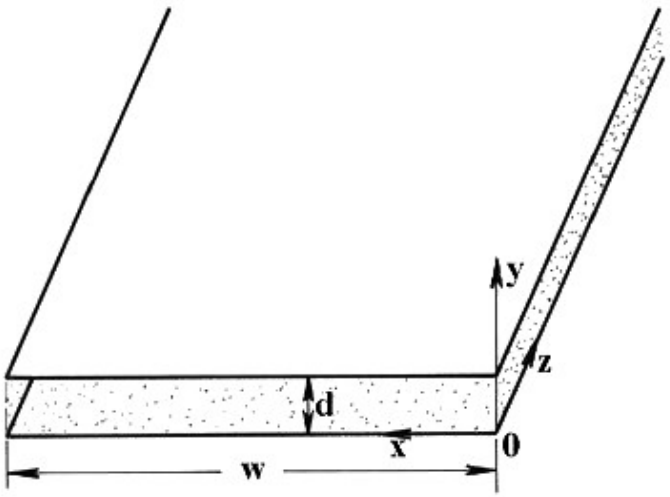



**Fig. 3.13. Ghid de undă plat format din două plăci metalice**

**1°. Modul TEM**.

În secțiunile precedente s-a arătat că structurile de propagare care conțin două sau mai multe conductoare longitudinale pot suporta modul transversal - electromagnetic (TEM) ale cărui componente se obțin prin rezolvarea unei ecuații de tip Laplace pentru potențialul electrostatic $\Psi(x,y)$ în spațiul dintre două plăci ($0 \le x \le w,\ 0 \le y \le d$). În secțiunea de față se utilizează sistemul de coordonate cartesiene şi versorii $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$. Ecuația Laplace are forma

$$\nabla_T^2 \Psi(x,y) = 0 \ ; \tag{3.3.1}$$

admitem că potențialul plăcii inferioare este zero, iar cel al plăcii superioare este $U_0$, astfel condițiile la limită sunt

$$\Psi(x,y)\big|_{y=0} = 0; \quad \Psi(x,y)\big|_{y=d} = U_0 \tag{3.3.2}$$

Întrucât nu avem variații pe direcția x, soluția ecuației (3.3.1) este de forma

$$\Psi(x,y) = A_1 y + A_2 \tag{3.3.3}$$

prin urmare

$$\Psi(x,y) = y\frac{U_0}{d} + A_2 \tag{3.3.4}$$

Câmpul electric transversal are expresia

$$\vec{E}_{0T}(x,y) = -\nabla_T \Psi(x,y) = -\hat{j}\frac{U_0}{d} \tag{3.3.5}$$

astfel se poate scrie

$$\vec{E}_T(x,y,z) = \vec{E}_{0T}(x,y)e^{-j\beta z} \tag{3.3.6}$$

unde $\beta = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$ este constanta de fază (de propagare) a modului TEM în ghidul plat. Câmpul magnetic are expresia

$$\vec{H}_T(x,y,z) = \frac{1}{Z_0}\hat{k}\times\vec{E}_T(x,y,z) = \hat{i}\,\frac{U_0}{Z_0 d}e^{-j\beta z} \tag{3.3.7}$$

Curentul total care circulă pe placa superioară (fața dinspre interior) este

$$I = \int_{x=0}^{w}\vec{I}_{sf}\cdot\hat{k}dx = \int_{x=0}^{w}(-\hat{j}\times\vec{H}_T)\cdot\hat{k}dx = \int_{x=0}^{w}H_x dx = I_0 e^{-j\beta z} \tag{3.3.8}$$

unde s-a notat $I_0 = wU_0/Z_0 d$ .

Având în vedere că şi potențialul $U$ are o variație după z de forma $U = U_0\,exp(-j\beta z)$ ($U$ se obține prin integrarea expresiei (3.3.6) între $y = 0$ şi $y = d$), se poate scrie expresia impedanței caracteristice a ghidului plat fără pierderi

$$Z_{c0} = \frac{U_0}{I_0} = Z_0\frac{d}{w} \tag{3.3.9}$$

Viteza de fază a undelor din ghid este

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\beta} = (\mu\varepsilon)^{-1/2} \tag{3.3.10}$$

adică este egală cu viteza de fază din mediul dielectric infinit.

Se poate stabili o relație directă între curentul $I_0$ şi sarcina Q pe unitate de arie a plăcii superioare; ținând cont de (3.3.7) curentul de suprafață $\vec{I}_{sf}$ se poate pune sub forma

$$\vec{I}_{sf} = -\hat{j}\times\vec{H}_{0T} = \frac{1}{Z_0}\left[-\hat{j}\times(\hat{k}\times\vec{E}_{0T})\right] = \frac{\hat{k}}{Z_0}(\hat{j}\cdot\vec{E}_T) = \hat{k}\frac{\rho_s}{Z_0\varepsilon} = \hat{k}\,v_{ph}\rho_s \tag{3.3.11}$$

astfel din (3.3.8) rezultă

$$I_0 = \int_{x=0}^{w}v_{ph}\rho_s dx = v_{ph}Q \tag{3.3.12}$$

Având în vedere relația $Q = C_0U_0$, impedanța caracteristică poate fi pusă sub forma

$$Z_{c0} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{v_{ph}C_0} \tag{3.3.13}$$

relație des utilizată la studiul ghidurilor coaxiale şi a liniilor microstrip.

**2°. Moduri TM** ( $H_{0z}(x,y) = 0$ ) .

Ecuația de propagare Helmholtz pentru componenta $E_{0z}(x,y)$ are forma cunoscută

$$(\nabla_T^2 + k_\lambda^2)E_{0z}(x,y) = 0 \tag{3.3.14}$$

unde $k_\lambda^2 = \gamma^2 + k^2 = \gamma^2 + \omega^2\varepsilon\mu$; în cazul ghidului plat fără pierderi $\gamma = j\beta$, deci $k_\lambda^2 = k^2 - \beta^2$ sau $\beta = (k^2 - k_\lambda^2)^{1/2}$ .

Având în vedere că la ghidul plat avem $\partial/\partial x = 0$ şi $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial y^2$ , soluția ecuației (3.3.14) este

$$E_{0z}(x,y) = A_1\sin k_\lambda y + A_2\cos k_\lambda y \tag{3.3.15}$$

Punând condiții de tip Dirichlet

$$E_{0z}(x,y)\big|_{y=0,\,y=d} = 0 \tag{3.3.16}$$

rezultă $A_2 = 0$ şi $k_\lambda d = n\pi$, deci

$$k_\lambda = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1,2,3.... \tag{3.3.17}$$

Introducând în (3.3.15) rezultă

$$E_{0z}(x,y) = A_n \sin(n\pi y/d) \tag{3.3.18}$$

Pe baza relațiilor dintre componentele longitudinale şi transversale (2.2.42) şi (2.2.43) se obține

$$E_{0y}(x,y) = -\frac{j\beta}{k_\lambda} A_n \cos(n\pi y/d) \tag{3.3.19}$$

$$H_{0x}(x,y) = \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda} A_n \cos(n\pi y/d) \tag{3.3.20}$$

şi $E_{0x}(x,y) = 0,\ H_{0y}(x,y) = 0$; notația generală a modurilor este $TM_n$.

În cazul particular când $n=0$ avem $E_{0z}(x,y) = 0$, iar $E_{0y}(x,y)$ şi $H_{0x}(x,y)$ rămân constante după direcția y, adică modul $TM_0$ devine identic cu TEM. Se observă că pentru valori $n \geq 1$ ghidul plat reprezintă un sistem cu dispersie deoarece există o lungime de undă critică (de tăiere) şi o frecvență critică; într-adevăr din relația

$$\beta = (k^2 - k_\lambda^2)^{1/2} = [k^2 - (n\pi/d)^2]^{1/2} \tag{3.3.21}$$

rezultă că constanta de fază este o mărime reală (au loc fenomene de propagare) numai dacă $k > k_\lambda$. Frecvența critică $\omega_{cr}$ se obține făcând $\beta = 0$, adică $k_\lambda = k = \omega_{cr}(\varepsilon\mu)^{1/2}$; avem

$$\omega_{cr} = \frac{k_\lambda}{(\varepsilon\mu)^{1/2}} = \frac{n\pi}{d(\varepsilon\mu)^{1/2}};\quad \lambda_{cr} = \frac{2\pi}{k_\lambda} = \frac{2d}{n} \tag{3.3.22}$$

Impedanța de undă are expresia (2.3.35)

$$Z_{gE} = Z_{TM} = -\frac{E_{0y}}{H_{0x}} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\beta}{k} Z_0 \tag{3.3.23}$$

unde $Z_0 = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ este impedanța intrinsecă a mediului dielectric. În ghidul metalic plat se vor propaga efectiv moduri $TM_n$ pentru $\omega > \omega_{cr}$ şi $\lambda < \lambda_{cr}$; dacă $\omega < \omega_{cr}$ ($\lambda > \lambda_{cr}$) undele $TM_n$ excitate în ghid au un caracter evanescent deoarece $\beta$ şi $Z_{gE}$ sunt pur imaginare.

**3°. Moduri TE** ($E_{0z}(x,y) = 0$)

Ecuația de propagare Helmholtz pentru componenta $H_{0z}(x,y)$ este

$$(\nabla_T^2 + k_\lambda^2) H_{0z}(x,y) = 0 \tag{3.3.24}$$

a cărei soluție este de forma

$$H_{0z}(x,y) = B_1 \sin k_\lambda y + B_2 \cos k_\lambda y \tag{3.3.25}$$

Punem condiții la limită de tip Neumann

$$\left.\frac{\partial H_{0z}(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\y=d}} = 0 \tag{3.3.26}$$

care aplicate la (3.3.25) dau $B_1 = 0$ şi

$$k_\lambda = \frac{n\pi}{d},\quad n = 0,1,2,.... \tag{3.3.27}$$

deci soluția ecuației (3.3.24) este

$$H_{0z}(x,y) = B_n \cos(n\pi y/d) \tag{3.3.28}$$

Utilizând relațiile (2.2.48) şi (2.2.49) se determină componentele transversale

$$H_{0y}(x,y) = \frac{j\beta}{k_\lambda} B_n \sin(n\pi y/d) \tag{3.3.29}$$

$$E_{0x}(x,y) = \frac{j\omega\mu}{k_\lambda} B_n \sin(n\pi y/d) \tag{3.3.30}$$

Mărimile $\beta, \omega_{cr}$ şi $\lambda_{cr}$ au expresii identice ca pentru modul $TM_n$; în cazul modurilor $TE_n$ impedanța de undă are expresia (2.3.35)

$$Z_{gH} = Z_{TE} = \frac{E_{0x}}{H_{0y}} = \frac{\omega\mu}{\beta} = \frac{k}{\beta} Z_0 \tag{3.3.31}$$

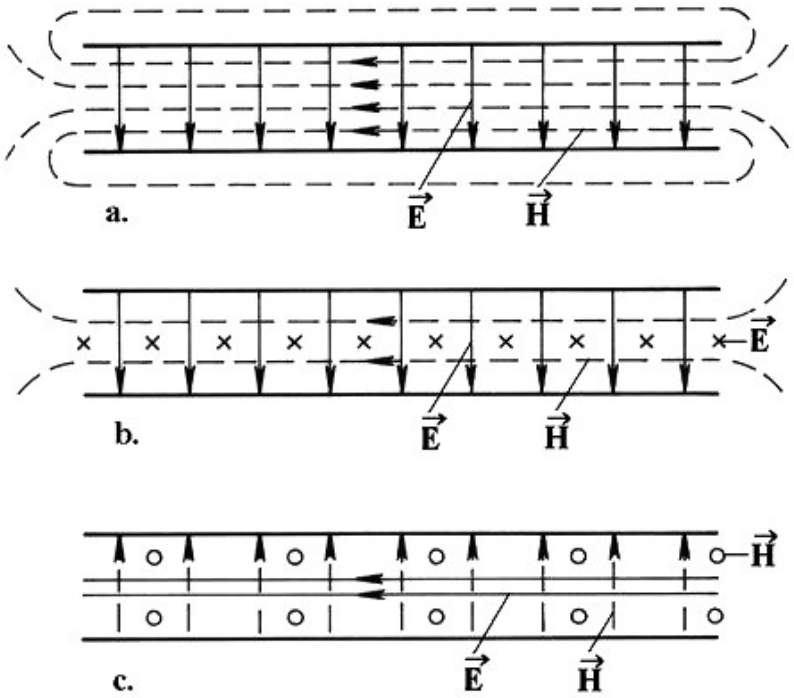



**Fig. 3.14. Configurații de câmp în ghidul cu plăci metalice paralele: a – mod TEM; b- mod $TM_1$; c – mod $TE_1$**

Trebuie observat că pentru $n=0$ avem $E_{0x} = 0, H_{0y} = 0$ prin urmare modul $TE_0$ nu se poate propaga. Configurații de câmp pentru modurile TEM, $TM_1$ şi $TE_1$ sunt arătate în Fig.3.14.

**4°. Puterea transmisă prin ghidul plat. Pierderi**.

*a) Moduri* $TM_n$. Ne oprim întâi asupra modurilor $TM_n$ deoarece ele includ şi modul TEM. Ținând cont de relațiile de definiție (3.2.68) şi (3.2.69) puterea transmisă are expresia

$$P_z = \frac{1}{2} Re \int_{S_0} (\vec{E}_{0y} \times \vec{H}^*_{0x}) \cdot \hat{k} ds = \frac{1}{2} Re \int_{x=0}^{w} \int_{y=0}^{d} E_{0y} H^*_{0x} dx dy \tag{3.3.32}$$

Introducând expresiile (3.3.19) şi (3.3.20) se obține

$$P_z = \frac{w\omega\varepsilon}{2k_\lambda^2} Re(\beta) |A_n|^2 \int_{y=0}^{d} \cos^2\left(\frac{n\pi y}{d}\right) dy = \begin{vmatrix} \frac{\omega d w \varepsilon}{2k_\lambda^2} |A_n|^2 \, Re(\beta) & n = 0 \\ \frac{\omega d w \varepsilon}{4k_\lambda^2} |A_n|^2 \, Re(\beta) & n \geq 1 \end{vmatrix} \tag{3.3.33}$$

Din ultima relație se poate observa că $P_z$ este pozitivă şi diferită de zero dacă constanta de fază $\beta$ este reală; în cazul modurilor TEM şi $TM_0$, $\beta$ este o mărime reală pură deoarece s-a presupus ghid fără pierderi, în cazul modurilor $TM_n$ cu $n \geq 1$, $\beta$ este o mărime reală numai pentru frecvențe $\omega > \omega_{cr}$; dacă $\omega < \omega_{cr}$, $\beta$ este pur imaginar şi $P_z = 0$.

*Pierderile* în ghidul plat pot avea două cauze: pierderi în mediul dielectric (se admite $\mu = \mu_0$ şi $\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$) şi pierderi în conductoare presupuse de conductivitate finită. Constanta de atenuare $\alpha_d$ datorată pierderilor dielectrice se determină cu ajutorul relației (2.5.56), valabilă atât pentru moduri $TM_n$ cât şi pentru moduri $TE_n$; avem

$$\alpha_d = \frac{k^2}{2\beta} tan\,\delta_E; \tag{3.3.34}$$

în cazul modului TEM unde $k_\lambda = 0$ şi $\beta$=$k$ rezultă $\alpha_d = (k\,tan\,\delta_E)/2$. Constanta de atenuare $\alpha_c$ datorată pierderilor în plăci metalice se poate determina prin metoda perturbației; ținând cont de definiția generală (2.5.48) avem

$$\alpha_c = \frac{P_{c0}}{2P_z} \tag{3.3.35}$$

unde $P_{c0}$ este puterea disipată pe unitate de lungime pe direcția z în cele două plăci conductoare şi se calculează după expresia (2.5.76); ținând cont de (3.3.20) avem

$$P_{c0} = 2\left(\frac{R_S}{2}\right)\int_{\alpha=0}^{w} |H_{0x}|^2 dx = \frac{\omega^2 \varepsilon^2 R_S w}{k_\lambda^2} |A_n|^2 \tag{3.3.36}$$

Luând expresia lui $P_z$ din (3.3.33) pentru $n \geq 1$ se obține

$$\alpha_c = \frac{2R_S k}{\beta d Z_0} \tag{3.3.37}$$

În cazul modurilor $TM_0$ şi TEM avem $\beta = k$, iar din (3.3.33) se va lua expresia lui $P_z$ pentru $n=0$, astfel se obține $\alpha_c = R_S / dZ_0$.

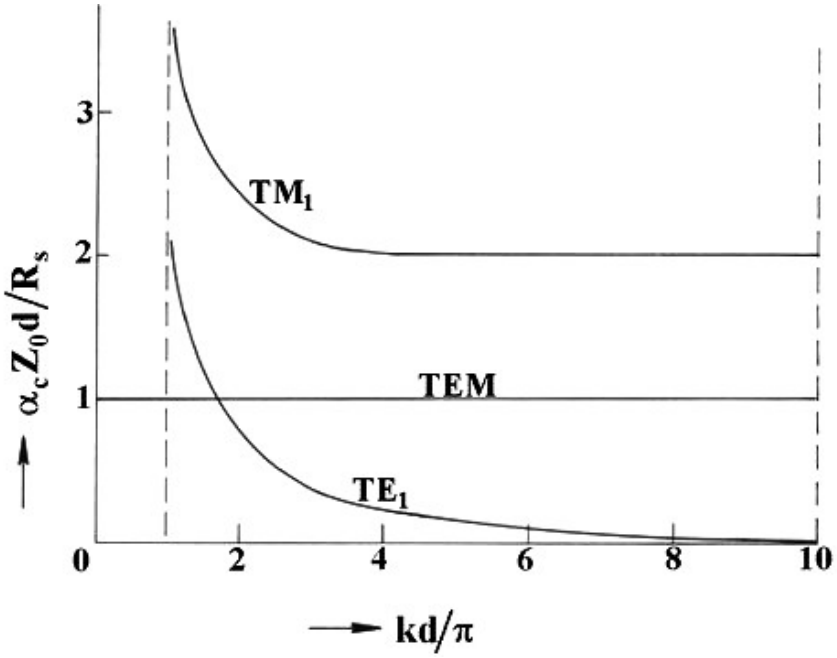



**Fig.3.15. Variația constantei de atenuare la ghidul plat cu plăci metalice paralele pentru modurile uzuale TEM, $TE_1$ şi $TM_1$**

*b) Moduri* $TE_n$. Procedând similar ca la modurile $TM_n$, pentru puterea transmisă avem

$$P_z = \frac{1}{2} Re \int_S (\vec{E}_{0x} \times \vec{H}_{0y}^*) \cdot \hat{k} ds = \frac{1}{2} Re \int_{x=0}^{w} \int_{y=0}^{d} E_{0x} H_{0y}^* dx dy; \tag{3.3.38}$$

introducem expresiile (3.3.29) şi (3.3.30) şi după integrare obținem

$$P_z = \frac{w\mu\omega d}{4k_\lambda^2}|B_n|^2 \, Re(\beta) \tag{3.3.39}$$

Constanta de atenuare datorată pierderilor dielectrice are o expresie identică cu (3.3.34). Curenții $\vec{J}_{sf}$ în plăcile metalice sunt datorați componentei $H_{0z}(x,y)$; puterea disipată pe unitate de lungime va fi

$$P_{c0} = 2\left(\frac{R_S}{2}\right)\int_{x=0}^{w}|H_{0z}|^2 dx = R_S w|B_n|^2 \tag{3.3.40}$$

astfel constanta de atenuare $\alpha_c$ este

$$\alpha_c = \frac{2R_S k_\lambda^2}{\omega\mu d\beta} = \frac{2R_S k_\lambda^2}{dk\beta Z_0} \tag{3.3.41}$$

Exemple de variație a constantelor de atenuare $\alpha_c$ sunt prezentate în Fig.3.15 [1].

**5°. Conceptul de unde plane suprapuse**.

Dată fiind configurația particulară a ghidului de undă plat format din plăci metalice paralele (Fig. 3.13) în care avem *d*<<*w* (se neglijează efectele de margine), există o modalitate convenabilă de a reprezenta propagarea undei electromagnetice ca rezultat al suprapunerii a două unde plane omogene (Fig. 3.16). Sunt cunoscute mai multe modele [1], [3] pentru a stabili relațiile utile între constantele şi vitezele de fază ale diferitelor tipuri de undă ce intervin în procesul de propagare. Aici ne oprim pe scurt asupra modelului Pozar [1] particularizat pentru modul $TM_1$.Componenta $E_z(x,y,z)$ are expresia

$$E_z(x,y,z) = E_{0z}(x,y)e^{-j\beta_{1E}z} \tag{3.3.42}$$

unde $E_{0z}(x,y)$ are expresia (3.3.18), iar din (3.3.21) scoatem expresia constantei de fază $\beta_{1E}$

$$\beta_{1E} = [k^2 - (\pi/d)^2]^{1/2} \tag{3.3.43}$$

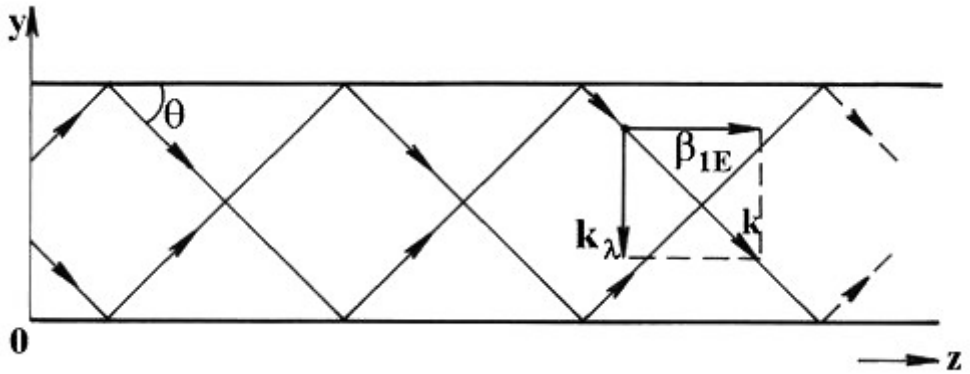



**Fig. 3.16. Conceptul de unde plane suprapuse în ghidul cu plăci metalice paralele; s-a considerat modul $TM_1$**

Ținând cont de expresia (3.3.18) componenta longitudinală a câmpului electric (3.3.42) poate fi scrisă sub forma:

$$E_z(x,y,z) = \frac{A_1}{2j}\left[e^{j(\pi y/d - \beta_{1E}z)} - e^{-j(\pi y/d + \beta_{1E}z)}\right] \tag{3.3.44}$$

Această expresie reprezintă o suprapunere de două unde plane care se propagă oblic, prima pe direcția (*-y,+z*), a doua pe direcția (*+y,+z*), aşa cum este schițat în Fig.3.16; constanta de fază a fiecărei unde plane este egală cu cea de spațiu liber $k = \omega/(\mu\varepsilon)^{1/2}$. Inserția arătată în Fig.3.16 permite să scriem relațiile

$$\beta_{1E} = k\cos\theta$$
$$k_{1\lambda} = \pi / d = k\sin\theta \qquad (3.3.45)$$

care satisfac (3.3.43). Pentru frecvențe $\omega > \omega_{cr}$ constanta $\beta_{1E}$ este reală şi mai mică decât k, astfel unghiul θ variază între 0° şi 90°.

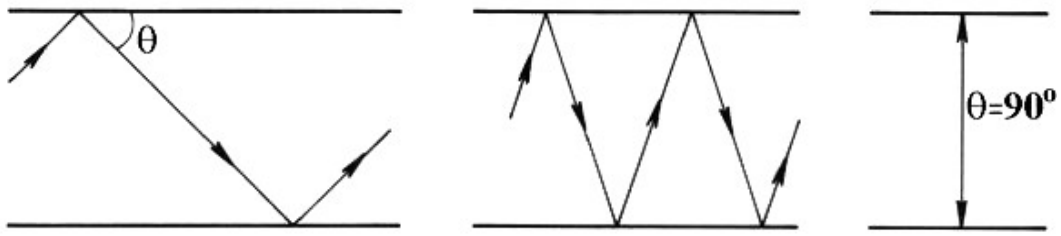
Este instructivă o discuție asupra vitezei de fază şi a lungimii de undă. Viteza de fază a fiecărei unde plane pe direcția ei de propagare este $v_{ph}(k) = \omega/k = (\mu\varepsilon)^{-1/2}$, adică este egală cu viteza de fază a undei electromagnetice în mediul dielectric (omogen, infinit) dintre plăcile metalice; viteza de fază a undelor plane pe direcția *z* este $v_{ph}(\beta) = \omega/\beta_{1E} = 1/(\mu\varepsilon)^{1/2}\cos\theta$, prin urmare avem

$$v_{ph}(\beta) = \frac{v_{ph}(k)}{\cos\theta}; \qquad (3.3.46)$$

viteza $v_{ph}(\beta)$ reprezintă în fapt viteza de propagare a undelor electromagnetice în ghid pe direcția *z* şi este mai mare decât viteza de propagare a luminii în mediul dielectric. Lungimea de undă a undei plane este $\lambda_k = 2\pi / k$, iar lungimea de undă după direcția *z* este $\lambda_\beta = 2\pi/\beta_{1E}$, astfel se poate scrie

$$\lambda_\beta = \frac{\lambda_k}{\cos\theta} \qquad (3.3.47)$$

prin urmare lungimea de undă a modului „de ghid" pe direcția *z* este mai mare decât lungimea de undă a undelor plane în mediul dielectric infinit. Pe măsură ce frecvența $\omega$ scade apropiindu-se de $\omega_{cr}$, constanta $\beta_{1E}$ tinde la zero prin urmare $\theta \to 90°$; în acest caz cele două unde plane suferă numai reflexii verticale pe direcții *y=0* şi *y=d* şi nu există propagare după direcția z. În Fig.3.17 sunt schițate câteva situații de propagare pentru diferite frecvențe: a) $\omega >> \omega_{cr}$, b) $\omega > \omega_{cr}$, c) $\omega = \omega_{cr}$.




**3.17. Propagarea undelor plane în ghidul cu plăci metalice paralele; a -** $\omega >> \omega_{cr}$ ; b - $\omega > \omega_{cr}$ ; c - $\omega = \omega_{cr}$

## 3.4. LINII DE TRANSMISIE MICROSTRIP: STRUCTURI ŞI RELAȚII GENERALE

Denumirea generică de „linii microstrip" include o categorie largă de structuri planare formate din benzi (folii) metalice şi substraturi dielectrice; aceste structuri au permis miniaturizarea circuitelor şi componentelor de microunde, făcându-le compatibile cu noile dispozitive semiconductoare utilizate pe scară largă în echipamentele de laborator şi instalațiile de telecomunicații. Există o multitudine de configurații cum ar fi: linii microstrip, stripline, finline, ghiduri planare, linii microstrip cuplate, rezonatoare etc. În această secțiune se prezintă două variante importante şi anume stripline şi linii microstrip propriu-zise; alte variante sunt descrise succint.

### 3.4.1. Structuri stripline

Deşi nu au cea mai largă utilizare structurile stripline permit obținerea unor expresii analitice manevrabile, referitoare la parametrii ce caracterizează propagarea microundelor. Structura geometrică clasică este arătată în Fig. 3.18a; aceasta constă din două plăci metalice paralele separate printr-un mediu dielectric; la jumătatea distanței dintre cele două plăci este amplasată o bandă (strip) metalică de lărgime w. Configurația câmpului electromagnetic este arătată în Fig.3.18b din care se observă că mediul propriu-zis de propagare este situat în vecinătatea benzii metalice interioare. Se poate imagina că structura stripline provine dintr-un ghid coaxial umplut cu dielectric, aplatizat total; banda metalică interioară provine din conductorul central, iar cele două plăci metalice, nelimitate după coordonata x, provin din cilindrul exterior. La fel ca ghidul metalic coaxial structura strip line suportă propagarea modului TEM pur; totodată structura poate suporta moduri superioare de tip TM şi TE; în practică se urmăreşte evitarea modurilor superioare prin limitarea distanței *b* dintre plăcile metalice la valori mai mici decât $\lambda_d/4$, unde $\lambda_d$ este lungimea de undă în mediul dielectric.

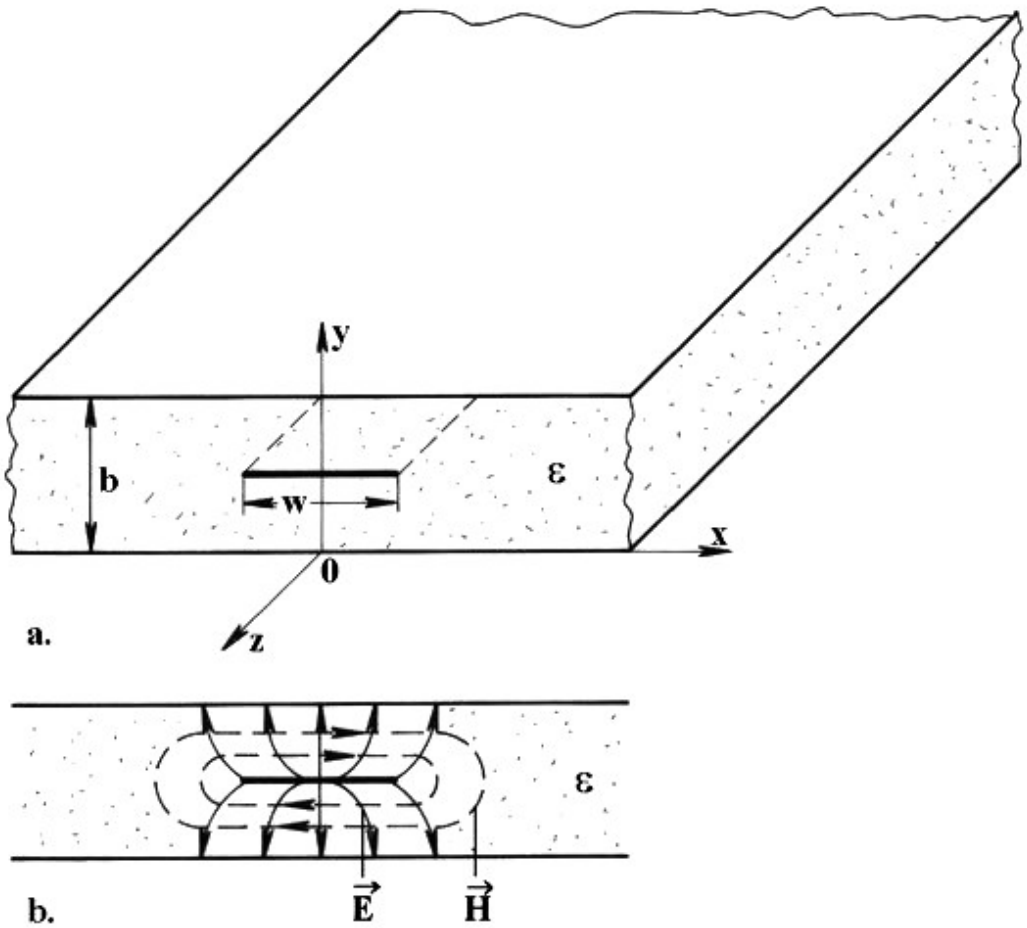



**Fig.3.18. Linie de transmisie stripline: a – structură geometrică;**
**b – configurația liniilor de câmp electric în secțiune transversală**

În funcție de acuratețea impusă rezultatelor, pentru studiul structurilor ce conțin două sau mai multe conductoare îngropate în medii dielectrice, se disting trei direcții de abordare: soluții de mod TEM, aproximația cvasistatică şi analiza de undă totală (soluții hibride exacte). Trebuie subliniat că în cadrul modelelor "aproximație cvasistatică" şi "analiză de undă totală" există mai multe metode de obținere a soluțiilor (expresii pentru impedanța caracteristică, viteza şi constanta de propagare, pierderi, curbe de dispersie).

În structura stripline arătată în Fig. 3.18 se poate considera că liniile de câmp electric şi magnetic sunt concentrate într-un mediu dielectric omogen; aşa cum s-a arătat mai sus (secțiunile 3.2 şi 3.3) în liniile de transmisie omogene ce conțin două sau mai multe conductoare modul

dominant de propagare este TEM pentru frecvențe $f < f_{cr}$, unde $f_{cr}$ este frecvența critică a primului mod superior (TM sau TE) care poate fi excitat. Modul TEM trebuie să satisfacă ecuația Laplace pentru spațiul dintre cele două conductoare de masă; din structura arătată în Fig. 3.18a se observă că după direcția *x* spațiul se extinde la $\pm\infty$, fapt ce creează dificultăți în rezolvarea ecuației Laplace. Din Fig. 3.18b observăm că, cel puțin pentru modul TEM, câmpul electromagnetic este localizat în principal, în vecinătatea benzii (stripului) interior; astfel spațiul pe direcția *x* poate fi limitat prin pereți metalici plasați la distanțe $x = \pm a/2$, obținându-se structura ecranată din Fig. 3.19; admițând $a >> b$ configurația câmpului din vecinătatea benzii centrale nu este perturbată de către pereții metalici laterali. Pentru regiunea finită închisă $|x| < a/2$ şi $0 \le y \le b$ potențialul $\Psi(x,y)$ satisface ecuația Laplace bidimensională

$$\nabla_T^2 \Psi(x,y) = 0 \quad |x| \le a/2, \quad 0 \le y \le b \tag{3.4.1}$$

cu condițiile la limită

$$\Psi(x,y)\big|_{x=\pm a/2} = 0 \tag{3.4.2}$$

$$\Psi(x,y)\big|_{y=0,b} = 0 \tag{3.4.3}$$

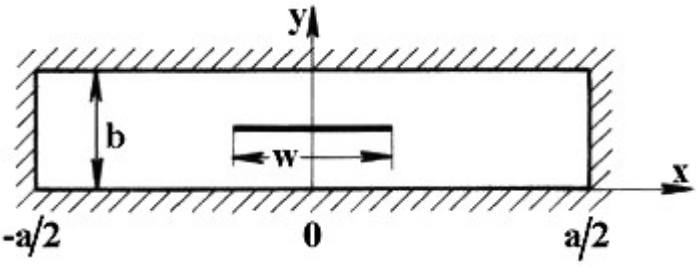



**Fig. 3.19. Modelul de „structură ecranată" al liniei de tip stripline**

Având în vedere că pe conductorul central este prezentă o sarcină de suprafață $\rho_s$, potențialul $\Psi(x,y)$ va avea o discontinuitate de variație (pantă) deoarece vectorul $\vec{D} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla_T \Psi(x,y)$ este discontinuu la $y = b/2$; astfel este necesar să fie găsite soluții separate pentru $0 \le y \le b/2$ şi $b/2 \le y \le b$. Soluțiile generale pentru cele două regiuni sunt de forma [1]

$$\Psi(x,y) = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left[\frac{n\pi(b-y)}{a}\right] \end{vmatrix} \tag{3.4.4}$$

în care se iau numai termenii cu *n* fără soț (impari) întrucât soluțiile sunt funcții pare de *x*. Se observă totodată că pe suprafața conductorului interior la $y = b/2$ potențialul este constant şi din (3.4.4) rezultă $B_n = A_n$. Având în vedere că componenta după *y* a câmpului electric este $E_y = -\partial \Psi(x,y)/\partial y$ se poate scrie

$$E_{0y} = \begin{vmatrix} -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) & 0 \le y \le b/2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cosh\left[\frac{n\pi(b-y)}{a}\right] & b/2 \le y \le b \end{vmatrix} \tag{3.4.5}$$

Presupunem linia de transmisie fără pierderi ($\varepsilon'' = 0, \sigma = \infty$) şi notăm cu $C_e$ şi $L_e$ parametrii lineici ai structurii stripline; impedanța caracteristică este definită prin relația

$$Z_{c0} = \left( \frac{L_e}{C_e} \right)^{1/2}; \tag{3.4.6}$$

ținând cont de expresia vitezei de fază $v_{ph} = (L_e C_e)^{-1/2}$ se pot scrie expresii alternative pentru $Z_{c0}$

$$Z_{c0} = v_{ph} L_e; \quad Z_{c0} = \frac{1}{v_{ph} C_e} \tag{3.4.7}$$

Dacă mediul dielectric este înlocuit cu aer parametrii lineici devin $C_a$ şi $L_a$ ( $= L_e$, deoarece inductanța lineică a liniei nu depinde de mediul dielectric); astfel se pot scrie următoarele expresii pentru impedanța caracteristică

$$Z_{ca} = \left( \frac{L_e}{C_a} \right)^{1/2}; \quad Z_{ca} = c_0 L_e; \quad Z_{ca} = \frac{1}{c_0 C_a} \tag{3.4.8}$$

unde $c_0 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{1/2}$ este viteza de propagare în spațiul liber. Ținând cont de (3.4.6) şi ultimele două expresii din (3.4.8) se obține relația importantă

$$Z_{c0} = \frac{1}{c_o (C_e C_a)^{1/2}}; \tag{3.4.9}$$

comparând (3.4.6) cu prima relație din (3.4.8) se poate scrie

$$Z_{c0} = \left( \frac{C_a}{C_e} \right)^{1/2} Z_{ca} \tag{3.4.10}$$

De asemenea constanta de propagare (de fază) se pune sub forma

$$\beta = \omega (L_e C_e)^{1/2} = \beta_0 \left( \frac{C_e}{C_a} \right)^{1/2} \tag{3.4.11}$$

unde $\beta_0 = k_0 = 2\pi / \lambda_0$ este numărul de undă de spațiu liber.

Se observă că în limitele aproximării de mod TEM (cvasistatice) pentru descrierea fenomenelor de propagare din structura stripline este suficient să fie determinate numai capacitățile lineice $C_e$ şi $C_a$. Admițând că modul fundamental de propagare este TEM capacitatea $C_e$ poate fi exprimată utilizând energia mediată în timp, înmagazinată în câmpul electric pe unitate de lungime

$$W_e = \frac{1}{4} C_e U_0^2 = \frac{1}{4} \frac{Q^2}{C_e} \tag{3.4.12}$$

unde $U_0$ este potențialul dintre conductorul central şi pereții metalici. Pentru energie se poate scrie

$$W_e = \frac{1}{4} \int_{St} \varepsilon |E_T|^2 \, dxdy = \frac{1}{4} \int_{St} \varepsilon |\nabla_T \Psi|^2 \, dxdy \tag{3.4.13}$$

unde St este aria transversală a structurii; astfel capacitatea lineică $C_e$ capătă expresia

$$C_e = \frac{\int_{St} \varepsilon |\nabla_T \Psi|^2 \, dxdy}{U_0^2} = \frac{\int_{St} \varepsilon |\nabla_T \Psi|^2 \, dxdy}{\left| \int_{l_{12}} \nabla_T \Psi \cdot d\vec{l} \right|^2} \tag{3.4.14}$$

unde $U_0$ a fost înlocuit printr-o integrală de linie între placa exterioară şi conductorul central.

## 3.4.2. Structuri microstrip

### 3.4.2.1. Structură de bază şi metode de analiză

Structura de bază a linei microstrip este arătată în Fig. 3.20; ea reprezintă o linie de transmisie planară asimetrică şi constă dintr-un conductor de masă, substratul dielectric de grosime *h* şi stripul metalic de lărgime *w*. Configuraţia liniilor de câmp electric în plan transversal este reprezentată în Fig.3.20b; liniile de câmp magnetic înconjoară stripul metalic. Spre deosebire de structurile stripline, la liniile microstrip câmpul electromagnetic se întinde atât în substratul dielectric cât şi în aer; uzual majoritatea liniilor de câmp electric se află în mediul dielectric şi doar o mică fracţiune se găseşte în regiunea de aer de deasupra substratului; drept urmare linia microstrip nu poate suporta modul TEM pur deoarece viteza de fază în mediul dielectric $v_{ph}(d)$ este diferită de viteza de fază în aer $v_{ph}(a) = c_0$.

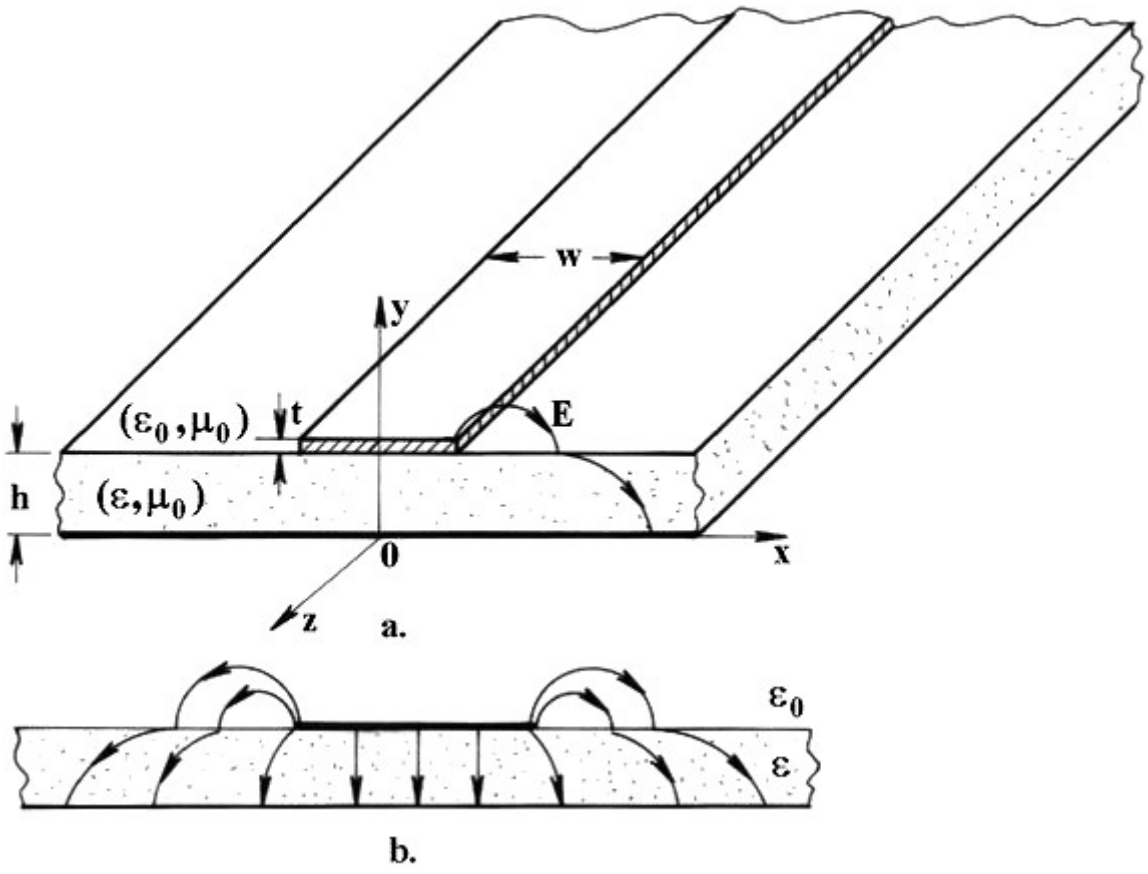



**Fig. 3.20. Linie de transmisie microstrip: a – structură fizică;**
**b – configuraţia liniilor de câmp electric în secţiune transversală**

În realitate câmpul electromagnetic din linia microstrip se propagă sub formă de *unde hibride* TM - TE, astfel pentru determinarea parametrilor caracteristici sunt necesare metode de analiza mult mai avansate decât cele expuse până acum; câteva dintre aceste metode sunt prezentate succint mai jos.

Din condiţiile de continuitate ale componentelor tangenţiale şi normale ale câmpurilor la interfaţa dielectric-aer se poate demonstra uşor că existenţa componentelor longitudinale $H_z$ şi $E_z$ este absolut obligatorie. Considerăm de exemplu componentele tangenţiale ale câmpului electric

$$E_x\big|_a = E_x\big|_d \tag{3.4.15}$$

Utilizând ecuaţia Maxwell pentru câmpuri armonice se poate scrie ($\vec{J} = 0$)

$$\varepsilon_r (\nabla \times \vec{H})_x\Big|_a = (\nabla \times \vec{H})_x\Big|_d \tag{3.4.16}$$

Dezvoltăm produsele vectoriale şi reţinem numai termenii după versorul $\hat{i}$; de asemenea ţinem seama de condiţia de continuitate pentru componentele normale ale fluxului magnetic (1.3.34) admiţând $\mu_d = \mu_a = \mu_0$ ($\mu_{rd} = \mu_{ra} = 1$), deci $H_y\big|_a = H_y\big|_d$; se obţine

$$\varepsilon_r \frac{\partial H_z}{\partial y}\bigg|_a - \frac{\partial H_z}{\partial y}\bigg|_d = (\varepsilon_r - 1)\frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{3.4.17}$$

Întrucât în liniile microstrip practice avem $\varepsilon_r > 1$ şi $H_y \neq 0$, din (3.4.17) rezultă că componenta $H_z$ este diferită de zero; printr-o procedură similară se poate arăta că şi componenta $E_z$ este diferită de zero. Trebuie subliniat că numai componentele de margine $E_x$ şi $H_x$ constituie sursa de apariţie a componentelor $H_z$ şi $E_z$ care alterează modul de propagare TEM pur. Având în vedere că componentele de margine (adesea numite "scăpări") $E_x$ şi $H_x$ au valori mici în comparaţie cu componentele principale ale câmpului, concentrate în substratul dielectric (în principal în spaţiul de sub stripul metalic), abaterea de la modul TEM este relativ mică.

Principalele metode de analiză pot fi împărţite în două mari categorii: a) analiză cvasistatică şi b) analiză de undă totală (completă). În cadrul primei categorii se disting mai multe grupuri de metode: aproximaţie cvasistatică, metoda transformărilor conforme, metoda ecuaţiilor integrale, metode variaţionale în domeniul transformărilor Fourier, metoda diferenţelor finite. În cadrul celei de a doua categorii, de asemenea, există mai multe metode, dintre care două sunt mai des utilizate: metoda ecuaţiilor integrale şi metoda Galerkin în domeniul spectral; trebuie subliniat că metodele din această categorie sunt extrem de laborioase deoarece se ia în considerare natura hibridă a modului de propagare, astfel sunt necesare metode avansate de calcul.

### 3.4.2.2. Aproximaţie cvasistatică

În general, structurile microstrip reprezintă linii de transmisie neomogene în care nu se poate propaga modul TEM pur. Atunci când abaterile de la modul TEM sunt nesemnificative se poate utiliza aproximaţia cvasistatică care admite că configuraţia liniilor de câmp electric şi magnetic (componente transversale) este identică cu configuraţia de câmp static sau de frecvenţă foarte joasă. Modul de propagare este TEM (numit adesea cvasi-TEM), iar parametrii caracteristici ai liniei sunt calculaţi în funcţie de capacitatea lineică a structurii; s-a constatat că această analiză oferă rezultate satisfăcătoare la frecvenţe până în banda X, pentru care lărgimea stripului şi grosimea substratului sunt mult mai mici decât lungimea de undă în materialul dielectric.

Parametrii care trebuiesc determinaţi sunt: impedanţa caracteristică, constanta de propagare, constanta de fază $\beta$ şi constanta de atenuare $\alpha$, viteza de fază; de asemenea, în multe cazuri este necesar să fie luate în considerare dependenţa de frecvenţă a unor parametri cum ar fi impedanţa caracteristică şi permitivitatea dielectrică efectivă. Aşa cum s-a constatat şi pentru structura stripline discutată în secţiunea precedentă 3.4.1., principalul parametru care trebuie determinat este capacitatea lineică $C_e$. În acest scop, prezentăm întâi o analiză simplificată a liniei microstrip fără pierderi. Şi în acest caz, pentru înlăturarea unor dificultăţi de integrare a ecuaţiei Laplace, în structura microstrip se plasează doi pereţi metalici verticali la distanţele $x=\pm a/2$ (Fig. 3.21); având în vedere că $w << a$ şi $h << a$ pereţii metalici nu perturbă câmpul electromagnetic localizat în vecinătatea stripului metalic. Ecuaţia Laplace în regiunea dintre pereţii metalici de margine are forma

$$\nabla_T^2 \Psi(x,y) = 0 \quad pentru \quad |x| \le a/2, \quad 0 \le y < \infty \tag{3.4.18}$$

cu condiţiile la limită:

$$\Psi(x,y)\big|_{x=\pm a/2} = 0 \tag{3.4.19}$$

$$\Psi(x,y)\big|_{y=0,\infty} = 0 \tag{3.4.20}$$

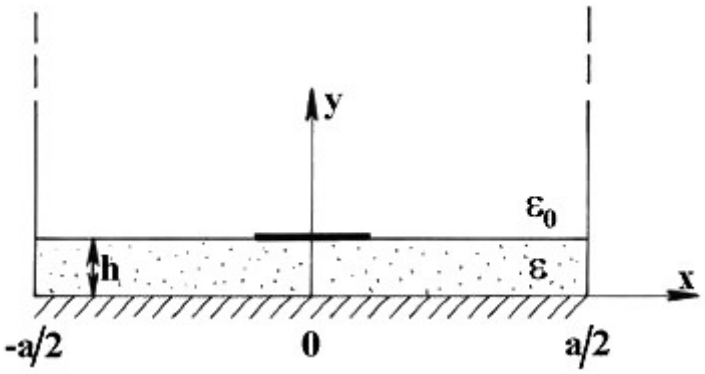



**Fig. 3.21. Modelul liniei microstrip cu pereți metalici laterali**

Se observă că în Fig. 3.21 există două regiuni distincte separate prin interfața dielectric-aer, iar pe stripul metalic avem o discontinuitate de sarcină; astfel $\Psi(x,y)$ va avea expresii diferite în aceste regiuni. Pentru rezolvarea ecuației (3.4.18) se aplică metoda separării variabilelor şi se ține cont de condițiile la limită (3.4.19) şi (3.4.20). Soluțiile generale sunt [1]

$$\Psi(x,y)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) & 0\le y\le h\\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-n\pi y/a} & h\le y<\infty\end{cases} \tag{3.4.21}$$

cu *n* par. Potențialul $\Psi(x,y)$ trebuie să fie continuu la $y = h$, astfel din (3.4.21) rezultă

$$A_n\sinh\left(\frac{n\pi h}{a}\right)=B_n\,e^{-n\pi h/a} \tag{3.4.22}$$

de unde se scoate $B_n$ şi se introduce în (4.3.21); pentru $\Psi(x,y)$ avem

$$\Psi(x,y)=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), & 0\le y\le h\\ \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi h}{a}\right)e^{-n\pi(y-h)/a}, & h\le y<\infty\end{cases} \tag{3.4.23}$$

Constanta de integrare $A_n$ poate fi determinată prin luarea în considerare a densității de sarcină de suprafață pe strip, $\rho_s$; notăm prin $y=h^+$ şi $y=h^-$ coordonatele celor două fețe ale stripului, deci pe unitate de lungime se poate scrie

$$\rho_s=D_y(x,h^+)-D_y(x,h^-) \tag{3.4.24}$$

Având în vedere relația generală $D_y=\varepsilon E_y$ este necesar să determinăm expresiile câmpului $E_y=-\partial\Psi(x,y)/\partial y$; se obține

$$E_y=\begin{cases}-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), & 0\le y<h\\ \sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sinh\left(\frac{n\pi h}{a}\right)e^{-n\pi(y-h)/a}, & h\le y<\infty\end{cases} \tag{3.4.25}$$

deci se poate scrie

$$D_y(x,h^-)=\varepsilon_0\varepsilon_r E_y(x,h^-);\ D_y(x,h^+)=\varepsilon_0 E_y(x,h^+) \tag{3.4.26}$$

Introducând în relația de definiție (3.4.24) rezultă

$$\rho_s = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{n\pi}{a}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left[ sinh\left(\frac{n\pi h}{a}\right) + \varepsilon_r \, cosh\left(\frac{n\pi h}{a}\right)\right] \tag{3.4.27}$$

Pentru simplificare se aproximează densitatea de sarcină printr-o distribuție uniformă pe strip

$$\rho_s = \begin{vmatrix} 1 & |x| < w/2 \\ 0 & |x| > w/2 \end{vmatrix} \tag{3.4.28}$$

şi egalând cu (3.4.27) se obține expresia constantei $A_n$

$$A_n = \frac{4a \sin(n\pi w/2a)}{(n\pi)^2 \varepsilon_0 [\sinh(n\pi h/a) + \varepsilon_r \cosh(n\pi h/a)]} \tag{3.4.29}$$

în care s-a utilizat ortogonalitatea funcțiilor *cos(nπx/a).*

Expresia capacității lineice se determină ca raportul $C_e = Q/U_0$, unde $U_0$ este potențialul stripului în raport cu conductorul de masă, iar $Q$ este sarcina totală pe strip, pe unitate de lungime. Diferența de potențial $U_0$ este dată de expresia

$$U_0 = -\int_0^h E_y(0,y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left(\frac{n\pi h}{a}\right) \tag{3.4.30}$$

iar sarcina electrică totală, ținând cont de (3.4.28), este ( $\rho_s = 1$)

$$Q = \int_{x=-w/2}^{w/2h} \rho_s(x)dx = w \quad [Cm^{-1}] \tag{3.4.31}$$

În final pentru capacitatea lineică se obține expresia

$$C_e = \frac{Q}{U_0} = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a \sin(n\pi w/2a)\sinh(n\pi h/a)}{w(n\pi)^2 \varepsilon_0 [\sinh(n\pi h/a) + \varepsilon_r \cosh(n\pi h/a)]}} \tag{3.4.32}$$

O mărime importantă care intervine în analiza şi proiectarea liniilor de transmisie microstrip (precum şi a altor componente microstrip: cuploare direcționale, filtre, adaptoare de impedanță, elemente rezonante) este permitivitatea dielectrică efectivă $\varepsilon_{ref}$. În limitele modelului aproximativ (Fig. 3.21) considerat aici, *permitivitatea efectivă* se determină ca raportul

$$\varepsilon_{ref} = C_e / C_a \tag{3.4.33}$$

unde $C_a$ este capacitatea lineică a structurii microstrip atunci când substratul dielectric este înlăturat total; această capacitate rezultă din relația (3.4.32) făcând $\varepsilon_r = 1$.Valoarea exactă a permitivității $\varepsilon_{ref}$ şi dependența sa de dimensiunile geometrice, precum şi variația cu frecvența pot fi stabilite prin utilizarea unor modele mai complicate şi a unor metode avansate; câteva dintre acestea sunt expuse în secțiunile ce urmează.

În încheierea acestei secțiuni se prezintă câteva expresii utile:

*a) Impedanța caracteristică*

$$Z_{c0} = \frac{1}{v_{ph} C_e} = \left(\frac{C_a}{C_e}\right)^{1/2} Z_{ca} \tag{3.4.34}$$

unde

$$Z_{ca} = \frac{1}{c_0 C_a} \tag{3.4.35}$$

este impedanța caracteristică a structurii microstrip cu aer. Dacă ținem seama de relațiile de definiție $v_{ph} = (L_e C_e)^{-1/2}$, $c_0 = (L_e C_a)^{-1/2}$ şi de (3.4.33), se obține raportul

$$\frac{C_e}{C_a} = \left(\frac{c_0}{v_{ph}}\right)^2 = \varepsilon_{ref} \tag{3.4.36}$$

Prin introducerea acestui raport în (3.4.34) se obține o relație utilă între $Z_{c0}, Z_{ca}$ şi $\varepsilon_{ref}$

$$Z_{c0} = \frac{Z_{ca}}{(\varepsilon_{ref})^{1/2}} \tag{3.4.37}$$

*b) Constanta de fază are expresia clasică*

$$\beta = \beta_0 \left(\frac{C_e}{C_a}\right)^{1/2} = \beta_0 (\varepsilon_{ref})^{1/2} \tag{3.4.38}$$

unde $\beta_0 = k_0 = \omega / c_0 = 2\pi / \lambda_0$ este constanta de fază de spațiu liber.

### 3.4.2.3. Metoda transformărilor conforme (Wheeler)

Cea mai răspândită metodă de analiză exactă a structurilor microstrip în cadrul modelului cvasistatic a fost propusă de Wheeler [11], [12]; trebuie subliniat totuşi că atât anterior cât şi posterior lucrărilor lui Wheeler au existat mai multe lucrări, în care au fost propuse şi alte metode de simplificare a expresiilor unor parametri, sau precizări asupra domeniilor de valabilitate a formulelor obținute de Wheeler.

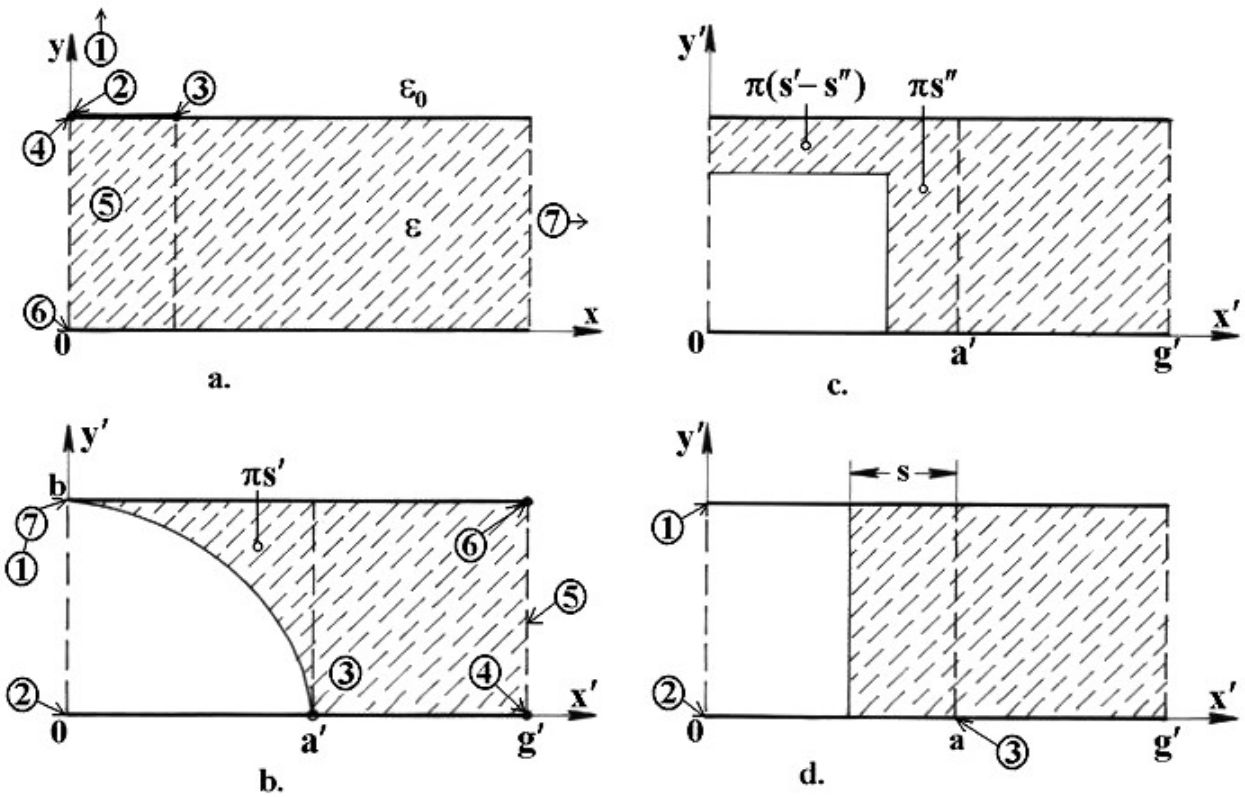



**Fig. 3.22. Ilustrarea transformărilor conforme Wheeler: a – planul complex y al coordonatelor spațiale (x,z); b – transformare în configurație de capacitor cu plăci paralele (plan $z'$); c – aproximarea liniei curbe dielectric – aer; d – arie s paralelă echivalentă**

Relațiile propuse de Wheeler se bazează pe utilizarea transformării conforme Schwarz-Christoffel (anexa AV). Aceste relații au avantajul că sunt explicite, pot fi exprimate cu ajutorul unor funcții simple şi țin seama de raporturile geometrice dintre *w* şi *h*; de asemenea ele pot fi utilizate atât pentru analiză (se dau raportul *w/h* şi $\varepsilon_r$ şi se calculează impedanța caracteristică şi constanta de propagare) cât şi pentru sinteză (sunt date impedanța caracteristică şi $\varepsilon_r$ şi se calculează raportul *w/h* şi $\varepsilon_{ref}$ ).

Întâi prezentăm succint metoda Wheeler conform lucrării [12]; în esență metoda utilizează transformarea conformă pentru calcularea capacității $C_a$ şi apoi se introduce conceptul de permitivitate dielectrică efectivă pentru a evalua capacitatea lineică a structurii $C_e$. Transformarea conformă este ilustrată prin desenele succesive din Fig. 3.22; planul complex al coordonatelor spațiale *z=x+jy* se referă la planul transversal al liniei microstrip, iar planul complex în coordonate $x'$ (flux electric) şi $y'$ (potențial); $z' = x' + jy'$ reprezintă transformarea configurației microstrip într-o configurație de capacitor cu plăci paralele ( $z'$, $x'$, $y'$ nu sunt derivate ci simple notații). Dacă se presupune strip larg (*w/h > 2*) transformarea are forma (la scrierea relațiilor generale se vor păstra notațiile originale din [12])

$$z = j\pi + d\tanh(z'/2) - z' \tag{3.4.39}$$

unde *d* este aproximativ egal cu $g'$ din Fig. 3.22 b. Limita dielectric-aer a liniei microstrip originale din planul *z* (Fig. 3.22 a) este transformată într-o curbă de formă eliptică *ba'* din planul *z'* (Fig. 3.22 b). Pentru a evalua $C_e$ se introduc aproximări care transformă linia curbilinie dielectric - aer într-o limită de formă rectangulară (Fig. 3.22 c); aria $\pi s'$ de deasupra curbei este divizată în două arii: „arie paralelă $\pi s$" şi „arie serie $\pi(s' - s'')$ ". Aceste două arii pot fi exprimate sub forma unei „arii paralele echivalente" $\pi s$ (Fig. 3.22 d); referitor la Fig. 3.22 d se observă că dreptunghiul de coordonată $a' < x' < g'$ este umplut cu dielectric, iar dreptunghiul de coordonată $0 < x' < a'$, în cea mai mare parte este lipsit de dielectric; excepție face porțiunea haşurată de la stânga lui *a'*. Mărimea *s* se exprimă sub forma

$$s = s'' + \frac{s' - s''}{\varepsilon_r} = \frac{s'}{\varepsilon_r} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} s'' \tag{3.4.40}$$

Se defineşte factorul efectiv de umplere ca raportul

$$q = \frac{g' - a' + s}{s'} = 1 - \frac{a' - s}{g'} \tag{3.4.41}$$

Legătura dintre permitivitatea relativă efectivă şi factorul de umplere se stabileşte pe baza conceptului de capacitori paraleli ( $q = (\varepsilon_{ref} - 1)/(\varepsilon_r - 1)$ ), rezultând

$$\varepsilon_{ref} = 1 + q(\varepsilon_r - 1) \tag{3.4.42}$$

unde în general $1/2 \le q \le 1$: valoarea *1/2* este limita pentru stripuri foarte înguste, iar valoarea *1* este limita pentru stripuri foarte largi.

În literatura de specialitate sunt cunoscute mai multe aproximări pentru $\varepsilon_{ref}$ în funcție de raportul *w/h* şi valorile permitivității dielectricului. Utilizând notațiile de la structura fizică inițială a liniei microstrip (Fig. 3.20) prezentăm două aproximații ale lui $\varepsilon_{ref}$

- în cazul stripurilor înguste (*w/h < 2*)

$$\varepsilon_{ref} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \frac{\ln(\pi/2) + (1/\varepsilon_r)\ln(4/\pi)}{\ln(8h/w)} \tag{3.4.43}$$

- în cazul stripurilor largi (*w/h > 2*) se exprimă factorul de umplere în funcție de $\varepsilon_r$ ,*w* şi *h*

$$q = 1 - \frac{1}{d} ln\left(\frac{d+c}{d-c}\right) + \frac{0{,}732}{\varepsilon_r d}\left[ ln\left(\frac{d+c}{d-c}\right) - arccosh(0{,}358d + 0{,}595)\right] + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r d}\left[0{,}386 - \frac{1}{2(d-1)}\right] \quad (3.4.44)$$

unde mărimile *d* şi *c* se determină din relaţiile

$$\frac{\pi}{2}\frac{w}{h} = c - arcsin\, hc; \quad d = 1(1 + c^2)^{1/2} \quad (3.4.45)$$

O expresie aproximativă generală pentru $\varepsilon_{ref}$ este [1]

$$\varepsilon_{ref} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\frac{1}{(1 + 12h/w)^{1/2}} \quad (3.4.46)$$

Sub forma generală $\varepsilon_{ref}$ caracterizează un mediu dielectric omogen în care este îngropată structura, înlocuind astfel substratul dielectric de grosime *h* şi permitivitate $\varepsilon_r$.

În continuare se prezintă formule grupate pentru analiza şi sinteza liniilor microstrip.

**1°. Formule pentru analiza liniilor microstrip**.

Se consideră date *w/h* şi $\varepsilon_r$ şi se urmăreşte determinarea impedanţei caracteristice. Formulele reprezintă aproximări pe domenii de valori ale raportului *w/h*; trebuie precizat că la diferiţi autori limitele ce definesc stripuri înguste sau largi diferă; variantele mai des întâlnite sunt: $w/h \neq 2$ şi $w/h \neq 3{,}3$. Ne referim întâi la limitele $w/h \neq 2$ [14]:

- stripuri înguste ($w/h < 2$)

$$Z_{c0} = \frac{377}{2\pi[(\varepsilon_r + 1)/2]^{1/2}}\left\{ ln\frac{8h}{w} + \frac{1}{8}\left(\frac{w}{2h}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left[ ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon_r} ln\left(\frac{4}{\pi}\right)\right]\right\} \quad (3.4.47)$$

- stripuri largi ($w/h > 2$)

$$Z_{c0} = \frac{377}{\varepsilon_r^{1/2}}\left\{ \frac{w}{h} + 0{,}883 + \frac{\varepsilon_r + 1}{\pi\varepsilon_r}\left[ ln\left(\frac{w}{2h} + 0{,}94\right) + 1{,}45\right] + 0{,}165\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r^2}\right\}^{-1} \quad (3.4.48)$$

Considerând limitele $w/h \neq 3{,}3$ [13] avem:

- stripuri înguste ($w/h < 3{,}3$)

$$Z_{c0} = \frac{199{,}9}{[2(\varepsilon_r + 1)]^{1/2}}\left\{ ln\frac{4h}{w} + \left(\left(\frac{4h}{w}\right)^2 + 2\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left[ ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon_r} ln\left(\frac{4}{\pi}\right)\right]\right\} \quad (3.4.49)$$

- stripuri largi ($w/h > 3{,}3$)

$$Z_{c0} = \frac{1{,}199\pi}{2\varepsilon_r^{1/2}}\left\{ \frac{w}{2h} - \frac{ln\, 4}{\pi} + \frac{ln(e\pi^2/16)}{2\pi}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r^2} + \frac{\varepsilon_r + 1}{2\pi\varepsilon_r}\left[ ln\left(\frac{e\pi}{2}\right) + ln\left(\frac{w}{2h} + 0{,}94\right)\right]\right\}^{-1} \quad (3.4.50)$$

unde e este baza logaritmului natural.

**2°. Formule pentru sinteza liniilor microstrip**.

Se consideră date impedanţa caracteristică $Z_{c0}$ şi permitivitatea $\varepsilon_r$ şi se urmăreşte determinarea mărimilor *w/h* şi $\varepsilon_{ref}$. Şi în cazul sintezei se propun relaţii aproximative pe domenii de valori ale raportului *w/h*, însă aceste rapoarte sunt corelate cu domenii de valori ale impedanţei şi ale permitivităţii.

- Stripuri înguste ($w/h < 2$, sau $Z_{c0} > (44 - 2\varepsilon_r)$)

$$\frac{w}{h} = \frac{8\, exp(A_0)}{exp(2A_0) - 2} \quad (3.4.51)$$

$$\varepsilon_{ref} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2}\left[1 - \frac{29{,}98}{Z_{c0}}\left(\frac{2}{\varepsilon_r + 1}\right)^{1/2}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\right)\left(ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\varepsilon_r} ln\frac{4}{\pi}\right)\right]^2 \tag{3.4.52}$$

unde

$$A_0 = \frac{Z_{c0}}{60}\left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2}\right)^{1/2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\left(0{,}23 + \frac{0{,}11}{\varepsilon_r}\right) \tag{3.4.53}$$

- Stripuri largi ($w/h > 2$, sau $Z_{c0} < (44 - 2\varepsilon_r)$)

$$\frac{w}{h} = \frac{2}{\pi}\left[(B_0 - 1) - ln(2B_0 - 1)\right] + \frac{\varepsilon_r - 1}{\pi\varepsilon_r}\left[ln(B_0 - 1) + 0{,}293 - \frac{0{,}517}{\varepsilon_r}\right] \tag{3.4.54}$$

$$\varepsilon_{ref} = \frac{\varepsilon_r}{0{,}96 + (0{,}11\varepsilon_r - 0{,}004\varepsilon_r^2)[log(10 + Z_{c0}) - 1]} \tag{3.4.55}$$

unde

$$B_0 = \frac{377\pi}{2Z_{c0}\varepsilon_r^{1/2}} \tag{3.4.56}$$

### 3.4.2.4. Efecte de dispersie în liniile microstrip

Parametrii liniilor microstrip determinați prin metode cvasistatice de analiză depind de capacitatea $C_e$, prin urmare nu depind de frecvență, atât timp cât se poate admite că permitivitatea dielectrică nu depinde de frecvența. În realitate în linia microstrip se propagă moduri compuse, constând din TEM, TM şi TE; drept urmare parametrii $\varepsilon_{ref}$ şi $Z_{c0}$ sunt funcții de frecvență, fiind notați $\varepsilon_{ref}(f)$ şi $Z_{c0}(f)$. Evaluarea exactă a acestor dependențe poate fi efectuată în cadrul metodelor de analiză de „undă totală" (secțiunea 3.4.2.6). Aici vor fi enumerate câteva modele semi-empirice care stabilesc dependențe de frecvență ce concordă satisfăcător cu rezultatele experimentale; detalii suplimentare pot fi găsite în lucrările [13], [14].

**1°. Relație empirică generală [19].**

Pe baza unor rezultate teoretice şi experimentale cu privire la proprietățile dispersive ale liniilor microstrip au fost stabilite patru particularități importante:

a) $\varepsilon_{ref}(f)$ creşte monoton cu frecvența; ținând cont de relația (3.4.36) se constată că viteza de fază

$$v_{ph}(f) = \frac{c_0}{[\varepsilon_{ref}(f)]^{1/2}} \tag{3.4.57}$$

descreşte monoton cu frecvența;

b) Viteza de fază normată $v_{Nph}(f) = v_{ph}(f)/c_0 = [1/\varepsilon_{ref}(f)]^{1/2}$ şi derivata de ordin întâi la frecvența $f \to 0$ au expresiile:

$$v_{Nph}\Big|_{f\to 0} = [1/v_{Nph}(0)]^{1/2}; \qquad \left.\frac{\partial v_{Nph}(f)}{\partial f}\right|_{f\to 0} = 0 \tag{3.4.58}$$

c) Atunci când $f \to \infty$ viteza de fază normată $v_{Nph}(f)$ şi derivata de ordin întâi au expresiile:

$$v_{Nph}(f)\Big|_{f\to\infty} = (1/\varepsilon_r)^{1/2}; \qquad \left.\frac{\partial v_{Nph}(f)}{\partial f}\right|_{f\to\infty} = 0 \tag{3.4.59}$$

d) În vecinătatea unei frecvențe critice $f_{cr}$ este valabilă expresia

$$\left.\frac{\partial^2 v_{Nph}(f)}{\partial f^2}\right|_{f=f_{cr}} = 0 \tag{3.4.60}$$

această condiție este satisfăcută când $v_{Nph}(f)$ are expresia

$$v_{Nph}(f) = \frac{1}{[\varepsilon_r \varepsilon_{ref}(0)]^{1/2}} \frac{\left(\varepsilon_{ref}(0)\right)^{1/2} f_n^2 + \varepsilon_r^{1/2}}{f_n^2 + 1} \tag{3.4.61}$$

unde

$$f_n = \frac{f}{f_{cr}} = \frac{4h(\varepsilon_r - 1)^{1/2}}{\lambda_0} \tag{3.4.62}$$

iar $f_{cr}$ este frecvența critică (limita inferioară) a modului $TE_1$; $\lambda_0$ este lungimea de undă de spațiu liber. Din expresiile (3.4.58) și (3.4.59) rezultă $\varepsilon_{ref}(f \to 0) = \varepsilon_{ref}$ și $\varepsilon_{ref}(f \to \infty) = \varepsilon_r$, așa cum se arată în Fig. 3.23.

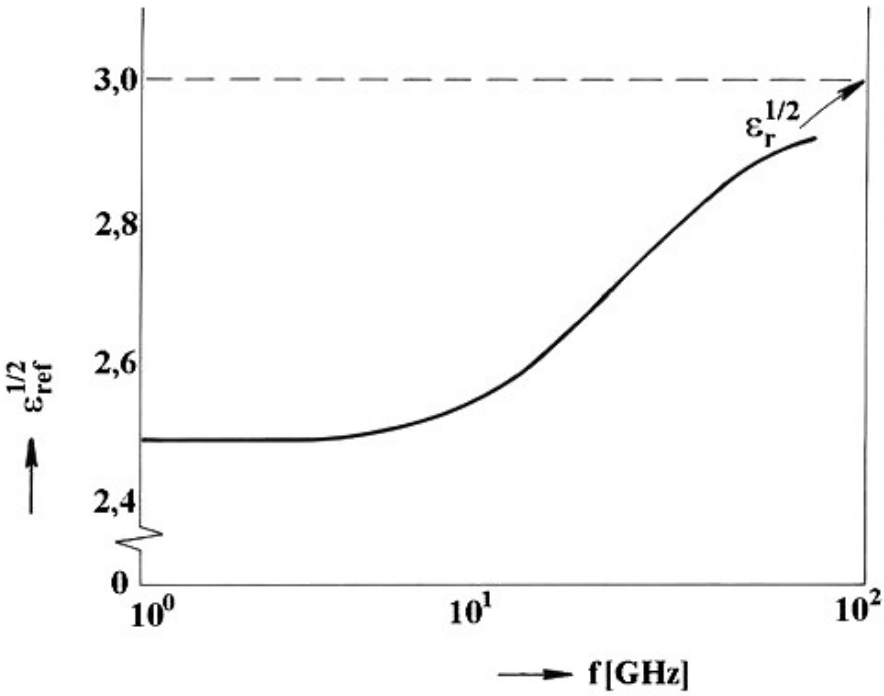



**Fig. 3.23. Variația permitivității relative efective $\varepsilon_{r\,ef}$ cu frecvența pentru o linie microstrip cu parametrii**

**$\varepsilon_r$ = 9,0; w/h = 0,867; h = 0,97 mm [19]**

**2°. Modelul de ghid gofrat (striat) [20].**

Pentru studiul efectelor de dispersie se consideră o linie microstrip ecranată (Fig. 3.24a), similară cu cea din Fig. 3.21. Modelul de ghid gofrat se bazează pe analiza unei configurații ce conține trei regiuni distincte (Fig. 3.24 b), adică trei linii de transmisie paralele. Trebuie subliniat că modelul din Fig. 3.24b nu este fizic realizabil; dimensiunile specificate în figură sunt alese astfel încât la frecvențe $f \to 0$ parametrii caracteristici ai modelului să coincidă cu parametrii de analiză cvasistatică ai liniei microstrip propriu-zise. Dependența de frecvență a permitivității efective poate fi evaluată pe baza unei analize de rezonanță transversală; în cadrul acestei analize se impune condiția ca, la fiecare interfață dielectric-aer, suma admitanțelor, privite de la stânga la dreapta interfeței, să fie zero.

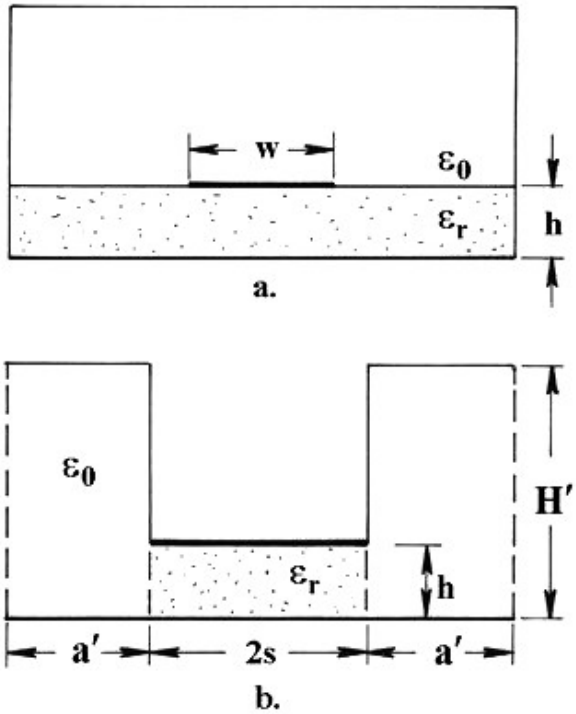



**Fig. 3.24. Modelul de ghid gofrat: a – structura inițială a liniei microstrip ecranate; b – model cu trei regiuni distincte**

$$\left(\frac{\gamma_a}{H'}\right)tanh(\gamma_a a')+\left(\frac{\gamma_d}{h}\right)tanh(\gamma_d w')=0 \tag{3.4.63}$$

unde indicii *a* şi *d* se referă la aer, respectiv dielectric. Constantele de propagare sunt legate prin relații de forma

$$\gamma^2+\gamma_i^2=-\omega^2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r \tag{3.4.64}$$

unde *i=a* sau *d*, după situație. Ultimele două relații sunt combinate cu relațiile modului cvasi-TEM extrăgându-se expresia $\varepsilon_{ref}(f)$ ca funcție de $\varepsilon_r$, $\varepsilon_{ref}(0)$, $f$, $Z_{c0}$ şi ($H'/h$). Conform lucrării [20] expresia exactă este

$$\varepsilon_{ref}(f)=\varepsilon_r-\frac{\varepsilon_r-\varepsilon_{ref}(0)}{1+f^2\left(\frac{2\mu_0 h}{Z_{c0}}\right)^2\left\{\frac{\pi}{12}\left[\frac{\varepsilon_{ref}(0)-1+(H'/h)^2(\varepsilon_r-\varepsilon_{ref}(0))}{\varepsilon_r-1}\right]\left[\frac{(\varepsilon_{ref}(0)-1)(\varepsilon_r-\varepsilon_{ref}(0))}{\varepsilon_{ref}(0)-1}\right]\right\}} \tag{3.4.65}$$

Este prezentată şi o formulă simplificată

$$\varepsilon_{ref}(f)=\varepsilon_r-\frac{\varepsilon_r-\varepsilon_{ref}(0)}{1+(f/f_p)^2 G} \tag{3.4.66}$$

unde

$$f_p=Z_{c0}/2\mu_0 h;\quad G=0{,}6+0{,}009Z_{c0} \tag{3.4.67}$$

Valoarea empirică a parametrului *G* este dată pentru substrat de alumină; în general $0{,}3\le G\le 1{,}7$.

**3°. Modelul de ghid planar[21].**

În cadrul acestui model linia microstrip inițială este înlocuită printr-un ghid cu plăci metalice paralele de conductivitate infinită, având dimensiunile $w_{ef}$ şi *h* (Fig. 3.25 b); ghidul este umplut cu un mediu dielectric având permitivitatea $\varepsilon_{ref}$, iar lateral este limitat de pereți magnetici. Mărimile $w_{ef}$ şi $\varepsilon_{ref}$ sunt dependente de frecvență: $\varepsilon_{ref}(f)$ descrie influența fenomenelor de dispersie

asupra vitezei de fază, iar $w_{ef}(f)$ descrie influența dispersiei asupra impedanței caracteristice. Pe baza analizei de „undă totală" (vezi secțiunea 3.4.26) s-a constatat că viteza de fază descreşte cu frecvența, iar $\varepsilon_{ref}(f)$ şi $Z_{c0}(f)$ cresc cu frecvența. Dependența de frecvență (descreşterea) a lărgimii efective $w_{ef}(f)$ are expresia

$$w_{ef}(f) = w + \frac{w_{ef}(0) - w}{1 + f/f_g}; \quad f_g = \frac{c_0}{2w\varepsilon_r^{1/2}} \tag{3.4.68}$$

iar $w_{ef}(0)$ rezultă din analiza cvasistatică

$$w_{ef}(0) = 120\pi\, h/Z_{c0}\,[\varepsilon_{ref}(0)]^{1/2} \tag{3.4.69}$$

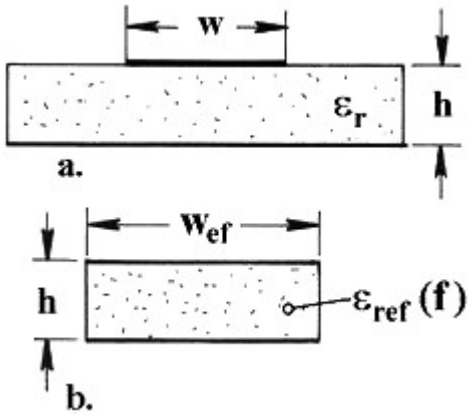



**Fig. 3.25. Modelul de ghid planar umplut cu dielectric: a – structura inițială a liniei microstrip; b – ghid planar având parametrii $w_{ef}$ şi $\varepsilon_{ref}$**

Dependența de frecvență a impedanței caracteristice este dată de expresia

$$Z_{c0}(f) = \frac{120\pi\, h}{w_{ef}(f)[\varepsilon_{ref}(f)]^{1/2}} \tag{3.4.70}$$

Pe baza ultimei relații se poate explica creşterea impedanței caracteristice cu frecvența, anume $w_{ef}(f)$ descreşte mai rapid decât $(\varepsilon_{ref}(f))^{1/2}$; descreşterea lui $w_{ef}(f)$ poate fi explicată fizic astfel: odată cu creşterea frecvenței are loc concentrarea liniilor de câmp electric în spațiul de sub strip.

**4°. Modelul "moduri cuplate TEM-TM"[22].**

Se consideră că variația cu frecvența a permitivității relative $\varepsilon_{ref}(f)$ este cauzată de cuplajul între modul fundamental TEM şi modul $TM_0$ (mod TM cu cea mai joasă frecvență critică). Este obținută expresia

$$\varepsilon_{ref}(f) = \left\{0{,}5\left[(\varepsilon_{ref}(0))^{1/2} + (\varepsilon_{ref}(TM))^{1/2}\right] + \left[\varepsilon_{12}^2 + 0{,}25[(\varepsilon_{ref}(0))^{1/2} - (\varepsilon_{ref}(TM))^{1/2}]^2\right]^{1/2}\right\}^2 \tag{3.4.71}$$

unde $\varepsilon_{ref}(0)$ este valoarea cvasistatică ($f \to 0$), iar $\varepsilon_{ref}(TM)$ este permitivitatea relativă pentru modul $TM_0$. Parametrul de cuplaj $\varepsilon_{12}$ are expresia aproximativă

$$\varepsilon_{12}^2 = a_0(\varepsilon_r^{1/2} - 1)^2 (w/h)^{n_3} (f/f_{ef})^{n_2} \tag{3.4.72}$$

unde: $f_{ef}$ reprezintă frecvența la care vitezele de fază ale modurilor TEM şi $TM_0$ coincid; $a_0, n_2, n_3$ sunt constante găsite empiric, care determină cea mai bună fitare a modelului TEM-TM

cu rezultatele experimentale ($n_2 = 4/3,\ n_3 = 3/4,\ a_0 = 0{,}22$). Domeniul de valabilitate al modelului este: $2 \le \varepsilon_r \le 104,\ 0{,}645 \le h \le 3{,}225mm,\quad 0{,}9 \le w/h \le 6,\quad f < 0{,}5 f_{ef}$.

### 3.4.2.5. Considerații asupra altor modele de analiză cvasistatică.

Pe lângă metodele expuse în secțiunile (3.4.2.2) şi (3.4.2.3) există şi alte metode de analiză cvasistatică; două dintre ele sunt expuse pe scurt în această secțiune.

**1°. Metoda ecuației integrale**.

Spre deosebire de metodele prezentate anterior, în cazul de față analiza cvasistatică a liniei microstrip este formulată sub forma unei ecuații integrale. Întâi se definește o funcție Green bidimensională (anexa AIV.3) în termenii unei distribuții de sarcină de suprafață, pornindu-se de la ecuația Poisson

$$\nabla_T^2 G(x,y;x_0,y_0) = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\delta(x-x_0)\delta(y-y_0) \tag{3.4.73}$$

unde $\delta$ este funcția Dirac (delta) (AII.(II.1.8)); coordonatele $(x_0, y_0)$ se referă la locația sursei, iar coordonatele $(x,y)$ se referă la punctul în care se determină potențialul. Prin urmare în cazul de față $G(x,y;x_0,y_0)$ reprezintă o funcție Green de potențial (adică potențialul în punctul $(x,y)$ produs de o sarcină de suprafață de magnitudine unitară localizată în punctul $(x_0, y_0)$). Funcția $G(x,y;x_0,y_0)$ satisface condițiile la limită şi cele de interfață însă nu satisface condițiile impuse sursei. Apoi, utilizând funcția Green se formulează o ecuație integrală (AIII.2) care permite determinarea distribuției de sarcină

$$\Psi(x,y) = \int G(x,y;x_0,y_0)\rho(x_0,y_0)dx_0 \tag{3.4.74}$$

unde: $\Psi(x,y)$ este potențialul, iar $\rho(x_0,y_0)$ este distribuția de sarcină pe stripul central; integrarea se efectuează pe suprafața conductorului central la ordonata $y_0 = h$. Trebuie subliniat că determinarea funcției Green pentru configurația microstrip constituie o sarcină laborioasă. Ca exemplu prezentăm expresia obținută în lucrarea [23]

$$G(x,h) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0(\varepsilon_r+1)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} k_0^{n-1} ln\left[\frac{\left(4n^2+\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2\right)\left(4n^2+\left(\frac{x+x_0}{h}\right)^2\right)}{\left(4(n-1)^2+\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2\right)\left(4(n-1)^2+\left(\frac{x+x_0}{h}\right)^2\right)}\right]\right\} \tag{3.4.75}$$

care a fost obținută prin utilizarea „metodei imaginilor”; coeficientul $k_0$ este definit prin relația

$$k_0 = (1-\varepsilon_r)/(1+\varepsilon_r) \tag{3.4.76}$$

Ca urmare a faptului că $k_0$ este negativ, relația (3.4.75) reprezintă o serie alternativă care este convergentă; s-a demonstrat că pentru valori $2 \le \varepsilon_r \le 20$, numărul de termeni suficient pentru a asigura o convergență rapidă este cuprins între 15 şi 150.

După găsirea funcției $G(x,y;x_0,y_0)$ urmează rezolvarea ecuației integrale (3.4.74) prin scrierea ei sub forma unei ecuații matriciale

$$[\vec{v}] = [\vec{p}] \cdot [\vec{q}] \tag{3.4.77}$$

unde: $[\vec{v}]$ şi $[\vec{q}]$ sunt matrici coloană reprezentând potențialul $v$, respectiv sarcina $q$; matricea $[\vec{p}]$ reprezintă coeficientul Maxwell de potențial. Deoarece se admite că potențialele

conductoarelor se presupun cunoscute şi matricea $[\vec{v}]$ este cunoscută, astfel ecuaţia (3.4.77) se rezolvă pentru $[\vec{q}]$ prin inversiunea matricei $[\vec{p}]$; prin urmare sarcina totală $Q$ şi capacitatea $C_e$ (pe unitate de lungime) a liniei microstrip pot fi calculate după relaţia

$$C_e = Q/v = \sum_j \sum_k (\vec{p}^{-1})_{jk} \tag{3.4.78}$$

unde $(\vec{p}^{-1})_{jk}$ este termenul de ordin $jk$ al inversei matricei $[\vec{p}]$.

**2°. Metodă variaţională în domeniul transformatelor Fourier (DTF).**

Această metodă este rezultatul cercetărilor efectuate cu scopul de a găsi tehnici de analiză mai eficiente din punctul de vedere al utilizării metodelor moderne de calcul numeric. Sunt de subliniat două particularităţi ale acestei metode. Prima, pentru calculul capacităţii $C_e$ în funcţie de distribuţia de sarcină ρ se utilizează o metodă variaţională; prin aceasta este înlăturată necesitatea cunoaşterii exacte a distribuţiei de sarcină. A doua, o fracţiune importantă a analizei se efectuează în DTF având drept rezultat că ecuaţia integrală pentru potenţiale este înlocuită cu un produs algebric dintre o sarcină aproximativă $\tilde{\rho}$ şi un factor $\tilde{g}$ care intervine în cadrul transformărilor Fourier.

Expresia variaţională a capacităţii $C_e$ (limita superioară) poate fi scrisă sub forma [24]

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{Q^2} \int_{S_1} \rho(x) \Psi(x,h) dx \tag{3.4.79}$$

unde

$$Q = \int_{S_1} \rho(x) dx \tag{3.4.80}$$

iar indicele $S_1$ semnifică faptul că integrala se ia pe aria stripului metalic (unitate de lungime). Făcând transformata Fourier după axa $x$ a expresiei (3.4.79) se obţine

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{2\pi Q^2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\alpha_0) \tilde{\Psi}(\alpha_0, h) d\alpha \tag{3.4.81}$$

unde semnul ~ (tilda) indică o funcţie transformată conform relaţiei de definiţie

$$\tilde{f}(\alpha_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{j\alpha_0 x} dx \tag{3.4.82}$$

Potenţialul $\Psi(x,h)$ se evaluează după o relaţie similară cu (3.4.74):

$$\Psi(x,h) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{-w/2}^{w/2} \rho(x_0) G(x,h;x_0,h) dx_0 \tag{3.4.83}$$

în timp ce $\tilde{\Psi}(\alpha_0,h)$ rezultă simplu din

$$\tilde{\Psi}(\alpha_0,h) = \frac{1}{\varepsilon_0} \tilde{\rho}(\alpha_0) \tilde{g}(\alpha_0) \tag{3.4.84}$$

de unde rezultă că $\tilde{\Psi}(\alpha_0,h)$ se evaluează mult mai uşor.

Funcţia potenţial $\tilde{\Psi}(\alpha_0,h)$ în DTF se evaluează după cum urmează; ea satisface ecuaţia Laplace în planul $(\alpha_0, y)$, exceptând cazul $y = h$. Avem ecuaţia

$$\left( -\alpha_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tilde{\Psi}(\alpha_0,h) = 0 \tag{3.4.85}$$

cu condiţiile la limită:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Psi}(\alpha_0,0)=0, && y=0\\
&\widetilde{\Psi}(\alpha_0,h+0)=\widetilde{\Psi}(\alpha_0,h-0), && y=h\\
&\widetilde{\Psi}(\alpha_0,\infty)=0, && y=\infty\\
&\frac{d\widetilde{\Psi}(\alpha_0,h+0)}{dy}=\varepsilon_r\frac{d\widetilde{\Psi}(\alpha_0,h-0)}{dy}-\frac{1}{\varepsilon_0}\widetilde{\rho}(\alpha_0)
\end{aligned} \tag{3.4.86}$$

Soluția generală a ecuației (3.4.85) în regiunea $0\le y\le h$ care satisface condițiile la limită specificate constă dintr-o combinație liniară ale exponențialelor *exp(-αy)* şi *exp(αy)*; în regiunea $y\ge h$ soluția este de forma $exp(-|\alpha|y)$. La nivelul $y = h$ se poate scrie

$$\widetilde{\Psi}(\alpha_0,h)=\frac{1}{\varepsilon_0}\widetilde{\rho}(\alpha_0)\widetilde{g}(\alpha_0)=\frac{\widetilde{\rho}(\alpha_0)}{|\alpha_0|\varepsilon_0[1+\varepsilon_r\coth(|\alpha_0|h)]} \tag{3.4.87}$$

Această expresie se introduce în (3.4.81) pentru determinarea capacității $C_e$, însă înainte de a calcula pe $C_e$ trebuie găsită mărimea $\widetilde{\rho}(\alpha_0)$. Având în vedere caracterul variațional al expresiei de definiție (3.4.79) se poate folosi o funcție test aproximativă pentru *ρ(x)*, introducând astfel numai erori de ordinul doi în valoarea capacității. O funcție ce maximizează valoarea lui $C_e$ va da cele mai apropiate valori de rezultatul exact [2], [9], [24]. Presupunând o variație a sarcinii proporțională cu $|x|$, se obține următoarea expresie pentru $\widetilde{\rho}(\alpha_0)$

$$\frac{\widetilde{\rho}(\alpha_0)}{Q}=\frac{2\sin(\alpha_0 w/2)}{\alpha_0 w/2}-\left[\frac{\sin(\alpha_0 w/4)}{\alpha_0 w/4}\right]^2 \tag{3.4.88}$$

S-a constatat că rezultatele obținute prin această metodă concordă bine cu cele obținute prin metoda transformărilor conforme (secțiunea 3.4.2.3.).

### 3.4.2.6. Analiză de undă totală

**1°. Relații generale**.

În secțiunea 3.4.2.1. s-a arătat că linia microstrip nu poate suporta modul TEM pur; pentru satisfacerea condițiilor la limită de interfață dielectric-aer este necesară prezența unor componente longitudinale $E_z$ şi $H_z$. În linie se vor propaga moduri hibride care reprezintă o combinație de moduri TM şi TE. Analiza de câmp care nu apelează la aproximația cvasistatică este numită analiză de undă totală, ea urmăreşte determinarea constantei de propagare în loc de capacitate lineică; numai soluțiile hibride exacte pun în evidență caracteristicile complete de dispersie ale liniei microstrip. Este necesar să subliniem că analiza completă de undă totală implică un aparat matematic extrem de laborios; aici se prezintă pe scurt relațiile generale şi principiile metodelor de rezolvare; o tratare riguroasă poate fi găsită în referințele [2], [9], [14], [25].

Trebuie precizat că linia microstrip nu poate suporta moduri TM sau TE pure; modurile hibride care se propagă reprezintă o suprapunere a modurilor TM şi TE; aceste moduri pot fi exprimate în termenii unor potențiale scalare: $\Psi^e$ pentru modul TM şi $\Psi^h$ pentru modul TE. Ținând cont de legătura dintre componentele longitudinale şi transversale ale câmpului electromagnetic (secțiunea 2.2.1) şi considerând linia fără pierderi ($\varepsilon''=0$, $\sigma$ infinit) se poate scrie setul de ecuații:

$$E_{zi}(x,y,z)=j(k_{\lambda i}^2/\beta)\Psi_i^e(x,y)e^{-j\beta z} \tag{3.4.89}$$

$$H_{zi}(x,y,z)=j(k_{\lambda i}^2/\beta)\Psi_i^e(x,y)e^{-j\beta z} \tag{3.4.90}$$

$$E_{Ti}(x,y,z)=[\nabla_T\Psi_i^e(x,y)-(\omega\mu_i/\beta)\hat{k}\times\nabla_T\Psi_i^h(x,y)]e^{-j\beta z} \tag{3.4.91}$$

$$H_{Ti}(x,y,z)=[(\omega\varepsilon_i/\beta)\hat{k}\times\nabla_T\Psi_i^e(x,y)+\nabla_T\Psi_i^h(x,y)]e^{-j\beta z} \tag{3.4.92}$$

unde

$$k_{\lambda i}^2 = k_i^2 - \beta^2 \tag{3.4.93}$$

este numărul de undă transversal, iar $\beta$ este constanta de propagare (de fază) a liniei fără pierderi. Setul de ecuații este valabil atât în substratul dielectric ($i = 1$) cât şi în aer ($i = 2$). Potențialele scalare $\Psi^e$ şi $\Psi^h$ satisfac ecuațiile de propagare Helmholtz:

$$(\nabla_T^2 + k_{\lambda i}^2)\Psi_i^e = 0 \tag{3.4.94}$$

$$(\nabla_T^2 + k_{\lambda i}^2)\Psi_i^h = 0 \tag{3.4.95}$$

Condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă în cazul liniei microstrip deschise sunt: componentele tangențiale ale câmpului electric şi magnetic trebuie să fie continue la interfața dielectric-aer; componentele tangențiale ale câmpului electric pe conductor sunt zero; câmpul electromagnetic satisface condițiile de radiație la infinit.

Fiind dată simetria structurii stripline în raport cu planul ($y,z$), modurile de propagare pot fi împărțite în două seturi ortogonale de moduri [2]. Unul din aceste seturi are componente $E_z$ simetrice şi $H_z$ antisimetrice ($E_z$- par şi $H_z$- impar), al doilea set are componente $E_z$ antisimetrice şi $H_z$ simetrice($E_z$- impar şi $H_z$- par). S-a constatat că modul dominant este modul $E_z$- par, $H_z$- impar, de ordinul cel mai inferior, care se apropie de soluția cvasi-TEM la frecvențe joase.

În general analiza de undă totală a liniei microstrip deschise poate fi efectuată convenabil prin utilizarea transformărilor Fourier după variabila $x$; în acest caz diferitele componente ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ pot fi exprimate prin transformatele potențialelor $\Psi^e$ şi $\Psi^h$ după variabila $x$; la rândul lor soluțiile pentru potențialele transformate $\tilde{\Psi}^e$ şi $\tilde{\Psi}^h$ se obțin prin aplicarea condițiilor la limită în domeniul transformărilor Fourier DTF. Condițiile la limită în planul $y=h$ se scriu în funcție de curenții electrici longitudinali şi transversali de pe strip. Există în principal două metode de analiză de undă totală: „metoda ecuației integrale în domeniul spațial" (Denlinger) şi „metoda Galerkin în domeniul spectral". Înainte de a prezenta aceste metode sunt utile câteva considerente asupra transformatelor Fourier ale potențialelor $\Psi^e$ şi $\Psi^h$; transformatele $\tilde{\Psi}^e$ şi $\tilde{\Psi}^h$ se determină conform relației de definiție (3.4.82) pe care o rescriem

$$\tilde{\Psi}_i^e(\alpha_0, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i^e(x, y) e^{j\alpha_0 x} dx \tag{3.4.96}$$

Potențialele $\tilde{\Psi}_i$ satisfac ecuația de undă în DTF

$$\left(-\gamma_i^2 + \frac{d^2}{dy^2}\right)\tilde{\Psi}_i(\alpha_0, y) = 0 \tag{3.4.96}$$

unde s-a notat

$$\gamma_i^2 = \alpha_0^2 - k_{\lambda i}^2 = \alpha_0^2 - \beta^2 - k_i^2 \tag{3.4.97}$$

şi $k_1^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \mu_r \varepsilon_r$, $k_2^2 = k_0 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$. Valorile explicite pentru $\tilde{\Psi}^e$ şi $\tilde{\Psi}^h$ în substrat şi în aer se pot scrie ținând cont de condițiile la limită (3.4.86).

Utilizând condițiile la limită la $y=0$ şi $y = \infty$, soluțiile pot fi scrise sub forma:

$$\tilde{\Psi}_1^e(\alpha_0, y) = A(\alpha_0)\sinh(\gamma_1 y) \tag{3.4.99}$$

$$\tilde{\Psi}_2^e(\alpha_0, y) = B(\alpha_0)\exp[-\gamma_2(y-h)] \tag{3.4.100}$$

$$\tilde{\Psi}_1^h(\alpha_0, y) = C(\alpha_0)\cosh(\gamma_1 y) \tag{3.4.101}$$

$$\tilde{\Psi}_2^h(\alpha_0, y) = D(\alpha_0)\exp[-\gamma_2(y-h)] \tag{3.4.102}$$

Coeficienții *A, B, C, D* se determină prin aplicarea condițiilor de continuitate la interfața $y = h$; aceste condiții sunt:

$$\widetilde{E}_{z1}(\alpha_0,h)=\widetilde{E}_{z2}(\alpha_0,h) \tag{3.4.103}$$

$$\widetilde{E}_{x1}(\alpha_0,h)=\widetilde{E}_{x2}(\alpha_0,h) \tag{3.4.104}$$

$$\widetilde{H}_{z1}(\alpha_0,h)-\widetilde{H}_{z2}(\alpha_0,h)=-\widetilde{J}_x(\alpha_0) \tag{3.4.105}$$

$$\widetilde{H}_{x1}(\alpha_0,h)-\widetilde{H}_{x2}(\alpha_0,h)=-\widetilde{J}_z(\alpha_0) \tag{3.4.106}$$

unde $\widetilde{J}_x(\alpha_0)$ şi $\widetilde{J}_z(\alpha_0)$ sunt transformatele Fourier ale curenților (necunoscuți) de pe strip.

În domeniul spațial pot fi scrise condițiile la limită suplimentare pe strip, $y = h$:

$$E_{z2}(x,h)=0, \qquad |x|<w/2 \tag{3.4.107}$$

$$[dH_{z2}(x,h)/dy]=0, \quad |x|<w/2 \tag{3.4.108}$$

În funcție de modalitatea de aplicare a condițiilor (3.4.107), (3.4.108) în cazul analizei de undă totală se disting două metode de rezolvare: a) metoda ecuației integrale în domeniul spațial, unde condițiile la limită specificate se aplică în domeniul spațial; b) metoda Galerkin în domeniul spectral (DTF).

**2°. Metoda ecuației integrale în domeniul spațial [25].**

Denumirea metodei este dată de Denlinger; grupul de ecuații (3.4.99)-(3.4.106) împreună cu condițiile la limită (3.4.107) şi (3.4.108) conduc la un set de ecuații integrale cuplate pentru $\widetilde{J}_x(\alpha_0)$ şi $\widetilde{J}_z(\alpha_0)$:

$$I_{x0}\int_{-\infty}^{\infty}G_{11}(\alpha_0,\beta)\widetilde{I}_x(\alpha_0)e^{-j\alpha_0 x}d\alpha_0+I_{z0}\int_{-\infty}^{\infty}G_{12}(\alpha_0,\beta)\widetilde{I}_z(\alpha_0)e^{-j\alpha_0 x}d\alpha_0=0 \tag{3.4.109}$$

$$I_{x0}\int_{-\infty}^{\infty}G_{21}(\alpha_0,\beta)\widetilde{I}_x(\alpha_0)e^{-j\alpha_0 x}d\alpha_0+I_{z0}\int_{-\infty}^{\infty}G_{22}(\alpha_0,\beta)\widetilde{I}_z(\alpha_0)e^{-j\alpha_0 x}d\alpha_0=0 \tag{3.4.110}$$

în care s-a presupus $-w/2<x<w/2$, $\mu_r=1$, iar funcțiile *G* au expresiile:

$$G_{11}(\alpha_0,\beta)=\frac{1}{Det}\left[F_1 b_{22}+\frac{\alpha_0\beta}{k_{\lambda 1}^2}b_{12}\right] \tag{3.4.111}$$

$$G_{12}(\alpha_0,\beta)=b_{12}/Det \tag{3.4.112}$$

$$G_{21}(\alpha_0,\beta)=\frac{\gamma_2}{Det}\left[F_1 b_{21}+\frac{\alpha_0\beta}{k_{\lambda 1}^2}b_{11}\right] \tag{3.4.113}$$

$$G_{22}(\alpha_0,\beta)=\gamma b_{11}/Det \tag{3.4.114}$$

în care s-a notat:

$$b_{11}=-b_{22}=j\alpha_0\left[\frac{k_{\lambda 2}^2}{k_{\lambda 1}^2}-1\right] \tag{3.4.115}$$

$$b_{12}=\omega\mu_0\gamma_1\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+\frac{k_{\lambda 2}^2}{k_{\lambda 1}^2}\tanh(\gamma_1 h)\right] \tag{3.4.116}$$

$$b_{21}=\frac{\omega\mu_0\gamma_1}{\beta}\left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1}+\varepsilon_r\frac{k_{\lambda 2}^2}{k_{\lambda 1}^2}\cot anh(\gamma_1 h)\right] \tag{3.4.117}$$

$$Det=b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21} \tag{3.4.118}$$

$$F_1 = \frac{\omega\mu_0\gamma_1 \tanh(\gamma_1 h)}{jk_{\lambda 2}^2} \tag{3.4.119}$$

La deducerea ecuațiilor (3.4.109) şi (3.4.110) pentru distribuțiile necunoscute de curenți $\widetilde{J}_x(\alpha_0)$ şi $\widetilde{J}_z(\alpha_0)$ au fost utilizate aproximațiile cu un singur termen de forma

$$\widetilde{J}_x(\alpha_0) = I_{x0}\widetilde{I}_x(\alpha_0) \tag{3.4.120}$$

$$\widetilde{J}_z(\alpha_0) = I_{z0}\widetilde{I}_z(\alpha_0) \tag{3.4.121}$$

S-a presupus că $\widetilde{J}_x$ şi $\widetilde{J}_z$ au forme cunoscute, iar singurele necunoscute pentru reprezentarea lor sunt coeficienții $I_{x0}$ şi $I_{z0}$. Necunoscuta care trebuie obținută prin rezolvarea ecuațiilor cuplate (3.4.109) şi (3.4.110) este constanta de propagare $\beta$, definită prin relația (3.4.93); această operație se realizează prin egalarea cu zero a determinatului matricii coeficienților necunoscuți $I_{x0}$, $I_{z0}$. Distribuțiile de curenți adoptate în lucrarea [25] sunt:

$$I_z(x) = \begin{cases} 1+(2x/w)^3 & |x| \le w/2 \\ 0 & \text{in celelalte cazuri} \end{cases} \tag{3.4.122}$$

$$I_z(x) = \begin{cases} \sin(\pi x/0{,}7w) & |x| \le 0{,}8w \\ \cos(\pi x/0{,}2w) & 0{,}8\,w/2 < |x| \le w/2 \\ 0 & \text{in celelalte cazuri} \end{cases} \tag{3.4.123}$$

Ca urmare a aproximației curenților printr-un singur termen rezultatele depind puternic de alegerea formei distribuției curenților.

O simplificare importantă se realizează prin neglijarea componentei transversale; această aproximare este considerată suficient de bună pentru stripuri foarte înguste în comparație cu lungimea de undă ($w/\lambda_0 < 0{,}1$) şi când se iau în considerare moduri de ordinul cel mai inferior. Prin această aproximare cele două ecuații integrale cuplate se reduc la o singură ecuație integrală ce conține $\beta$ ca parametru; timpul de calcul este considerabil redus.

**3°. Metoda Galerkin în domeniul spectral [26].**

Formularea problemei este similară ca în metoda precedentă însă condițiile la limită de tipul (3.4.107), (3.4.108) se aplică în domeniul spectral (DTF). Astfel în locul ecuațiilor integrale cuplate (3.4.109), (3.4.110) se obține

$$G_{11}(\alpha_0,\beta)\widetilde{J}_x(\alpha_0) + G_{12}(\alpha_0,\beta)\widetilde{J}_z(\alpha_0) = \widetilde{U}_1(\alpha_0) + \widetilde{U}_2(\alpha_0) \tag{3.4.124}$$

$$G_{21}(\alpha_0,\beta)\widetilde{J}_x(\alpha_0) + G_{22}(\alpha_0,\beta)\widetilde{J}_z(\alpha_0) = \widetilde{V}_1(\alpha_0) + \widetilde{V}_2(\alpha_0) \tag{3.4.125}$$

unde

$$\widetilde{U}_1(\alpha_0) = \int_{-\infty}^{w/2} u(x)e^{j\alpha_0 x}dx, \quad \widetilde{U}_2(\alpha_0) = \int_{w/2}^{\infty} u(x)e^{j\alpha_0 x}dx \tag{3.4.126}$$

$$\widetilde{V}_1(\alpha_0) = \int_{-\infty}^{w/2} v(x)e^{j\alpha_0 x}dx, \quad \widetilde{V}_2(\alpha_0) = \int_{w/2}^{\infty} v(x)e^{j\alpha_0 x}dx \tag{3.4.127}$$

Funcțiile *G* sunt definite prin relații de tipul (3.4.111)-(3.4.114), iar *u(x)* şi *v(x)* rezultă din relațiile:

$$E_{z2}(x,h) = \begin{cases} 0 & -w/2 < |x| < w/2 \\ j[k_{\lambda 2}^2/\beta]u(x) & \text{in celelalte cazuri} \end{cases} \tag{3.4.128}$$

$$\frac{dH_{z2}(x,h)}{dy} = \begin{cases} 0 & -w/2 < |x| < w/2 \\ j[k_{\lambda 2}^2/\beta]v(x) & \text{in celelalte cazuri} \end{cases} \tag{3.4.129}$$

Ecuaţiile (3.4.124), (3.4.125) se rezolvă prin metoda momentelor utilizând procedura Galerkin. Întâi mărimile $\widetilde{J}_x$ şi $\widetilde{J}_z$ se dezvoltă în termenii unor funcţii de bază cunoscute $\widetilde{J}_{xn}$ şi $\widetilde{J}_{zn}$

$$\widetilde{J}_x(\alpha_0) = \sum_{n=1}^{M} c_n \widetilde{J}_{xn}(\alpha_0); \quad \widetilde{J}_z(\alpha_0) = \sum_{n=1}^{N} d_n \widetilde{J}_{zn}(\alpha_0) \tag{3.4.130}$$

Funcţiile de bază $\widetilde{J}_{xn}$ şi $\widetilde{J}_{zn}$ se aleg astfel încât transformatele Fourier inverse să fie diferite de zero pe strip (*-w/2 < x < w/2*); se introduc $\widetilde{J}_x$ şi $\widetilde{J}_z$ în ecuaţiile (3.4.124) şi (3.4.125) şi se efectuează produsele interne cu funcţiile de bază $\widetilde{J}_{xn}$, $\widetilde{J}_{zn}$ pentru diferiţi *n*; în final se obţin ecuaţiile matriciale:

$$\sum_{n=1}^{M} K_{m,n}^{1,1} c_n + \sum_{n=1}^{N} K_{m,n}^{1,2} d_n \qquad n = 1,2,....N;\ m = 1,2,....M \tag{3.4.131}$$

$$\sum_{n=1}^{M} K_{m,n}^{2,1} c_n + \sum_{n=1}^{N} K_{m,n}^{2,2} d_n \qquad n = 1,2,....N,\ m = 1,2,....M \tag{3.4.132}$$

unde coeficienţii $k_{m,n}$ se determină din relaţia de forma

$$K_{m,n}^{1,1} = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{J}_{zn}(\alpha_0) G_{11}(\alpha_0, \beta) \widetilde{J}_{xn}(\alpha_0) d\alpha_0 \tag{3.4.133}$$

Constanta de propagare $\beta$ se obţine rezolvând ecuaţiile simultane (3.4.131), (3.4.132) prin egalarea cu zero a determinantului acestui set de ecuaţii. Rezultatele obţinute prin această metodă depind de modalitatea de alegere a funcţiilor bază şi de valorile *M* şi *N* selectate; acurateţea rezultatelor poate fi îmbunătăţită luând valori mari pentru *M* şi *N*.

Metoda Galerkin în domeniul spectral are două avantaje importante faţă de metoda ecuaţiei integrale în domeniu spaţial: a) soluţiile se obţin prin rezolvarea unor ecuaţii algebrice în loc de utilizarea ecuaţiilor integrale cuplate; b) pentru fiecare soluţie se poate recunoaşte uşor natura fizică a modului de propagare utilizând selecţia corespunzătoare a funcţiilor bază.

## Bibliografie Capitolul 3


1. D.M. Pozar „Microwave Engineering”, Addison Wesley Publ.Company, N.Y., (1990, reprinted 1993)
2. R.E. Collin „Field Theory of Guided Waves”, sec. edition, Oxford University Press, (1991)
3. A.M. Kuguşev, N.S. Golubeva „Bazele radioelectronicii” (l. rusă), Energia, Moscova, (1969)
4. J. Quinet „Theorie et practique des circutes de l'electronique et de amplificateurs”, vol 3, Dunod, (1963)
5. G. Rulea „Tehnica frecvențelor foarte înalte”, E.D.P, (1972)
6. D.K. Cheng „Field and Wave Electromagnetics”, Addison Wesley Publ. Company, N.Y.,(1989)
7. A.F. Harvey „Microwave Engineering”, Academic Press, London, N.Y., (1963)
8. G. Rulea „Bazele teoretice şi experimentale ale Tehnicii Microundelor”, Ed. Şt. şi Enciclopedică, Buc, (1989)
9. A. Ishimaru „Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering”, Prentice – Hall Int. Ed., N.Y., (1991)
10. J. Frey (editor) „Microwaves Integrated Circuits”, Artech House Inc. Massachusetts, (1975-1977)
11. H. A. Wheeler „Transmision line properties of paralel wide strips by conformal-mapping approximations”, IEEE transo n MTT, vol MTT-12, (1964), p. 280
12. H. A. Wheeler „Transmision-line properties of paralel strips separated by a dielectric sheet”, IEEE transo n MTT, vol MTT-13, (1965), p. 172
13. T. C. Edwards „Foundations of Microstrip Circuits Design”, John-Wiley and Sons, N.Y., (1992)
14. K.C. Gupta, R.Garg, I. Bahl, P. Bhartia „Microstrip Lines and Slotlines”, Artech House, Boston-London, (1996)
15. Ph. Pannier et al. „ Accurate and Eficient Numerical Method for the Analysis of Multimode Waveguide Discontinuities”, IEEE Trans. on MTT, vol MTT-48, nr.2, (2000)
16. R. Baican „Circuite Integrate de microunde”, Promedia-Plus, Cluj-Napoca, (1996)
17. R. Chatterjee „Elements of Microwave Engineering”, Ellis Horwood Series in Electrical and Electronic Engineering, division of John Wiley and Sons, N.Y.(1986)
18. H. Howe, Jr „Stripline Circuits Design”, Artech House, Burlington Massachusetts,(1974)
19. M. V. Schneider „Microstrip Dispersion”, Proc. IEEE, vol 60, (1972)
20. W. J. Getsinger „Microstrip Dispersion Model”, IEEE Trans. on MTT, vol MTT-21, (1973), p. 34
21. G. Kompa, R. Merhan „Planar Wavegiude Model for Calculating Microstrip Components”, Electron. Lett., vol 11, (1975), p.459
22. O. P. Jain et al. „Coupled Mode Model of Dispersion in Microstrip”, Electron. Lett., vol 7 (1971, p.405
23. P. Silvester „TEM Properties of Microstrip Transmission Lines”, Proc. IEEE, vol 115, (1968), p. 42
24. E. Yamashita, R. Mittra „Variational Method for the Analysis of Microstrip Lines', IEEE Trans. on MTT, vol MTT-16, (1968), p. 251
25. E. I. Denlinger „A Frequency Dependent Solution for Microstrip Transmission Lines”, IEEE Trans. on MTT, vol MTT-19, (1971) , p. 30
26. T. Itoh, R. Mittra „Spectral-Domain Approach for Calculating Dispersion Characteristics of Microstrip Lines”, IEEE trans. on MTT, vol MTT-21, (1973), p. 496
27. I. Casian-Botez „Teoria şi proiectarea circuitelor de microunde”, Matrix-Rom, (1998)

# CAPITOLUL 4

# SISTEME DE PROPAGARE GHIDATĂ CU UNDE ELECTROMAGNETICE DE SUPRAFAȚĂ

## 4.1. CLASIFICAREA UNDELOR ELECTROMAGNETICE DE SUPRAFAȚĂ. DEFINIȚII GENERALE

Pe lângă ghidurile de undă metalice (convenționale) prezentate în Cap. 2 şi structurile particulare de propagare (linii bifilare, ghiduri coaxiale, plăci metalice paralele, structuri microstrip) discutate în Cap. 3, există o clasă de structuri de propagare numite „*deschise*", capabile să asigure propagarea ghidată a undelor electromagnetice. Aceste structuri conțin cel puțin două medii dielectrice cu permitivități diferite (dintre care unul poate fi spațiul liber) iar propagarea are loc în spațiul din imediata vecinătate a suprafeței de separare, în lungul ei. În general, această undă electromagnetică este caracterizată prin factorul de propagare $exp(-j\beta z)$ în lungul structurii, şi printr-o scădere exponențială pe direcția perpendiculară pe suprafața de separare. Adesea aceste structuri sunt numite *ghiduri cu undă de suprafață* [1], [2]; deşi ghidurile cu undă de suprafață au unele proprietăți similare cu ghidurile metalice (numite structuri „*închise*") descrise în Cap. 2, se pot enumera câteva deosebiri importante: 1) posibilitatea de propagare a modurilor cu undă de suprafață, fără frecvențe de tăiere; 2) inexistența unui număr infinit de moduri discrete de propagare, la o frecvență dată; 3) existența unui număr finit de moduri discrete, concomitent cu o soluție de funcție proprie având un spectru continuu de valori proprii; 4) posibilitatea de obținere a unor soluții modale cu viteză de fază mai mică decât cea de spațiu liber.

În practică sunt cunoscute mai multe tipuri de structuri care pot suporta unde de suprafață: straturi dielectrice pe substraturi metalice plane, straturi dielectrice pe fire metalice (linii Goubau), straturi subțiri dielectrice pe suprafețe metalice (optică integrată), ghiduri dielectrice şi fibre optice.

Multitudinea de tipuri de undă care se pot propaga în astfel de structuri sunt numite în general „*unde complexe*"; pentru a stabili corelațiile dintre aceste unde precum şi semnificațiile fizice corespunzătoare, este utilă prezentarea unor relații generale şi a criteriilor de clasificare. Procesele fizice intime ce au loc la interfața a două medii dielectrice (cum ar fi fenomenele de reflexie totală şi de transmisie totală) sunt detaliat studiate în Cap. 9.

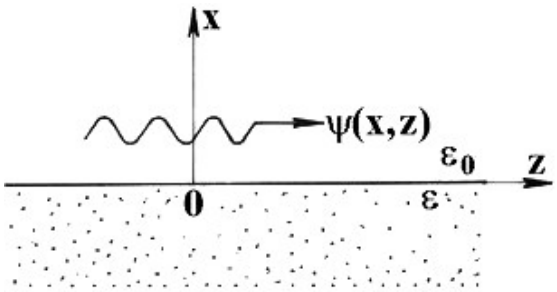



**Fig. 4.1. Definiția undei electromagnetice de suprafață**

Considerăm interfața aer – dielectric din Fig. 4.1 şi ne oprim asupra proceselor de propagare după direcția $+z$ a unei unde electromagnetice $\vec{\Psi}(\vec{r},t)$, în spațiul liber din imediată vecinătate a interfeței; spațiul liber se extinde la infinit după direcția $+x$. Limitându-ne la o problemă bidimensională cu $\partial/\partial y = 0$, câmpul care se propagă satisface o ecuație scalară de propagare de forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_{us}^2\right)\Psi(x,z)=0 \tag{4.1.1}$$

unde $k_{us}$ are semnificația unui număr de undă spațial total. Se poate scrie o soluție generală de forma [2]

$$\Psi(x,z)=\Psi_0 e^{-jpx}e^{-j\beta z} \tag{4.1.2}$$

unde: $\Psi_0$ este o constantă; $p$ are semnificația unui număr de undă transversal; $\beta$ este constanta de propagare longitudinală. Introducând această soluție în (4.1.1) se obține relația

$$p^2+\beta^2=k_{us}^2 \tag{4.1.3}$$

deşi în structurile practice se urmăreşte ca propagarea după $z$ să fie neatenuată, în cazul discuției generale se presupune că constantele $p$ şi $\beta$ sunt mărimi complexe [2]

$$p=p_r-j\alpha_t,\ \ \beta=\beta_r-j\alpha_l \tag{4.1.4}$$

Introducem în (4.1.3) şi separăm părțile reale şi imaginare; se obține

$$p_r^2-\alpha_t^2+\beta_r^2-\alpha_l^2=k_{us}^2 \tag{4.1.5}$$

$$p_r\alpha_t+\beta_r\alpha_l=0 \tag{4.1.6}$$

Utilizând ultima relație se poate verifica că planele de fază constantă şi cele de amplitudine constantă sunt perpendiculare între ele. Ținând cont de (4.1.4) soluția (4.1.2) se poate pune sub forma

$$\Psi(x,z)=\Psi_0 e^{-\vec{\alpha}\cdot\vec{r}}e^{-j\vec{k}_r\cdot\vec{r}} \tag{4.1.7}$$

în care s-a notat

$$\vec{k}_r=\hat{i}p_r+\hat{k}\beta_r \tag{4.1.8}$$

$$\vec{\alpha}=\hat{i}\,\alpha_t+\hat{k}\alpha_l \tag{4.1.9}$$

iar $\vec{r}=\hat{i}x+\hat{k}z$. Planele de fază constantă şi de amplitudine constantă sunt date de relațiile

$$\vec{k}_r\cdot\vec{r}=const.,\ \ \vec{\alpha}\cdot\vec{r}=const. \tag{4.1.10}$$

din care rezultă că planele de fază constantă sunt perpendiculare pe $\vec{k}_r$ iar cele de amplitudine constantă sunt perpendiculare pe $\vec{\alpha}$ ; ținând cont de (4.1.6) $\vec{k}_r$ este perpendicular pe $\vec{\alpha}$ întrucât

$$\vec{k}\cdot\vec{\alpha}=p_r\alpha_t+\beta_r\alpha_l=0 \tag{4.1.11}$$

prin urmare planele de fază constantă sunt perpendiculare pe cele de amplitudine constantă (Fig. 4.2).

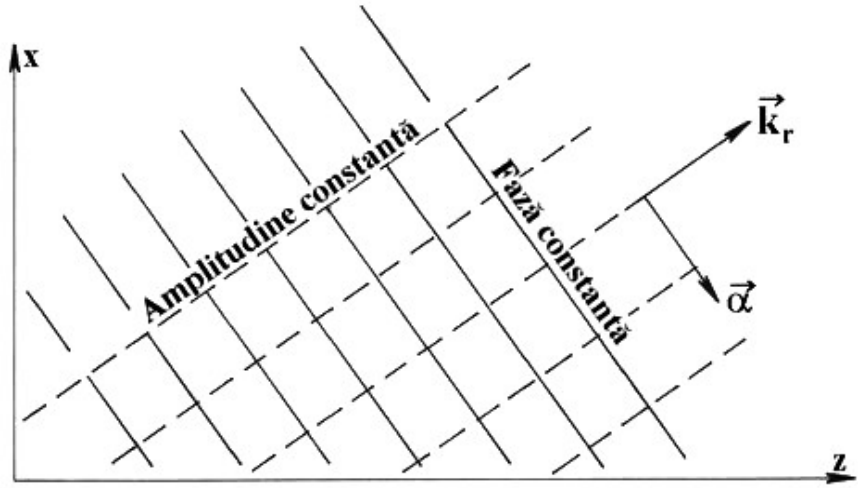



**Fig. 4.2. Plane de fază constantă şi amplitudine constantă**

În funcție de semnele şi valorile mărimilor $p_r, \alpha_t, \beta_r$ şi $\alpha_l$ în [2] se prezintă o clasificare generală a undelor de suprafață. Ne oprim întâi asupra a două criterii importante. Primul criteriu se referă la atenuarea după direcția $+x$. Considerăm o undă care se propagă pe direcția $+z$ (constantă de fază $\beta_r > 0$) şi ne referim la variația magnitudinii acestei unde după direcția $+x$, care este dată de $|exp(-jpx)| = exp(-\alpha_t x)$: dacă $\alpha_t > 0$ unda se atenuează după direcția $+x$ şi este numită *undă proprie*; dacă $\alpha_t < 0$ avem o undă cu amplitudinea crescătoare după direcția $+x$ care este numită *undă improprie*. Al doilea criteriu se referă la viteza de fază $(v_{ph})$ a undei de suprafață: dacă $v_{ph} < c_0$ ($c_0$ este viteza luminii în vid), adică $\beta_r = \omega / v_{ph} > k_0$ avem *unde trapate* (lente)care se propagă fără atenuare pe direcția $+z$; dacă $v_{ph} > c_0$, atunci $\beta_r = \omega / v_{ph} < k_0$ iar unda este numită *undă rapidă*.

În continuare prezentăm tabloul general al undelor de suprafață în funcție de diferite combinații ale constantelor de propagare $p$ şi $\beta$; acest tablou este arătat în Tabelul 4.1; de asemenea, făcând uz de mărimile $\vec{k}_r$ (4.1.8) şi $\vec{\alpha}$ (4.1.9) se poate da o interpretare grafică ilustrativă (Fig. 4.3).

**Tabelul 4.1 –** Clasificarea generală a undelor de suprafață

| Tip undă | | $\beta_r$ | $\alpha_l$ | $p_r$ | $\alpha_t$ | Denumire |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A$ | + | *0* | + | *0* | Unde rapide (moduri de ghid) |
| Unde proprii | $B$ | + | – | + | + | Unde de scurgere inversă |
| | $C$ | + | *0* | *0* | + | Unde de suprafață trapate |
| | $D$ | + | + | – | + | Unde Zenneck |
| | $E$ | + | *0* | – | *0* | Incidență unde plane |
| Unde improprii | $F$ | + | – | – | – | Undă improprie neatenuată |
| | $G$ | + | *0* | *0* | – | Undă de suprafață netrapată |
| | $H$ | + | + | + | – | Unde de scurgere directă |

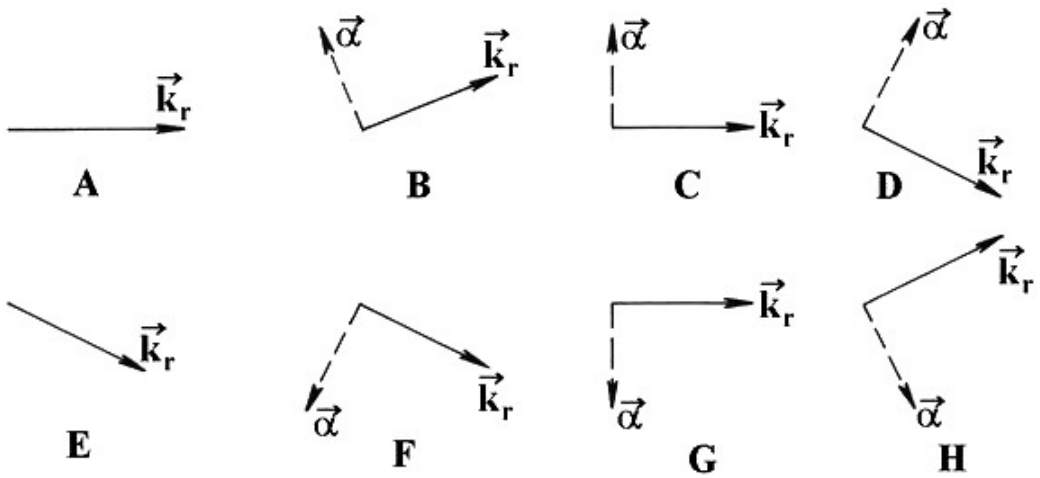



**Fig. 4.3. Ilustrare grafică pentru undele proprii şi improprii**

Referitor la Fig. 4.3 se pot face câteva comentarii utile. Admitem întâi că o undă electromagnetică se propagă în lungul interfeței cu o viteză de fază mai mică decât $c_0 = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2}$, astfel această undă poate fi trapată (captată) în vecinătatea suprafeței şi se poate propaga fără atenuare ($\alpha_l = 0$) după direcția $+z$; în acest caz avem $\beta = \beta_r = \omega / v_{ph} > k_{us}$ şi din (4.1.3) rezultă

$$p^2 = k_{us}^2 - \beta_r^2 < 0 \tag{4.1.12}$$

astfel $p$ trebuie să fie pur imaginară, $p = -j\alpha_t$ iar unda $\Psi(x,z)$ se exprimă sub forma

$$\Psi(x,z) = \Psi_0 e^{-\alpha_t x} e^{-j\beta_r z}; \tag{4.1.13}$$

valoarea lui $\alpha_t$ rezultă din (4.1.5) $\alpha_t = \left[\beta_r^2 - k_{us}^2\right]^{1/2}$. Aşa cum reiese din relaţiile (4.1.8) şi (4.1.9), în acest caz $\vec{k}_r$ este orientat după $z$ iar $\vec{\alpha}$ după $x$ (Fig. 4.3C). Cu cât unda este mai lentă ($v_{ph}$ mic) cu atât valoarea lui $\beta$ este mai mare, fapt ce duce la creşterea atenuării $\alpha_t$. Astfel de unde se numesc *unde de suprafaţă trapate* în vecinătatea interfeţei aer-dielectric; ele transportă o cantitate finită de putere în lungul interfeţei, fără atenuare, însă descresc exponenţial după direcţia $+x$ (4.1.13).

Considerăm un alt caz de interes, anume o undă rapidă care se propagă în lungul interfeţei după direcţia $+z$, deci avem $\beta = \beta_r = \omega/v_{ph} < k_{us}$. În acest caz unda este atenuată după direcţia $+z$, adică $\alpha_l > 0$ iar din (4.1.6) rezultă că produsul $p_r\alpha_t$ trebuie să fie negativ. Pentru o undă care se propagă de la interfaţă spre spaţiul liber avem $p_r > 0$, astfel $\alpha_t$ este negativ, adică amplitudinea undei creşte exponenţial pe direcţia $+x$. Avem prin urmare o undă improprie numită *undă de scurgere directă* (Fig. 4.3H); amplitudinea ei descreşte după $z$, însă pentru un $z$ dat amplitudinea după $+x$ creşte exponenţial. Denumirea de undă de scurgere subliniază faptul că o anumită cantitate de energie se scurge în mod permanent de la interfaţă spre spaţiul liber; acest fapt presupune că unda improprie nu poate exista decât dacă există o sursă permanentă de energie radiată de către mediul dielectric spre spaţiul liber; ca exemplu pot fi date undele radiate de către fante longitudinale practicate în pereţii ghidurilor de undă metalice, sau în benzile metalice ale ghidurilor stripline.

## 4.2. UNDE DE SUPRAFAŢĂ ÎN PLĂCI DIELECTRICE CU SUBSTRAT METALIC

Studii mai vechi au arătat că o placă metalică poate suporta unde de suprafaţă însă acestea sunt puternic atenuate datorită părţii reale $R_s$ a impedanţei de suprafaţă $\underline{Z}_s = R_s + jX_s$ (2.5.74). Pentru a obţine o structură cu undă de suprafaţă utilizabilă în practică este necesară creşterea reactanţei (inductive sau capacitive) a suprafeţei, fără a creşte semnificativ partea rezistivă a impedanţei. O metodă eficientă de creştere a reactanţei inductive constă în acoperirea suprafeţei conductoare cu un strat subţire de dielectric, având permitivitatea esenţial diferită de cea a spaţiului liber, şi fără pierderi dielectrice.

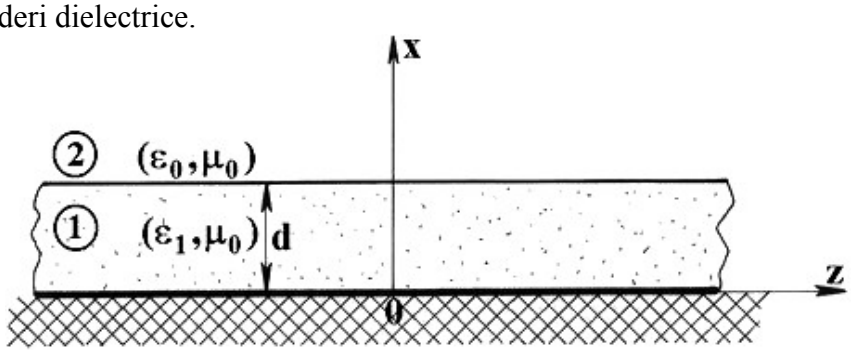



**Fig. 4.4. Ghid de undă constituit dintr-o placă dielectrică depusă pe suport metalic**

Considerăm structura (ghidul de undă de suprafaţă) din Fig. 4.4, care constă dintr-o placă dielectrică de grosime $d$, depusă pe un strat metalic de conductivitate infinită. Presupunem că structura are dimensiuni infinite (sau foarte mari) pe direcţiile $y$ şi $z$; propagarea are loc după

direcția $+z$ cu factorul de propagare $exp(-j\beta z)$, iar pe direcția $y$ se neglijează variațiile componentelor de câmp, $\partial/\partial y = 0$ (problemă bidimensională). În general, în structură pot exista două moduri independente de propagare: modul TM, caracterizat prin componentele $E_z, E_x$ şi $H_y$, modul TE, caracterizat prin componentele $H_z, H_x, E_y$.

**1°. Moduri TM**

Considerăm mai întâi cazul general al undelor de suprafață caracterizate prin constantele de propagare $\beta$ şi $p$. În cazul modului TM avem $H_z = 0$; de asemenea, sunt nule şi componentele care depind de $\partial/\partial y$. Există mai multe posibilități de scriere şi rezolvare a ecuațiilor de propagare în cele două medii, dielectric şi spațiul liber; una din posibilități constă în rezolvarea ecuației de propagare de tip Helmholtz pentru componenta $E_z$, apoi prin intermediul ecuațiilor Maxwell (sau cu ajutorul relațiilor prezentate în Cap. 2 ) se determină componentele $E_x$ şi $H_y$; a doua variantă consideră ecuația de propagare pentru $H_y$, apoi din soluția găsită se determină $E_x$ şi $E_z$ prin utilizarea ecuațiilor Maxwell. Vom utiliza a doua variantă care permite o interpretare convenabilă a soluțiilor. Ecuația Helmholtz generală pentru componenta $H_y(x,z)$ are expresia

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_y(x,z) = 0 \tag{4.2.1}$$

Soluțiile acestei ecuații pentru dielectric (1) şi spațiul liber (2) pot fi scrise sub forma generală

$$H_{y1} = Ae^{-jpx}e^{-j\beta z} + Be^{jpx}e^{-j\beta z}, \qquad 0 \le x \le d \tag{4.2.2}$$

$$H_{y2} = H_{y0} = Ce^{-jp_0 x}e^{-j\beta z}, \qquad x > d \tag{4.2.3}$$

în care s-a notat

$$k_1^2 = p^2 + \beta^2, \qquad k_2^2 = k_0^2 = p_0^2 + \beta^2 \tag{4.2.4}$$

iar $k_1 = \omega(\mu_0\varepsilon_1)^{1/2}$ şi $k_0 = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$ sunt numerele de undă în cele două medii.

În scopul satisfacerii condițiilor la limită s-a presupus că undele au aceeaşi constantă de fază în dielectric şi în spațiul liber. Întrucât regiunea de spațiul liber se întinde la infinit, componenta $H_{y0}$ are un singur termen; pe de altă parte componenta $H_{y1}$ are doi termeni, reprezentând unde care se propagă în direcțiile $+x$ şi $-x$. Componentele $E_x(x,z)$ şi $E_z(x,z)$ se exprimă în funcție de $H_y(x,z)$ sub forma generală

$$E_x(x,z) = \frac{j}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y(x,z)}{\partial z}, \qquad E_z(x,z) = \frac{-j}{\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y(x,z)}{\partial x} \tag{4.2.5}$$

Ne referim acum la condițiile la limită pentru componentele tangențiale $E_z$ şi $H_y$, la $x = 0$ şi $x = d$.

La $x = 0$ avem

$$E_{z1}(0,z) = -\frac{j}{\omega\varepsilon_1}\frac{\partial H_{y1}}{\partial x} = 0; \tag{4.2.6}$$

La $x = d$ componentele $E_z$ şi $H_y$ trebuie să fie continue

$$E_{z1} = E_{z0}, \qquad H_{y1} = H_{y0} \tag{4.2.7}$$

unde $E_{z0}(x,z) = (-j/\omega\varepsilon_0)\partial H_{y0}/\partial x$. Detaliind ultimele două relații se obține

$$\left.\begin{aligned} &-A+B=0 \\ &\frac{p_0}{\varepsilon_0}Ce^{-jp_0d}=\frac{p}{\varepsilon_1}\left(Ae^{-jpd}-Be^{jpd}\right) \\ &Ce^{-jp_0d}=Ae^{-jpd}+Be^{jpd} \end{aligned}\right\} \tag{4.2.8}$$

Eliminând constantele $A,B,C$ din (4.2.8) se obține ecuația transcendentală

$$\frac{p}{\varepsilon_1}\tan pd=j\frac{p_0}{\varepsilon_0} \tag{4.2.9}$$

care este o *ecuație de valori proprii*. După rezolvarea în raport cu $p$ se poate determina constanta de fază $\beta=\left(k_1^2-p^2\right)^{1/2}$ (4.2.4); se va observa că $p$ depinde de geometria şi proprietățile fizice ale structurii, şi reprezintă într-adevăr o valoare proprie.

**2°. Soluții de unde TM lente (trapate)**

Unda de suprafață trapată constituie un caz practic important. Ținând cont de expresiile (4.1.12), (4.1.13) şi de explicațiile aferente, expresia componentei $H_{y0}(x,z)$ ia forma

$$H_{y0}(x,z)=Ce^{-\alpha_t x}e^{-j\beta z} \tag{4.2.10}$$

în care s-a pus $p_0=-j\alpha_t$ şi $\beta>k_0$. Scriem relații de tipul (4.1.3) pentru aer şi dielectric

$$\beta^2-\alpha_t^2=k_0^2, \qquad \beta^2+p^2=k_1^2 \tag{4.2.11}$$

din care, eliminând pe $\beta$ rezultă

$$\alpha_t^2=\left(k_1^2-k_0^2\right)-p^2 \tag{4.2.12}$$

În structurile fizice reale avem $\alpha_t>0$; notând $X=pd$ şi $V^2=\left(k_1^2-k_0^2\right)d^2$, *ecuația de valori proprii* (4.2.9) devine

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}X\tan X=\left(V^2-X^2\right)^{1/2} \tag{4.2.13}$$

Pentru plăci dielectrice cu $\varepsilon_1>\varepsilon_0$ vom avea $V^2$ real şi pozitiv. Soluțiile ecuației transcendentale de valori proprii se obțin pe cale grafică; notăm cu $Y_{st}$ şi $Y_{dr}$ membrul stâng, respectiv cel drept şi reprezentăm aceşti termeni în funcție de $X$ (Fig. 4.5). Punctele de intersecție reprezintă soluții ale ecuației (4.2.13). Numărul de soluții posibile este dat de valorile parametrului $V$

$$\begin{aligned} &0<V<\pi, && (a)\\ &(N-1)\pi<V<N\pi; && (b) \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

în cazul (*a*) există o singură soluție iar în cazul (*b*) vor exista $N$ moduri diferite. Dacă grosimea $d$ a plăcii dielectrice este cuprinsă între

$$\frac{N-1}{2(\varepsilon_r-1)^{1/2}}<d<\frac{N}{2(\varepsilon_r-1)^{1/2}} \tag{4.2.15}$$

vor putea să existe în realitate $N$ moduri de unde de suprafață trapate; în cazul existenței numai a unui singur mod din (4.2.14) rezultă

$$0<\frac{d}{\lambda_0}<\frac{1}{2(\varepsilon_r-1)^{1/2}} \tag{4.2.16}$$

Parametrul $V=d\left(k_1^2-k_0^2\right)^{1/2}=dk_0(\varepsilon_r-1)^{1/2}$ determină numărul de moduri şi este numit adesea *frecvență normată*; numărul total de moduri $N$ este dat de relația (4.2.14b), numită şi *formula*

*modurilor* (*de volum*). După găsirea soluției, adică a valorii $X = pd$ se determină constanta de fază din (4.2.11). Aşa cum rezultă din Fig. 4.5, pot exista soluții şi pentru $\alpha_t < 0$ (atunci când $V > V_2$); aceste unde se numesc *unde de suprafață netrapate*, însă influența lor este nesemnificativă în raport cu câmpul undelor trapate.

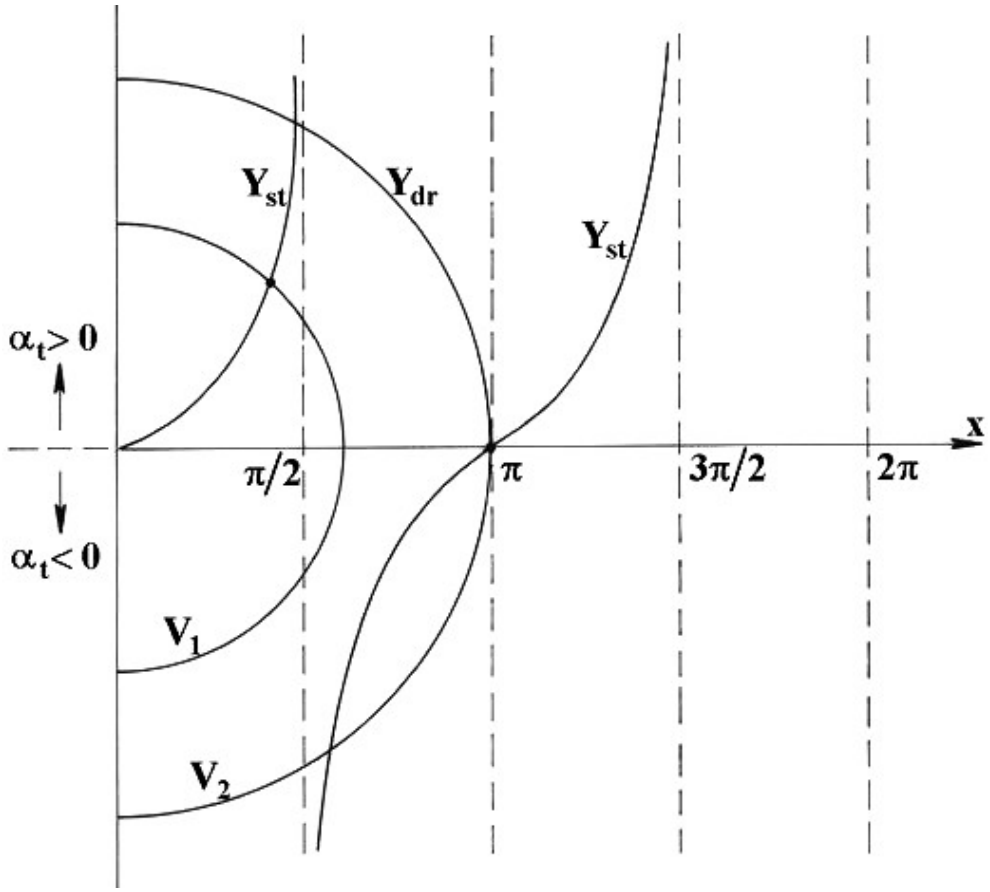



**Fig. 4.5. Soluții pentru ecuația de valori proprii (4.2.13) în cazul modului TM, unde trapate**

Sunt utile considerații asupra configurațiilor de câmp în placa dielectrică şi în imediata vecinătate a interfeței. Întâi vom observa că pentru $x = d$ din (4.2.2) şi (4.2.3) se pot scrie rapoartele

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C} = \frac{e^{-jp_0 d}}{2\cos pd} \tag{4.2.17}$$

Făcând uz de aceste rapoarte expresia componentei de câmp magnetic în dielectric este

$$H_{y1}(x,z) = Ce^{-\alpha_t d}\,\frac{\cos px}{\cos pd}\,e^{-j\beta z} \tag{4.2.18}$$

Componentele $E_x(x,z)$ şi $E_z(x,z)$ se determină conform relațiilor (4.2.5); luăm în considerare componenta transversală $E_x(x,z)$ cu ajutorul căreia se pot face unele constatări asupra impedanței de undă în placa dielectrică. În dielectric şi spațiul liber avem

$$E_{x1}(x,z) = \left(\frac{\beta}{k_1}\underline{Z}_1\right)Ce^{-\alpha_t d}\,\frac{\cos px}{\cos pd}\,e^{-j\beta z} \tag{4.2.19}$$

$$E_{x0}(x,z) = \left(\frac{\beta}{k_1}Z_0\right)Ce^{-\alpha_t d}\,e^{-j\beta z} \tag{4.2.20}$$

unde $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$, $\underline{Z}_1 = (\mu_0/\varepsilon_1)^{1/2}$ sunt impedanțele de undă intrinseci în spațiul liber, respectiv dielectric (infinit). Trebuie subliniat că componentele transversale $E_x$ şi $H_y$ sunt perpendiculare între ele şi raportul lor defineşte impedanța de undă a structurii în cele două medii

$$Z_{w0} = \left(\frac{\beta}{k_0}\right) Z_0; \qquad \underline{Z}_{w1} = \left(\frac{\beta}{k_1}\right) \underline{Z}_1 \tag{4.2.21}$$

Componentele de câmp $H_y$ şi $E_x$ au variații cosinusoidale în dielectric şi o scădere exponențială în spațiul liber (Fig. 4.6).

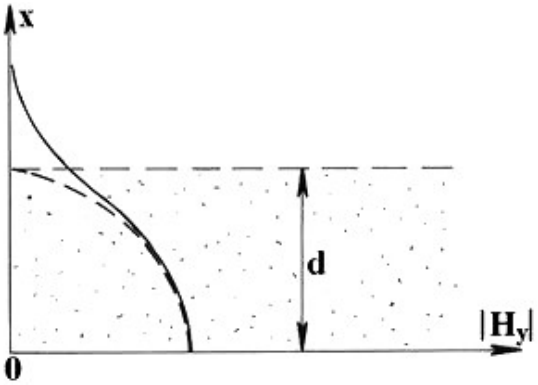



**Fig. 4.6. Variația componentei $H_y$ după direcția +x în cazul modului TM, unde trapate**

În multe situații este necesară definirea *impedanței de suprafață*, văzută de la spațiul liber spre placa dielectrică. Vectorul Poynting îndreptat spre dielectric este dat de componentele $\vec{E}_z = \hat{k}E_z$ şi $\vec{H}_y^* = \hat{j}H_y^*$ conform relației (1.4.21) $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}_z \times \vec{H}_y^* = -\hat{i}E_z H_y/2$. Impedanța de suprafață se defineşte ca raportul

$$\underline{Z}_s = \frac{E_{z0}}{H_{y0}} = j\frac{\alpha_t}{k_0} Z_0 \tag{4.2.22}$$

şi este o reactanță inductivă pură. În general structura care suportă unde de suprafață trapate trebuie să aibă impedanța de suprafață pur reactivă: pentru modurile TM această impedanță este pur inductivă iar pentru modurile TE impedanța va fi pur capacitivă.

**3°. Soluții de unde TE lente (trapate)**

Modurile TE în structurile cu unde de suprafață sunt caracterizate prin componentele $H_x, H_z$ şi $E_y$. Se pleacă de la ecuația Helmholtz pentru componenta $E_y$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_y(x,z) = 0 \tag{4.2.23}$$

Procedând similar ca pentru modurile TM, soluțiile pentru dielectric şi spațiul liber sunt de forma

$$E_{y1}(x,z) = Ce^{-\alpha_t d}\,\frac{\sin px}{\sin pd}\,e^{-j\beta z} \tag{4.2.24}$$

$$E_{y0}(x,z) = Ce^{-\alpha_t d}\,e^{-j\beta z} \tag{4.2.25}$$

iar componentele $H_x$ şi $H_z$ în cele două medii sunt

- pentru dielectric:

$$H_{x1} = -\left(\frac{\beta}{k_1 \underline{Z}_1}\right) Ce^{-\alpha_t d}\,\frac{\sin px}{\sin pd}\,e^{-j\beta z} \tag{4.2.26}$$

$$H_{z1} = j\left(\frac{\beta}{k_1 Z_1}\right) C e^{-\alpha_t d}\,\frac{\cos px}{\cos pd}\, e^{-j\beta z} \tag{4.2.27}$$

- pentru spațiul liber:

$$H_{x0} = -\left(\frac{\beta}{k_0 Z_0}\right) C e^{-\alpha_t x} e^{-j\beta z} \tag{4.2.28}$$

$$H_{z0} = -j\left(\frac{\alpha_t}{k_0 Z_0}\right) C e^{-\alpha_t x} e^{-j\beta z} \tag{4.2.29}$$

Punând condițiile de continuitate ale componentelor tangențiale $E_y$ şi $H_z$ se obține *ecuația de valori proprii*

$$-X\,cotan\,X = \left(V^2 - X^2\right)^{1/2} \tag{4.2.30}$$

unde s-a notat $X = pd$, $V^2 = d^2\left(k_1^2 - k_0^2\right) = d^2 k_0^2\left(\varepsilon_r - 1\right)$. Soluțiile ultimei ecuații se obțin pe cale grafică; notăm cu $Y_{st}$ şi $Y_{dr}$ termenul stâng, respectiv drept şi reprezentăm aceşti termeni în funcție de $X$ (Fig. 4.7). Punctele de intersecție constituie soluții ale ecuațiilor de valori proprii; numărul de soluții determină numărul de moduri ale undelor de suprafață TE; numărul total al modurilor TE este dat de formula

$$\left(N - 1/2\right)\pi < V < \left(N + 1/2\right)\pi \tag{4.2.31}$$

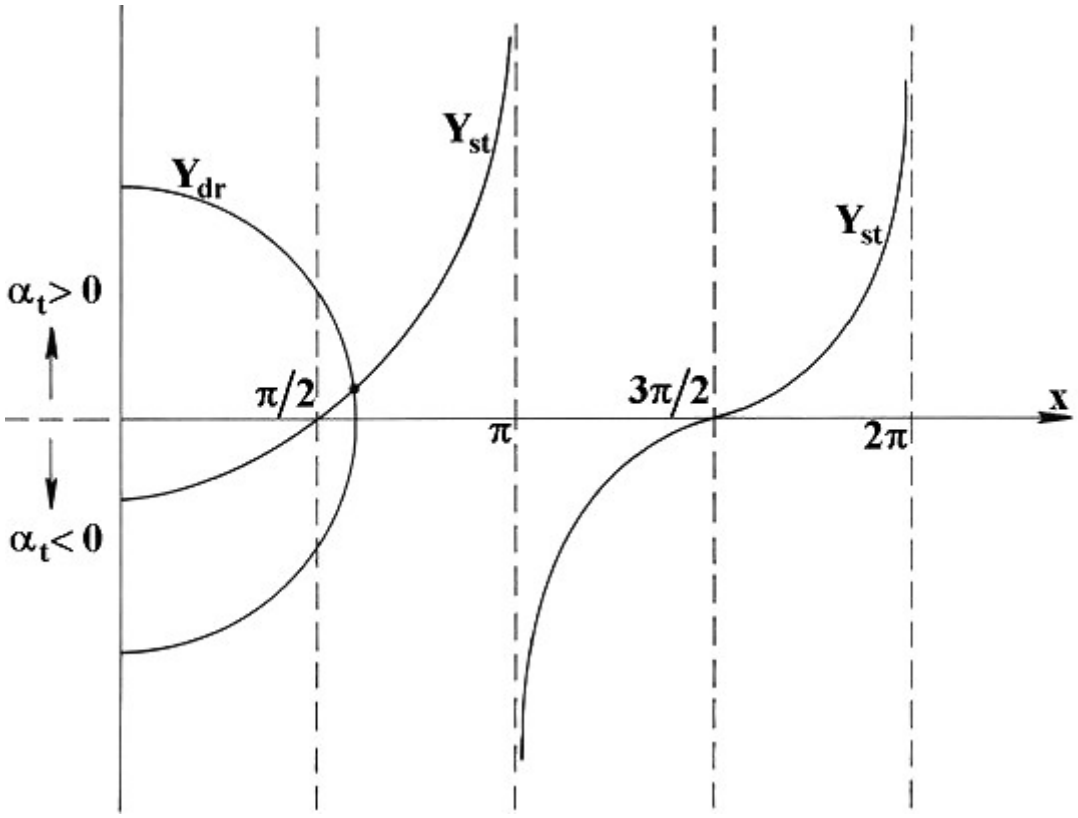



**Fig. 4.7. Soluții pentru ecuația de valori proprii (4.2.30) în cazului TE, unde trapate**

Din Fig. 4.7 se observă că pentru $V < \pi/2$ ecuația de valori proprii nu are soluții, prin urmare nu pot exista unde TE trapate; din relația (4.2.31) rezultă că grosimea minimă a plăcii dielectrice care asigură propagarea undelor TE trapate este

$$\frac{d}{\lambda_0} > \frac{1}{4\left(\varepsilon_r - 1\right)^{1/2}} \tag{4.2.32}$$

În anumite structuri particulare pot exista soluții şi pentru $\alpha_t < 0$, fapt ce corespunde undelor TE netrapate, însă influența lor asupra undelor trapate este neglijabilă.

Componentele transversale $E_y$ şi $H_x$ au variații sinusoidale în interiorul dielectricului şi descresc exponențial în spațiul liber (Fig. 4.8).

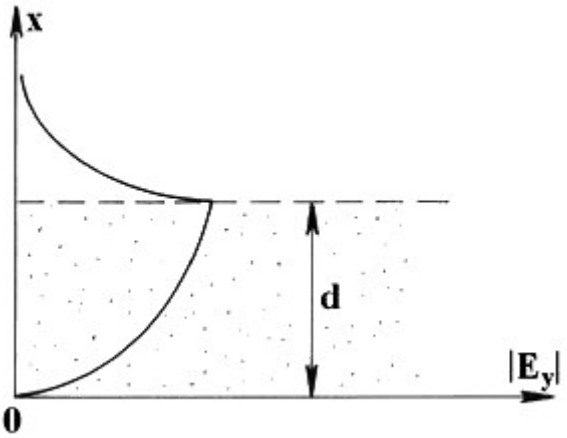



**Fig. 4.8. Variația componentei $E_y$ după direcția +x în cazul modului TE, unde trapate**

Impedanța de suprafață văzută de la spațiul liber spre dielectric se defineşte cu ajutorul componentelor de câmp care determină un vector Poynting îndreptat spre placa dielectrică; în cazul de față aceste componente sunt $\vec{E}_y$ şi $-\vec{H}_z$, astfel $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E}_y \times \left(-\vec{H}_z^*\right) = -\left(\hat{j}E_y \times \hat{k}H_z^*\right)/2 =$ $= -\hat{i}E_y H_z^*/2$. Ținând cont de(4.2.25) şi (4.2.29) se poate scrie

$$\underline{Z}_s = \frac{E_{y0}}{-H_{z0}} = \frac{Z_0}{j(\alpha_t/k_0)} \tag{4.2.33}$$

prin urmare $\underline{Z}_s$ este o reactanță capacitivă pură.

## 4.3. GHIDUL DIELECTRIC PLAT

Structura clasică a ghidului dielectric plat este arătată în Fig. 4.9 şi constă dintr-o placă dielectrică de grosime $2d$, având permitivitatea electrică $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ (sau chiar $\varepsilon_1 >> \varepsilon_0$); în cazul unei tratări simplificate se vor presupune pierderi dielectrice neglijabile, astfel $\varepsilon_1$ are numai parte reală. Propagarea are loc pe direcția $+z$ cu factorul de propagare $exp(-j\beta z)$ iar numerele de undă transversale sunt: $p$ în dielectric şi $p_0$ în spațiul liber.

În structura considerată se pot propaga unde electromagnetice de suprafață de tip TM şi TE; modurile TM au numai componenta magnetică $H_y$ şi componentele de câmp electric $E_x$ şi $E_z$; modurile TE au numai componenta electrică $E_y$ şi componentele de câmp magnetic $H_x$ şi $H_z$. Pentru ambele moduri câmpul descreşte exponențial cu distanța de la suprafețele $x = \pm d$. În general viteza de fază şi lungimea de undă a undelor electromagnetice care se propagă în structura din Fig. 4.9 sunt mai mici decât a undelor plane din spațiul liber.

**1°. Moduri TM**

Ecuația de propagare a componentei transversale $H_y$ are forma generală

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) H_y(x,z) = 0 \tag{4.3.1}$$

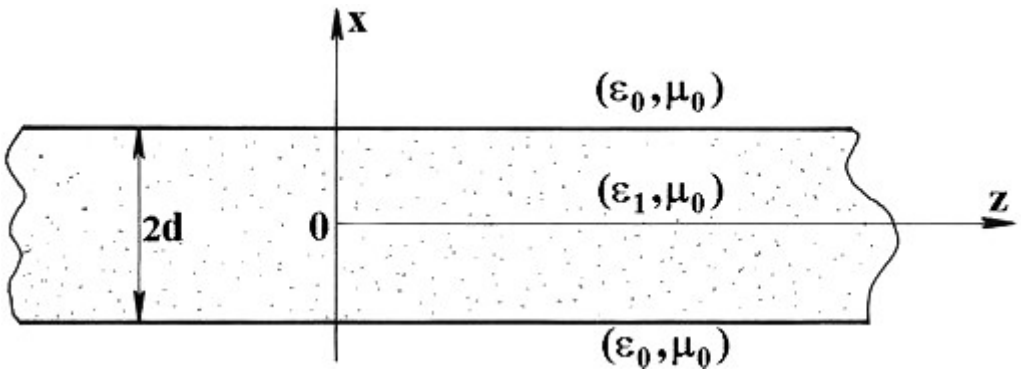



**Fig. 4.9. Ghid dielectric plat, structură simetrică**

În cazul structurii din Fig. 4.9 soluțiile pentru $H_y(x,z)$ în placa dielectrică pot fi de tip *simetric* sau *antisimetric*, definite prin legea de variație a mărimii $H_y$ în funcție de $x$, în raport cu planul de simetrie $x=0$.

Ne referim întâi la *soluțiile simetrice* care descriu *moduri pare*; în acest caz avem

$$\left.\frac{\partial H_y(x,z)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{4.3.2}$$

Ca urmare a faptului că $E_z$ este proporțional cu derivata lui $H_y$, componenta tangențială a câmpului electric se anulează pentru $x=0$; prin urmare în lungul suprafeței $x=0$ se poate plasa un plan metalic, astfel soluțiile pentru modurile TM pare vor fi identice cu cele obținute în cazul structurii din Fig. 4.4 (placă dielectrică de grosime $d$ depusă pe substrat metalic de conductivitate infinită).

Soluțiile simetrice sunt de forma:

- în placa dielectrică

$$H_{y1}(x,z) = A\cos px\, e^{-j\beta z} \qquad |x| \le d \tag{4.3.3}$$

- în afara plăcii dielectrice

$$H_{y0}(x,z) = B\exp\left[-jp_0\left(|x|-d\right)-j\beta z\right] \qquad |x| \ge d \tag{4.3.4}$$

Se consideră că undele sunt trapate, astfel rămân valabile relațiile (4.2.4), pe care le scriem sub forma

$$\begin{aligned} \beta^2 &= k_1^2 - p^2 \qquad |x| \le d \\ \beta^2 &= k_0^2 + \alpha_t^2 \qquad |x| \ge d \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

(în cazul undelor trapate $p_0 = -j\alpha_t$ este o mărime pur imaginară).

Componentele tangențiale $H_y$ şi $E_z$ trebuie să fie continue la suprafața de separație dielectric – aer, $x=\pm d$; componenta $E_z$ se obține prin utilizarea ecuației Maxwell $j\omega\varepsilon E_z = \partial H_y/\partial x$. Din condițiile de continuitate $H_{y1}(\pm d,z) = H_{y0}(\pm d,z)$ şi $E_{z1}(\pm d,z) = E_{z0}(\pm d,z)$ avem

$$\begin{aligned} B &= A\cos pd \\ \alpha_t\varepsilon_r B &- pA\sin pd \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Făcând raportul termen cu termen ale acestor două ecuații se obține *ecuația de valori proprii*

$$\varepsilon_r\alpha_t = p\tan pd \tag{4.3.7}$$

Din relațiile (4.3.5) se poate scrie

$$k_0^2(\varepsilon_r - 1) = p^2 + \alpha_t^2 \tag{4.3.8}$$

astfel din (4.3.7) şi (4.3.8) se pot determina mărimile $p$ şi $\alpha_t$.

Uzual se caută soluții pe cale grafică, care se pot obține convenabil prin multiplicarea cu $d$ a ecuațiilor (4.3.7) şi (4.3.8); rezultă

$$\varepsilon_r X_0 = X \tan X \tag{4.3.9}$$

$$X^2 + X_0^2 = (k_0 d)^2 (\varepsilon_r - 1) \tag{4.3.10}$$

în care s-a notat $X = pd$, $X_0 = \alpha_t d$. Ultimele două ecuații sunt independente de frecvență, cu condiția ca raportul $(2d/\lambda_0)$ să fie menținut constant; reprezentăm aceste ecuații într-un plan de abscisă $X = pd$ şi ordonată $X_0 = \alpha_t d$ (Fig. 4.10); se observă că (4.3.10) reprezintă cercuri de rază $(\varepsilon_r - 1)^{1/2} k_{0d}$. Punctele de intersecție ale celor două curbe reprezintă soluții care determină valorile proprii $p$ şi $\alpha_t$; în cazul Fig. 4.10 s-a considerat o placă de polistiren cu $\varepsilon_r = 2{,}56$.

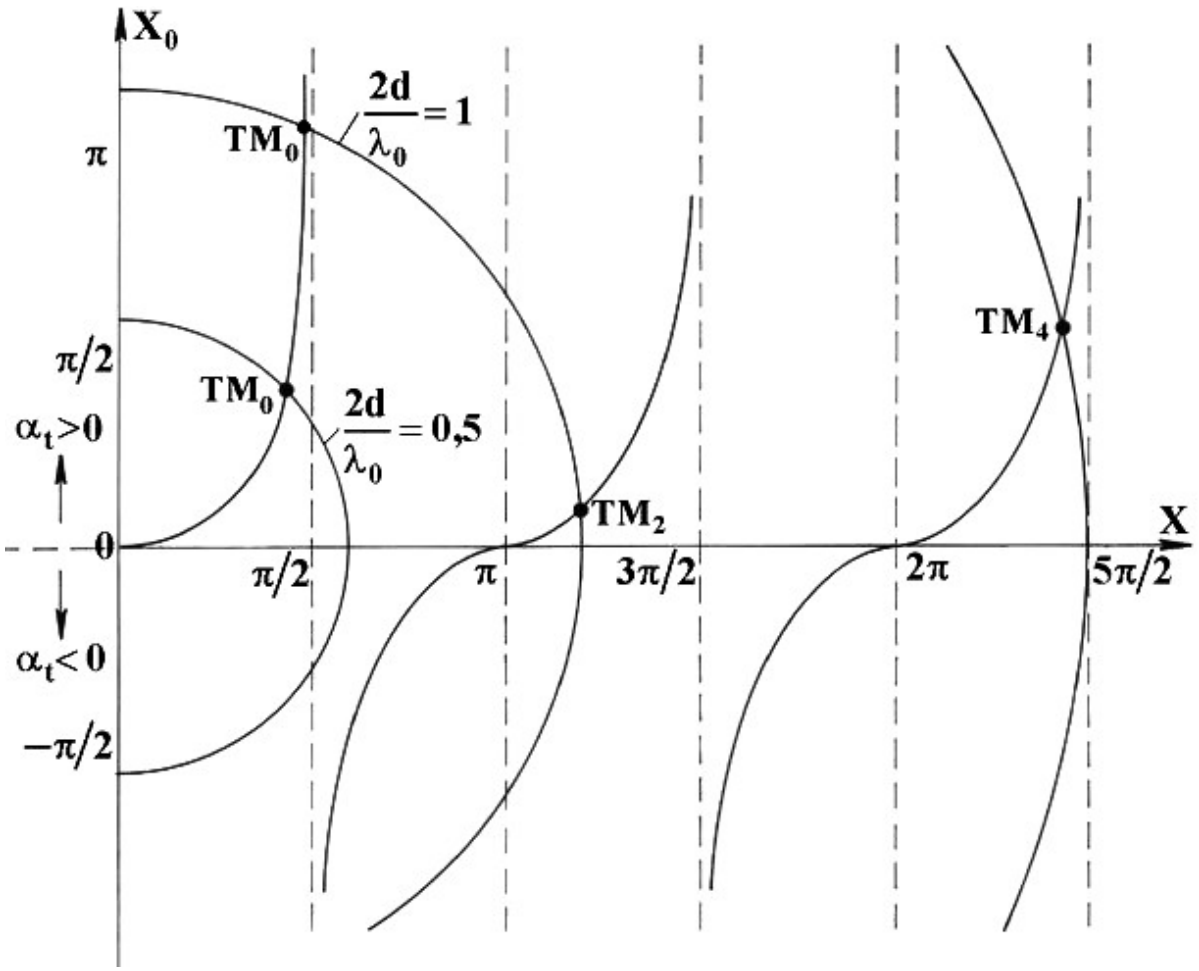



**Fig. 4.10. Soluții pentru ecuațiile de valori proprii (4.3.9) şi (4.3.10) în cazul modurilor TM pare ( polistiren $\varepsilon_r = 2{,}56$ )**

Referitor la Fig. 4.10 se pot face câteva observații importante asupra modurilor TM pare. Setul de curbe (4.3.9), (4.3.10) vor avea cel puțin un punct de intersecție, chiar şi pentru $(2d/\lambda_0) \to 0$, prin urmare primul mod TM par, notat $TM_0$ nu are frecvență inferioară de tăiere (critică). Întrucât pentru undele de suprafață trapate mărimea $\alpha_t$ trebuie să fie pozitivă, numai punctele de intersecție cuprinse în intervalul

$$N\pi \le X \le (N + 1/2)\pi \qquad N = 0,1,2,... \tag{4.3.11}$$

corespund unor soluții de unde de suprafață trapate. Punctele de intersecție cuprinse în intervalul

$$(N+1/2)\pi \le X \le (N+1)\pi \qquad N = 0,1,2,... \tag{4.3.12}$$

conduc la soluții cu $\alpha_t$ negativ, deci pentru aceste moduri amplitudinile cresc exponențial cu distanța în spațiul liber, $|x| \ge d$ ; în structurile practice acestea nu au suport fizic şi sunt excluse din discuție. Modurile superioare sunt tăiate pentru valorile $(2d/\lambda_0)$ la care cercurile (4.3.10) intersectează tangentele (4.3.9) pe axa $X$. Valorile de tăiere sunt $X = N\pi$, astfel pentru modurile pare de ordin $N$ ($TM_0$, $TM_2$, $TM_4$, …) raportul $(2d/\lambda_0)$ care asigură tăierea rezultă din (4.3.10)

$$\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)_{tp} = \frac{N}{(\varepsilon_r - 1)^{1/2}}, \qquad N = 0,1,2,... \tag{4.3.13}$$

În cazul modurilor TM *impare* (soluții antisimetrice) expresiile componentei $H_y$ în cele două medii sunt

$$H_{y1}(x,z) = A\,cosec\,pd\,\sin px\,e^{-j\beta z} \qquad -d \le x \le d \tag{4.3.14}$$

$$H_{y0+}(x,z) = B\,exp[-jp_0(x-d) - j\beta z] \qquad x \ge d \tag{4.3.15}$$

$$H_{y0-}(x,z) = -B\,exp[jp_0(x+d) - j\beta z] \qquad x \le -d \tag{4.3.16}$$

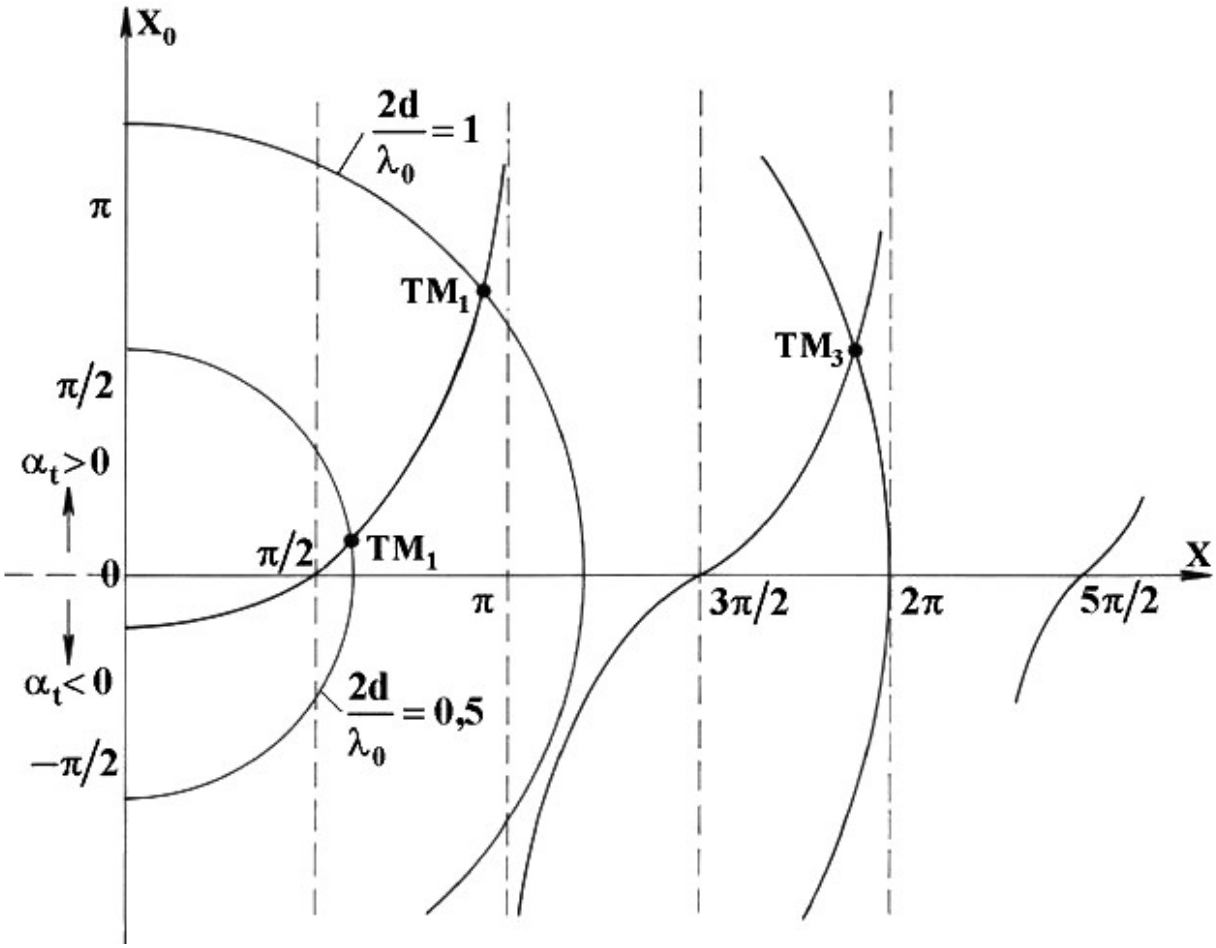



**Fig. 4.11. Soluții pentru ecuațiile de valori proprii (4.3.17) şi (4.3.18) în cazul modurilor TM impare ( polistiren $\varepsilon_r = 2{,}56$ )**

Procedând similar ca în cazul modurilor TM pare, punând condițiile de continuitate ale componentelor tangențiale, se obține (se pune $p_0 = -j\alpha_t$)

$$\varepsilon_r p_0 d = -X\,cotan\,X \tag{4.3.17}$$

$$X^2 + X_0^2 = (\varepsilon_r - 1)(k_0 d)^2 \tag{4.3.18}$$

unde s-a notat $X = pd$, $X_0 = \alpha_t d$. Reprezentarea grafică a celor două relații este arătată în Fig. 4.11, în care s-a considerat $\varepsilon_r = 2{,}56$ (polistiren). Unde de suprafață trapate $(\alpha_t > 0)$ se obțin pentru punctele de intersecție situate în intervalul

$$(N - 1/2)\pi \le X \le N\pi, \qquad N = 0,1,2,... \tag{4.3.19}$$

Rapoartele $(2d/\lambda_0)$ care determină punctele (frecvențele) de tăiere ale modurilor TM impare de ordin $N$ ($TM_1$, $TM_3$, $TM_5$, …) derivă din (4.3.18)

$$\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)_{ti} = \frac{2N+1}{2(\varepsilon_r - 1)^{1/2}} \tag{4.3.20}$$

**2°. Moduri TE**

Formalismul de căutare a soluțiilor este similar cu cel utilizat pentru modurile TM. Componenta transversală $E_y$ satisface ecuația de propagare

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) E_y(x,z) = 0 \tag{4.3.21}$$

Şi în cazul modurilor TE se disting moduri pare (soluții simetrice) şi impare (soluții antisimetrice).

În cazul *modurilor pare* soluțiile sunt de forma

$$E_{y1}(x,z) = A \sec pd \cos px\, e^{-j\beta z} \qquad |x| \le d \tag{4.3.22}$$

$$E_{y0}(x,z) = B \exp\left[-jp_0(|x| - d) - j\beta z\right] \qquad |x| \ge d \tag{4.3.23}$$

iar în cazul *modurilor impare* soluțiile sunt de forma

$$E_{y1}(x,z) = A \operatorname{cosec} pd \sin px\, e^{-j\beta z} \qquad |x| \le d \tag{4.3.24}$$

$$E_{y0_+}(x,z) = B \exp\left[-jp_0(x - d) - j\beta z\right] \qquad x \ge d \tag{4.3.25}$$

$$E_{y0_-}(x,z) = -B \exp\left[jp_0(x + d) - j\beta z\right] \qquad x \le -d \tag{4.3.26}$$

Componentele de câmp $H_z$ şi $H_x$ se determină prin utilizarea ecuațiilor Maxwell

$$j\omega\mu_0 H_x = \partial E_y / \partial z, \qquad j\omega\mu_0 H_z = -\partial E_y / \partial x \tag{4.3.27}$$

Din condițiile de continuitate ale componentelor tangențiale se obțin ecuații de valori proprii

$$\alpha_t d = pd \tan pd, \qquad \text{moduri TE pare} \tag{4.3.28}$$

$$\alpha_t d = -pd \operatorname{cotan} pd, \qquad \text{moduri TE impare} \tag{4.3.29}$$

şi ținând cont de relații de tipul (4.3.5) se poate scrie o ecuație identică cu (4.3.10)

$$X^2 + X_0^2 = (\varepsilon_r - 1)(k_0 d)^2 \tag{4.3.30}$$

în care s-a considerat $p_0 = -j\alpha_t$, $k_1^2 = \varepsilon_r k_0^2$ şi $\beta^2 = k_1^2 - p^2 = k_0^2 + \alpha_t^2$. Exceptând absența factorului $\varepsilon_r$, ecuațiile (4.3.28), (4.3.29) sunt la fel cu cele obținute pentru modurile TM; astfel construcțiile grafice pentru obținerea soluțiilor vor fi similare cu cele din Fig. 4.10 şi Fig. 4.11. Numai modul $TE_0$, care este primul mod par, nu are frecvență de tăiere. Valorile $(2d/\lambda_0)$ de tăiere sunt date de o expresie care generalizează (4.1.13) şi (4.3.20), anume

$$\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)_t = \frac{N}{2(\varepsilon_r - 1)^{1/2}} \qquad \begin{matrix} N = 0,2,4,... & mod\ \ par \\ N = 1,3,5,... & mod\ \ impar \end{matrix} \tag{4.3.31}$$

Trebuie observat că pentru o placă dielectrică de grosime $d$ plasată pe substrat metalic sunt posibile numai soluții de moduri impare TE, deoarece pentru modurile pare $E_z$ nu se anulează la $x = 0$; prin urmare în placa dielectrică pe substrat metalic nu pot exista moduri TE de suprafață care nu au frecvențe de tăiere (joase).

La încheierea secțiunilor 4.2 şi 4.3 este locul de făcut câteva precizări asupra unor aspecte fizice privind propagarea undelor electromagnetice în lungul unei plăci dielectrice de grosime mică. La interfața a două medii dielectrice au loc fenomene de reflexie şi transmisie, care sunt prezentate detaliat în Cap. 9; în funcție de raportul dintre indicii de refracție $n_1$ şi $n_2$ ai celor două medii, de polarizarea undei plane şi de sensul de propagare considerat, pot avea loc fenomene de reflexie totală sau de transmisie totală. De exemplu, admitem că sursa de excitare a undei se află în interiorul mediului dielectric; o undă plană care se propagă din mediul dielectric spre interfața dielectric – aer având unghiul de incidență $\theta_i \geq \theta_i^*$, suferă o *reflexie totală* (Cap 9); unghiul critic $\theta_i^*$ este determinat din relația $sin\theta_i^* = (1/\varepsilon_{r1})^{1/2}$ unde $\varepsilon_{r1}$ este permitivitatea relativă a dielectricului. În cazul reflexiei totale unda este reflectată total spre interiorul plăcii dielectrice iar în afara plăcii dielectrice vor exista unde evanescente. Se poate considera că unda este trapată (captată) în interiorul plăcii dielectrice şi se propagă sub formă de zigzag în lungul axei $z$, suferind reflexii totale la fiecare interfață dielectric – aer. Dacă unda electromagnetică se propagă din aer spre placa dielectrică iar unghiul de incidență este egal cu unghiul Brewster $\theta_{iB}$, are loc fenomenul de transmisie totală de la aer în dielectric; apoi unda este trapată în interiorul plăcii dielectrice prin mecanismul descris mai sus.

## 4.4. GHIDURI DIELECTRICE CILINDRICE

Configurația uzuală de ghid dielectric cilindric este arătată în Fig. 4.12, fiind formată dintr-o bară cilindrică de dielectric, de rază $a$, cu permitivitatea $\varepsilon_r$ suficient de mare față de spațiul liber înconjurător.

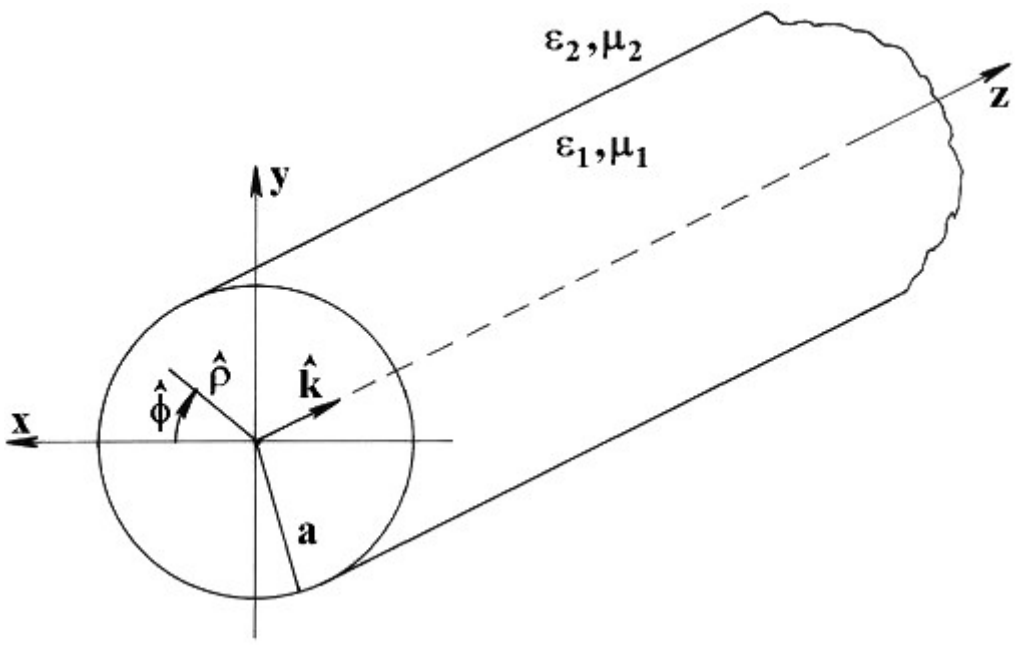



**Fig. 4.12. Ghid dielectric cilindric**

Sub formă generală acest tip de ghid suportă unde de suprafață, la fel ca placa dielectrică descrisă în secțiunea 4.3; sunt necesare totodată câteva precizări asupra naturii modurilor de propagare. Existența modurilor pure TM şi TE este posibilă numai dacă câmpul este independent de unghiul $\phi$; numărul acestor moduri creşte odată cu raza $a$; există însă şi o limită inferioară a razei $a$, care prin raportul $(a/\lambda_0)$ defineşte o valoare limită sub care nu mai pot exista moduri de propagare.

Dacă câmpurile care se propagă pe direcția $+z$ depind de coordonata unghiulară $\phi$, existența modurilor pure TM şi TE nu mai este posibilă. Toate modurile cu dependență unghiulară reprezintă combinații de moduri TM şi TE şi sunt clasificate ca *moduri hibride*: $EH_{nm}$ când modul TM este dominant; $HE_{nm}$ când modul TE este dominant. Toate modurile hibride manifestă fenomene de tăiere; excepție face *modul* $HE_{11}$ care nu are frecvență (inferioară) de tăiere şi este considerat *mod dominant* (fundamental); acest mod este larg utilizat în antenele cu bară dielectrică cilindrică (sau tronconică). În cazul barelor dielectrice cu rază mică câmpul se întinde şi în spațiul liber la distanțe apreciabile de suprafața de separare, astfel constanta de propagare (fază) axială este doar puțin mai mare decât $k_0$; odată cu creşterea razei câmpul este confinat tot mai mult în bară iar constanta $\beta$ tinde la valoarea $\varepsilon_r^{1/2} k_0$ (când $a \to \infty$); având în vedere că $\beta > k_0$, viteza de fază a undelor este mai mică decât cea a undelor plane în spațiul liber.

### 4.4.1. Moduri TM şi TE pure

Ne oprim întâi asupra modurilor independente de coordonata $\phi$. Tratarea riguroasă a modurilor hibride constituie o problemă laborioasă asupra căreia ne vom opri pe scurt în secțiunea următoare. Vom adopta formalismul utilizat la ghiduri metalice cilindrice, ținând cont bineînțeles de procesele fizice şi condițiile la limită specifice; mărimile aferente barei dielectrice sunt marcate cu indicii „1" iar cele aferente spațiului exterior cu indicii „2".

Ecuațiile de propagare de tip Helmholtz pentru componentele longitudinale au forma generală (vezi (2.4.1), (2.4.32)):

a) În interiorul barei dielectrice $(\rho \le a)$

$$\left(\nabla_T^2 + k_{1\lambda}^2\right) H_{0z}(\rho,\phi) = 0, \text{ moduri TE} \tag{4.4.1}$$

$$\left(\nabla_T^2 + k_{1\lambda}^2\right) E_{0z}(\rho,\phi) = 0, \text{ moduri TM} \tag{4.4.2}$$

unde numărul de undă transversal $k_{1\lambda}$ are expresia

$$k_{1\lambda}^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 + \gamma_1^2 = k_1^2 + \gamma_1^2 \tag{4.4.3}$$

iar $\gamma_1^2$ are semnificația constantei de propagare longitudinală după direcția $+z$.

b) În exteriorul barei dielectrice $(\rho \ge a)$

$$\left(\nabla_T^2 + k_{2\lambda}^2\right) H_{0z}(\rho,\phi) = 0, \text{ moduri TE} \tag{4.4.4}$$

$$\left(\nabla_T^2 + k_{2\lambda}^2\right) E_{0z}(\rho,\phi) = 0, \quad \text{moduri TM} \tag{4.4.5}$$

unde

$$k_{2\lambda}^2 = k_2^2 + \gamma_2^2 \tag{4.4.6}$$

iar $\gamma_2^2$ reprezintă, de asemenea, constanta de propagare longitudinală.

Mărimile $k_{1\lambda}$ şi $k_{2\lambda}$ sunt, în general, funcții de $\rho$ şi $\phi$; întrucât în această secțiune presupunem câmpuri independente de $\phi$, rezultă că $k_{1\lambda}$ şi $k_{2\lambda}$ sunt funcții numai de $\rho$. Pentru a avea o atenuare puternică a câmpului în exteriorul ghidului, după coordonata $\rho$ este necesar ca $k_{2\lambda}^2$

să fie o mărime negativă, notată $k_{2\lambda}^2 = -\alpha_{2\lambda}^2$, cu $\alpha_{2\lambda} > 0$. În scopul asigurării condițiilor la limită (continuitatea componentelor tangențiale $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, şi a componentelor normale $\vec{D}$ şi $\vec{B}$) pe interfață, la orice $z$ este necesar ca constantele de propagare în cele două medii să fie egale $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. Din motive de simplificare a scrierii vom considera ghidul fără pierderi: $\gamma_1 = j\beta_1$, $\gamma_2 = j\beta_2$ şi $\beta_1 = \beta_2$; astfel relațiile (4.4.3) şi (4.4.6) se vor scrie

$$k_\lambda^2 = k_1^2 - \beta^2;\ \alpha_\lambda^2 = \beta^2 - k_2^2 \tag{4.4.7}$$

din care scoatem

$$k_\lambda^2 + \alpha_\lambda^2 = k_1^2 - k_2^2 \tag{4.4.8}$$

(s-a renunțat la scrierea indicilor „1" şi „2", cu excepția mărimilor $k_1$ şi $k_2$ care depind de parametrii electromagnetici ai mediilor respective).

În urma precizărilor făcute ecuațiile de propagare Helmholtz pentru câmpuri independente de $\phi$, au forme simplificate:

a) În interiorul barei dielectrice $(\rho \le a)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + k_\lambda^2\right) H_{0z}(\rho) = 0, \quad \text{moduri TE} \tag{4.4.9}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + k_\lambda^2\right) E_{0z}(\rho) = 0, \quad \text{moduri TM} \tag{4.4.10}$$

Soluțiile sunt de forma (2.4.16) pentru modurile TE şi (2.4.34) pentru modurile TM; astfel se poate scrie

$$H_{0z}(\rho),\ E_{0z}(\rho) = A_1 J_0(k_\lambda \rho) \tag{4.4.11}$$

unde: $A_1$ este o constantă cu dimensiunile specifice modului ales; $J_0(k_\lambda\rho)$ este *funcția Bessel* de speța I-a şi ordin 0; soluția (4.4.11) satisface condiția de valoare finită a câmpului în origine, $\rho \to 0$.

b) În exteriorul barei dielectrice $(\rho \ge a)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \alpha_\lambda^2\right) H_{0z}(\rho) = 0, \quad \text{moduri TE} \tag{4.4.12}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \alpha_\lambda^2\right) E_{0z}(\rho) = 0, \quad \text{moduri TM} \tag{4.4.13}$$

Soluțiile care satisfac condițiile de atenuare rapidă după $\rho$ (valoarea câmpului tinde către zero când $\rho \to \infty$) sunt de tipul

$$H_{0z}(\rho),\ E_{0z}(\rho) = A_2 K_0(k_\lambda \rho) \tag{4.4.14}$$

unde $K_0(\alpha_\lambda\rho)$ reprezintă *funcția Bessel modificată* de speța doua şi ordin zero; o proprietate importantă a acestei funcții constă în faptul că descreşte foarte rapid (exponențial) cu $\rho$ (anexa AII,(II.2.34)).

În cazul unei structuri concrete se urmăreşte determinarea ecuațiilor de valori proprii, şi apoi a constantei de propagare $\beta$; pentru a atinge acest scop sunt necesare câteva precizări introductive. Întâi trebuie subliniat că expresiile generale ale câmpurilor fizice $\vec{\mathscr{E}}$ şi $\vec{\mathscr{H}}$ sunt de forma

$$\mathscr{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\rho,\phi)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = \vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{4.4.15}$$

$$\mathscr{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0(\rho,\phi)e^{-\gamma z}e^{j\omega t} = \vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t} \tag{4.4.15}$$

Componentele transversale ale câmpurilor se determină prin utilizarea relațiilor (2.2.28) şi (2.2.46) care stabilesc legăturile dintre componentele transversale şi cele longitudinale; aceste relații sunt de forma

$$\nabla_T H_{0z} + \gamma \vec{H}_{0T} = j\omega\varepsilon\hat{k} \times \vec{E}_{0T} \tag{4.4.17}$$

$$\nabla_T E_{0z} - \gamma \vec{E}_{0T} = -j\omega\mu\hat{k} \times \vec{H}_{0T} \tag{4.4.18}$$

unde, în cazul structurilor cilindrice avem

$$\vec{E}_{0T} = \hat{\rho}E_{0\rho} + \hat{\phi}E_{0\phi} \tag{4.4.19}$$

$$\vec{H}_{0T} = \hat{\rho}H_{0\rho} + \hat{\phi}H_{0\phi} \tag{4.4.20}$$

$$\nabla_T = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{4.4.21}$$

Particularizăm aceste relații pentru modul TE şi câmpuri independente de $\phi$, considerând ghidul fără pierderi $\gamma = j\beta$; din (4.4.18), făcând $E_{0z} = 0$, rezultă

$$\vec{E}_{0T} = \frac{\omega\mu}{\beta}\hat{k} \times \vec{H}_{0T} \tag{4.4.22}$$

Facem produsul vectorial cu $\hat{k}$ al acestei expresii şi introducem în (4.4.17); se obține

$$\vec{H}_{0T} = \frac{j\beta}{k_\lambda^2}\nabla_T H_{0z} \tag{4.4.23}$$

Ne referim întâi la interiorul barei dielectrice; punând $H_{0z}(\rho) = A_1 J_0(k_\lambda \rho)$ şi considerând $\nabla_T = \hat{\rho}\partial/\partial\rho$, din ultima relație scoatem

$$H_{0\rho}(\rho) = -\frac{j\beta}{k_\lambda}A_1 J_1(k_\lambda\rho); \quad H_{0\phi} = 0 \tag{4.4.24}$$

în care s-a ținut seama de relația de recurență $J_0'(k_\lambda\rho) = -J_1(k_\lambda\rho)$. Componentele transversale de câmp electric au expresiile

$$E_{0\phi}(\rho) = -\frac{j\omega\mu_1}{k_\lambda}A_1 J_1(k_\lambda\rho); \quad E_{0\rho} = 0 \tag{4.4.25}$$

Procedând similar, pentru exteriorul barei dielectrice (utilizând relații de recurență pentru funcțiile $K_n(\alpha_\lambda\rho)$) se obține

$$H_{0\rho}(\rho) = -\frac{j\beta}{\alpha_\lambda}A_2 K_1(\alpha_\lambda\rho); \quad H_{0\phi} = 0 \tag{4.4.26}$$

$$E_{0\phi}(\rho) = \frac{j\omega\mu_2}{\alpha_\lambda}A_2 K_1(\alpha_\lambda\rho); \quad E_{0\rho} = 0 \tag{4.4.27}$$

unde $K_1(\alpha_\lambda\rho)$ este funcția Bessel modificată de speța doua şi ordin unu.

Componentele câmpului electromagnetic din interiorul şi exteriorul barei dielectrice trebuie să satisfacă condițiile la limită pe suprafața de separare aer – dielectric. Presupunând că pe

suprafața de separare nu sunt prezente surse (sarcini sau curenți), sub formă generală aceste condiții impun continuitatea componentelor tangențiale $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, şi continuitatea componentelor normale $\vec{D}$ şi $\vec{B}$. Pentru componentele tangențiale $H_{0z}$ la $\rho = a$ se scrie

$$A_1 J_0(k_\lambda a) = A_2 K_0(\alpha_\lambda a) \tag{4.4.28}$$

Componentele normale ale vectorului $\vec{B}$ sunt determinate ca:

- în interiorul barei (4.4.24)

$$B_{10\rho} = \mu_1 H_{0\rho} = \frac{-j\mu_1\beta}{k_\lambda} A_1 J_1(k_\lambda \rho) \tag{4.4.29}$$

- în exteriorul barei (4.4.26)

$$B_{20\rho} = \mu_2 H_{0\rho} = \frac{j\mu_2\beta}{\alpha_\lambda} A_2 K_1(\alpha_\lambda \rho) \tag{4.4.30}$$

La $\rho = a$ avem $B_{10a} = B_{20a}$, astfel se poate scrie

$$\frac{-j\mu_1\beta}{k_\lambda} A_1 J_1(k_\lambda a) = \frac{j\mu_2\beta}{\alpha_\lambda} A_2 K_1(\alpha_\lambda a) \tag{4.4.31}$$

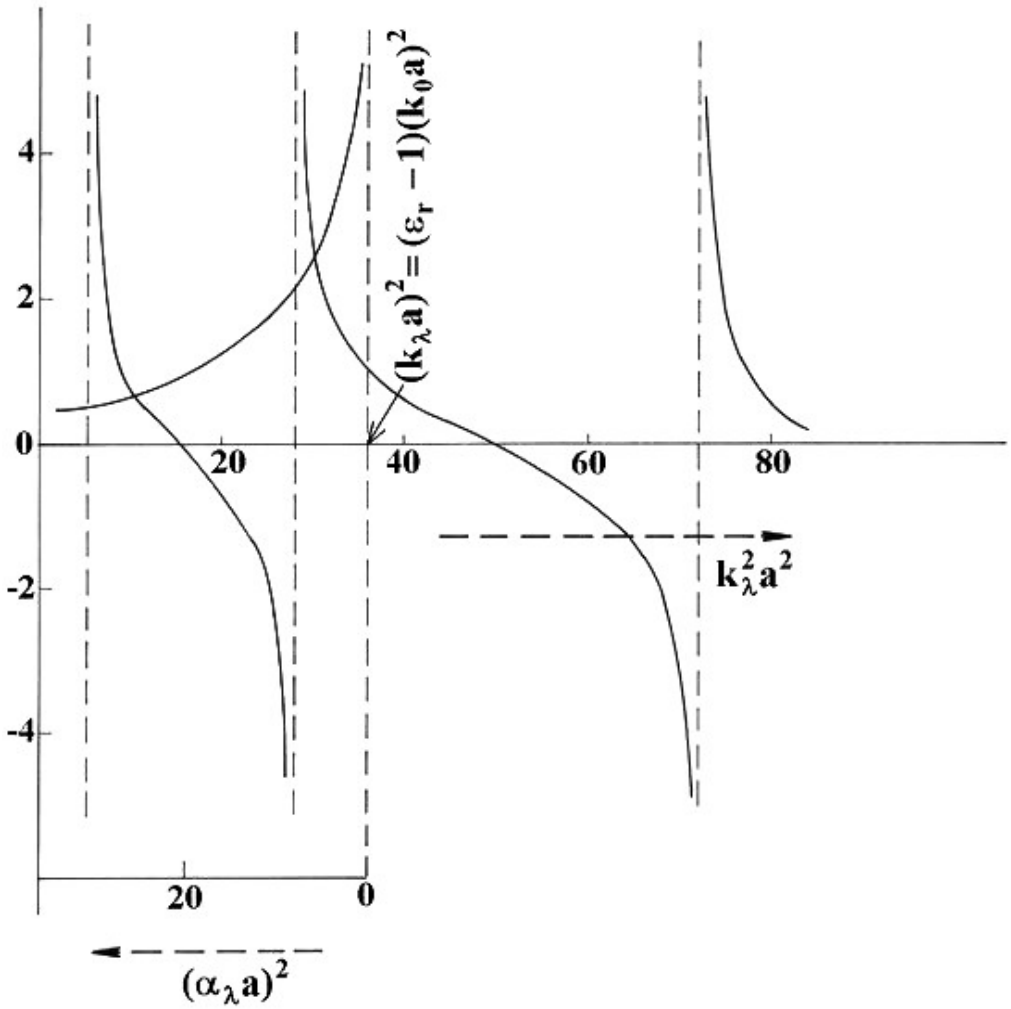



**Fig. 4.13. Soluții pentru ecuațiile de valori proprii (4.4.32) şi (4.4.33) în ghidul dielectric cilindric, moduri TE**

Făcând raportul, termen cu termen, al relațiilor (4.4.28) şi (4.4.31) se obține

$$-\frac{k_\lambda J_0(k_\lambda a)}{J_1(k_\lambda a)} = \frac{\alpha_\lambda K_0(\alpha_\lambda a)}{K_1(\alpha_\lambda a)} \tag{4.4.32}$$

Dacă în (4.4.8) vom nota $k_2^2 = k_0^2$, $k_1^2 = \varepsilon_r k_0^2$, $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$, şi multiplicăm toți termeni cu $a$, rezultă expresia

$$u_1^2 + u_0^2 = (\varepsilon_r - 1)(k_0 a)^2 \tag{4.4.33}$$

unde $u_1 = k_\lambda a, u_0 = \alpha_\lambda a$. Din ultimele două relații se pot determina mărimile $k_\lambda, \alpha_\lambda$, şi apoi constanta de propagare longitudinală $\beta$; prin urmare (4.4.32) şi (4.4.33) reprezintă *ecuații de valori proprii*. Soluțiile se determină pe cale grafică; un exemplu este prezentat în Fig. 4.13.În scopul obținerii unei interpretări convenabile s-a folosit acelaşi sistem de coordonate şi aceeaşi scală pentru ambii termeni din (4.4.32), însă originile sunt diferite: originea termenului stâng se ia în funcție de parametrul $(k_\lambda a)^2 = u_1^2$; originea termenului drept se ia în funcție de parametrul $(\alpha_\lambda a)^2 = u_0^2$ şi cu direcția opusă față de originea termenului stâng; din relația (4.4.33) rezultă că originea termenului drept $u_0^2 = 0$ este plasată la $(u_1)_{max}^2 = (\varepsilon_r - 1)(k_0 a)^2$.

### 4.4.2. Soluții pentru modurile hibride de propagare în ghidul dielectric cilindric

Aşa cum s-a specificat în introducerea secțiunii 4.4 dependența câmpului concomitent de coordonatele $\rho$ şi $\phi$ conduce la existența modurilor hibride $EH_{nm}$ şi $HE_{nm}$. Acest fapt presupune că un anume mod este caracterizat concomitent prin toate cele 6 componente: $E_z, E_\rho, E_\phi, H_z, H_\rho, H_\phi$; astfel ecuațiile de propagare Helmholtz se vor scrie şi rezolva pentru ambele componente longitudinale $E_{0z}$ şi $H_{0z}$.

În interiorul barei dielectrice $(\rho \le a)$, ecuațiile de propagare pentru componentele longitudinale sunt de forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k_{1\lambda}^2\right) E_{0z}(\rho,\phi) = 0 \qquad \text{(TM)} \tag{4.4.34}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k_{1\lambda}^2\right) H_{0z}(\rho,\phi) = 0 \qquad \text{(TE)} \tag{4.4.35}$$

Pentru rezolvare se aplică metoda separării variabilelor $E_{0z}(\rho,\phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$, obținându-se două ecuații independente de tipul (2.4.9) pentru $\Psi(\rho)$ şi (2.4.10) pentru $R(\rho)$. Soluțiile acestor ecuații se exprimă sub forma produselor dintre funcții Bessel de speța întâia şi o funcție ce descrie dependența unghiulară. Se presupun ghiduri fără pierderi, astfel dependența de $z$ se exprimă prin factorul $exp(-j\beta z)$; de exemplu pentru componenta longitudinală a câmpului electric se va scrie $E_z(\rho,\phi,z) = E_{0z}(\rho,\phi)e^{-j\beta z}$.

Expresiile generale le soluțiilor sunt de forma [1]

$$E_z(\rho,\phi,z) = A_n J_n(k_{1\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.36}$$

$$H_z(\rho,\phi,z) = B_n J_n(k_{1\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.37}$$

$$E_\rho = -\left(\frac{j\beta}{k_{1\lambda}} A_n J_n'(k_{1\lambda}\rho) + \frac{\omega\mu_0}{k_{1\lambda}^2 \rho} n B_n J_n(k_{1\lambda}\rho)\right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.38}$$

$$E_\phi = \left(-\frac{\beta n}{k_{1\lambda}^2 \rho} A_n J_n(k_{1\lambda}\rho) + \frac{j\omega\mu_0}{k_{1\lambda}} B_n J_n'(k_{1\lambda}\rho)\right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.39}$$

$$H_\rho = \left( \frac{\omega\varepsilon}{k_{1\lambda}^2 \rho} n A_n J_n(k_{1\lambda}\rho) - \frac{j\beta}{k_{1\lambda}} B_n J_n'(k_{1\lambda}\rho) \right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.40}$$

$$H_\phi = -\left( \frac{j\omega\varepsilon}{k_{1\lambda}} A_n J_n'(k_{1\lambda}\rho) + \frac{\beta}{k_{1\lambda}^2 \rho} n B_n J_n(k_{1\lambda}\rho) \right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.41}$$

unde: $A_n$, $B_n$ sunt constante de amplitudine care se determină din condițiile la limită şi din cele de excitare; $J_n(k_{1\lambda}\rho)$ este funcția Bessel de speța întâia şi ordin $n$, iar $J_n'(k_{1\lambda}\rho)$ reprezintă derivata în raport cu argumentul $(k_{1\lambda}\rho)$.

În exteriorul barei dielectrice $(\rho \geq a)$ ecuațiile de propagare pentru componentele longitudinale au forma generală

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + k_{2\lambda}^2 \right) E_{0z}(\rho,\phi) = 0 \qquad \text{(TM)} \tag{4.4.42}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + k_{2\lambda}^2 \right) H_{0z}(\rho,\phi) = 0 \qquad \text{(TE)} \tag{4.4.43}$$

unde $k_{2\lambda} = \left(k_2^2 - \beta^2\right)^{1/2}$ este numărul de undă transversal pentru spațiul exterior barei dielectrice. Şi în acest caz pentru rezolvare se aplică metoda separării variabilelor $E_{0z}(\rho,\phi) = R(\rho)\Psi(\phi)$ însă forma ecuației Bessel (2.4.10) depinde esențial de semnul şi valoarea parametrului $k_{2\lambda}$, care la rândul său depinde de natura undelor care se propagă în imediata vecinătate a barei dielectrice. De regulă se urmăreşte ca aceste unde să aibă caracterul de unde trapate; în acest caz $k_{2\lambda}^2$ este o mărime negativă deoarece $\beta > k_2$ şi $k_{2\lambda}^2 = k_2^2 - \beta^2 < 0$. Funcțiile care descriu adecvat atenuarea câmpului după direcția radială pentru $\rho \geq a$ sunt: *funcția Hankel* de speța doua şi ordin $n$ $H_n^{(2)}(k_{2\lambda}\rho)$, sau *funcția Bessel modificată* de speța doua şi ordin $n$ $K_n(k_{2\lambda}\rho)$. Este mai convenabil în cazul de față să se opereze cu funcții Bessel modificate care sunt soluții ale ecuației Bessel modificate (A II, (II.2.23)); în ecuația Bessel modificată numărul de undă $k_{2\lambda}^2$ este o mărime negativă, notată $-\alpha_{2\lambda}^2$, astfel argumentul funcției Bessel modificate este $\alpha_{2\lambda}\rho = jk_{2\lambda}\rho$, adică o mărime imaginară.

Expresiile generale le soluțiilor sunt de forma [1]

$$E_z(\rho,\phi,z) = C_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.44}$$

$$H_z(\rho,\phi,z) = D_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.45}$$

$$E_\rho = \left( \frac{j\beta}{\alpha_{2\lambda}} C_n K_n'(\alpha_{2\lambda}\rho) + \frac{\omega\mu_0}{\alpha_{2\lambda}^2 \rho} n D_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) \right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.46}$$

$$E_\phi = \left( \frac{\beta}{\alpha_{2\lambda}^2 \rho} n C_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) - \frac{j\omega\mu_0}{\alpha_{2\lambda}} D_n K_n'(\alpha_{2\lambda}\rho) \right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.47}$$

$$H_\rho = \left( -\frac{\omega\varepsilon_0}{\alpha_{2\lambda}^2 \rho} n C_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) + \frac{j\beta}{\alpha_{2\lambda}} D_n K_n'(\alpha_{2\lambda}\rho) \right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.48}$$

$$H_\phi = \left( \frac{j\omega\varepsilon_0}{\alpha_{2\lambda}} C_n K_n'(\alpha_{2\lambda}\rho) + \frac{\beta}{\alpha_{2\lambda}^2 \rho} n D_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) \right) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.4.49}$$

unde: $C_n, D_n$ sunt constante de amplitudine; $K_n(\alpha_{2\lambda}\rho)$ este funcția Bessel modificată de speța doua şi ordin $n$, iar $K_n'(\alpha_{2\lambda}\rho)$ reprezintă derivata în raport cu argumentul $(\alpha_{2\lambda}\rho)$.

Impunând condițiile la limită pe interfața $\rho = a$ pentru componentele tangențiale $\vec{E}, \vec{H}$ $(E_z, H_z, E_\phi, H_\phi)$ se ajunge la un sistem de ecuații care permit determinarea constantelor $A_n, B_n, C_n, D_n$; apoi prin eliminarea acestor constante se obține *ecuația de valori proprii*

$$\left[ \frac{\varepsilon_r J_n'(u_1)}{u_1 J_n(u_1)} + \frac{K_n'(u_2)}{u_2 K_n(u_2)} \right] \left[ \frac{J_n'(u_1)}{u_1 J_n(u_1)} + \frac{K_n'(u_2)}{u_2 K_n(u_2)} \right] = \left( \frac{n\beta}{k_0} \right)^2 \left( \frac{u_2^2 + u_1^2}{u_1^2 u_2^2} \right)^2 \tag{4.4.50}$$

în care s-au utilizat notațiile $u_1 = k_{1\lambda} a,\ u_2 = \alpha_{2\lambda} a$; aceste mărimi sunt legate printr-o relație de tipul (4.4.33)

$$u_1^2 + u_2^2 = (\varepsilon_r - 1)(k_0 a)^2 \tag{4.4.51}$$

Este uşor de observat că pentru $n = 0$ termenul drept din (4.4.50) se anulează, astfel fiecare paranteză din membrul stâng trebuie să fie egală cu zero; aceste paranteze vor conduce la ecuații de valori proprii pentru modurile cu simetrie axială TM şi TE. Într-adevăr prin egalarea cu zero a celei de a doua paranteze se obține ecuația de valori proprii (4.432) pentru modul TE.

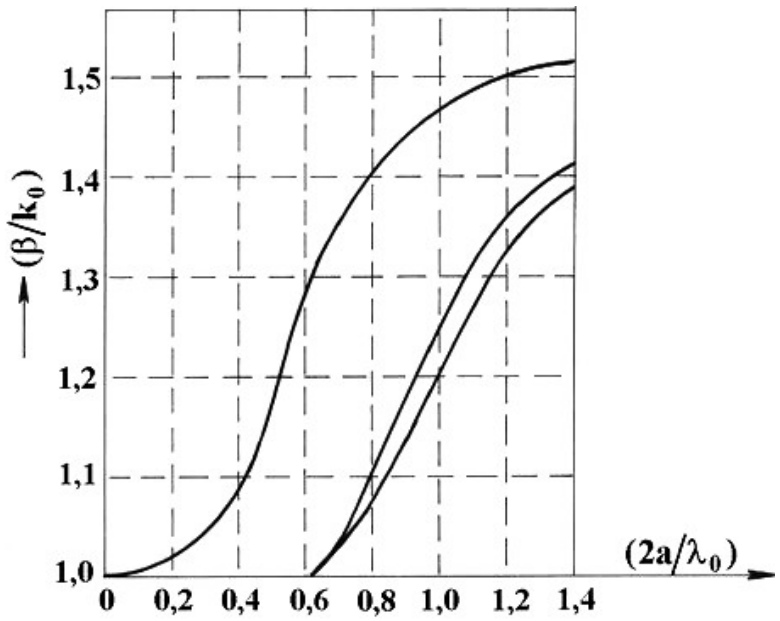



**Fig. 4.14. Variația constantei de propagare normate în funcție de frecvența normată pentru un ghid cilindric din polistiren**

Rezolvarea sistemului (4.4.50), (4.4.51) se efectuează de regulă pe calculator utilizând un algoritm de căutare a rădăcinilor. În final se urmăreşte determinarea constantei de propagare $\beta$ în funcție de diferiți parametri ai structurii. Este convenabilă reprezentarea grafică a constantei de propagare normate $(\beta/k_0)$ pentru un dielectric concret ($\varepsilon_r$ dat) în funcție de parametrul $(2a/\lambda_0)$, care poate fi privit ca o frecvență normată. În cazul unei bare de polistiren $(\varepsilon_r = 2{,}56)$, graficele pentru primele trei moduri de unde de suprafață sunt reprezentate în Fig. 4.14; se observă că modul hibrid $HE_{11}$ nu are frecvență (inferioară) de tăiere, în timp ce modurile cu simetrie axială $TE_{01}$ şi $TM_{01}$ au frecvențe de tăiere determinate de relația $(2a/\lambda_0) \le 0{,}612$.

## 4.5. FIBRE OPTICE

Cablul cu fibră optică reprezintă o structură cu medii dielectrice pentru transmiterea semnalelor optice, care a permis miniaturizarea echipamentelor, creşterea fiabilității şi perfecționarea metodelor de procesare a semnalelor. În primele stadii de dezvoltare şi aplicare a fibrelor optice performanțele erau modeste datorită unor neajunsuri tehnologice cum ar fi: atenuări importante ($20\,dB/km$ în 1970, $1\,dB/km$ în 1980), surse şi detectoare de semnale optice de dimensiuni mari, dispersii semnificative ale semnalelor de tip impuls. Perfecțiunea surselor optice (diode laser) şi a detectoarelor (fotodiodele semiconductoare de mare rapiditate şi randament), precum şi dezvoltarea opticii integrate au condus la realizarea unei miniaturizări avansate a sistemelor optice, creşterea fiabilității prin alinierea rigidă a componentelor optice, reducerea greutății şi a dimensiunilor de ansamblu.

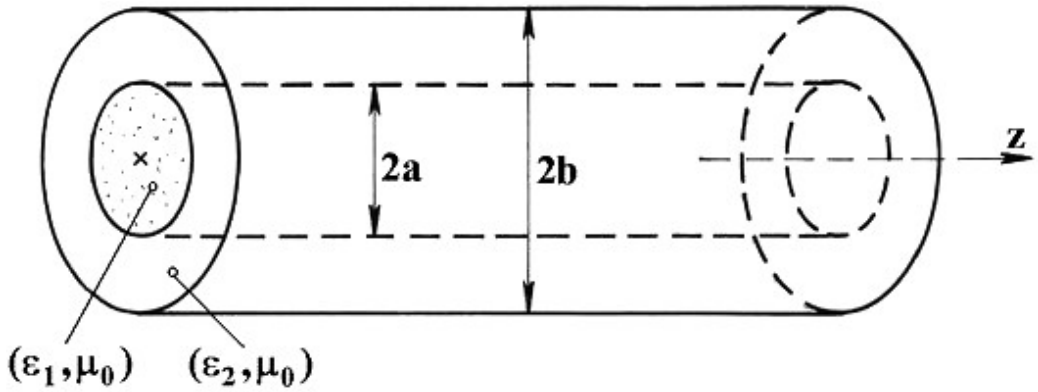



**Fig. 4.15. Fibră optică, structură fizică**

Fibra optică reprezintă în esență un ghid dielectric cilindric cu structură fizică particulară; configurația tipică este arătată în Fig. 4.15 şi constă dintr-o bară dielectrică centrală (miez) de permitivitate $\varepsilon_1$ şi o manta exterioară (coroană cilindrică) din material dielectric de permitivitate $\varepsilon_2$; această configurație suportă unde de suprafață care se propagă în coroana cilindrică, în imediata vecinătate a interfeței cu miezul central. Întreaga structură este protejată mecanic şi chimic printr-un înveliş exterior din material plastic şi plasă metalică; însă având în vedere descreşterea exponențială a undei de suprafață în coroana cilindrică, în cazul analizei se va admite că această coroană se extinde la infinit, astfel condițiile la limită de la suprafața de separare coroană – înveliş protector nu influențează caracteristicile de propagare ale semnalelor în fibra optică. Pentru ca fibra optică arătată în Fig. 4.15 să poată suporta unde de suprafață în lungul suprafeței de separare miez – coroană este necesar ca permitivitățile celor două medii să se afle în raportul $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (indicii de refracție se vor afla în raportul $n_1 > n_2$).Sursa de excitare a semnalului optic este plasată în interiorul miezului; confinarea energiei transmise în interiorul miezului impune alegerea potrivită a raportului $\varepsilon_{r1}/\varepsilon_{r2}$, astfel încât unghiul de incidență pe suprafața de separare (normala are sensul razei $\rho$) să fie mai mare decât cel critic $\theta_i^*$ care asigură *reflexia totală*; fenomenul de reflexie totală este studiat în Cap. 9.

Constructiv există două tipuri de fibre optice: fibră cu variație în treaptă a indicelui de refracție (Fig. 4.16a) în care avem o trecerea abruptă de la $n_1$ la $n_2$; fibră cu variație graduală a indicelui de refracție $n_1(\rho)$, astfel încât la interfața $\rho = a$ să aibă loc egalitatea $n_1(a) = n_2$ (Fig. 4.16b).

Din punctul de vedere al modurilor de propagare se disting două categorii de fibre optice: fibre cu propagare *monomod*, la care se distinge un singur unghi critic (de reflexie totală) $\theta_i^*$; fibre cu propagare *multimod*, la care propagarea poate avea loc pentru mai multe valori ale unghiului de incidență. Trebuie subliniat că în cadrul analizei modale dezvoltate în acest capitol numărul modurilor este definit prin numărul frecvențelor de tăiere (critice).

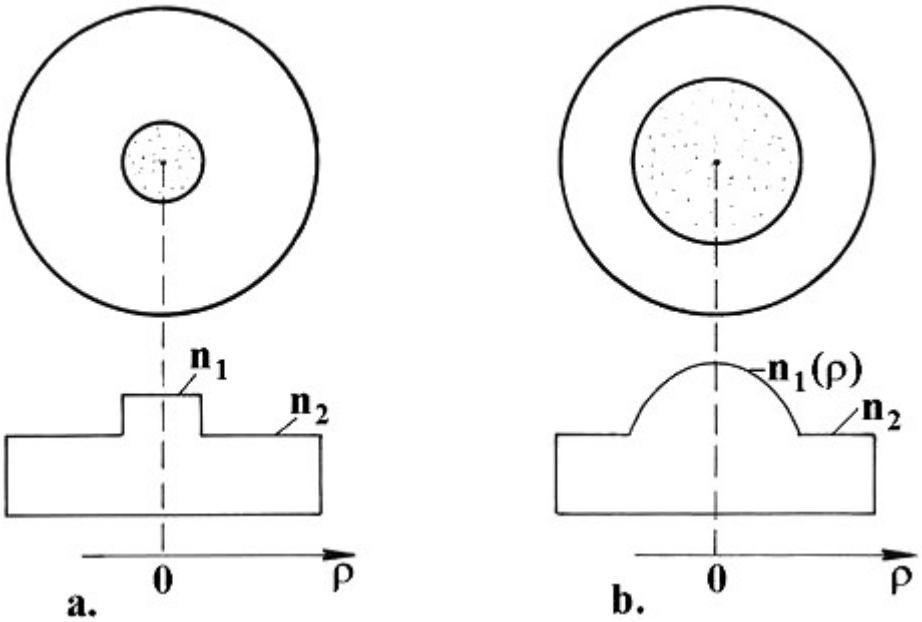



**Fig. 4.16. Tipuri de fibre optice: a – variație abruptă a indicelui de refracție; b – variație graduală a indicelui de refracție**

### 4.5.1. Fibre optice cu variație abruptă a indicelui de refacție

În funcție de diametrul miezului dielectric central, fibrele cu variație în treaptă a indicelui de refracție pot fi monomodale sau multimodale. În cazul propagării monomod diametrul este mic, comparabil cu lungimea de undă $\lambda_0$ a semnalului care se propagă, fiind cuprins între $2a = 2 \div 16\,\mu m$, însă totdeauna $2a \geq \lambda_0$; în cazul propagării multimod diametrul miezului este mult mai mare $2a = 25 \div 150\,\mu m$. Deoarece semnalele din fibrele optice sunt de tip „optic", este convenabil ca proprietățile fizice de interes să fia caracterizate prin indicii de refracție $n_1$ şi $n_2$; în construcțiile mai vechi valorile uzuale sunt $n_1 = 1{,}48$ şi $n_2 = 1{,}46$ în construcțiile mai recente valorile tipice sunt $n_1 = 1{,}527,\ n_2 = 1{,}517$.

Pentru analiza structurii mai mulți autori preferă utilizarea potențialelor vectoriale Hertz: $\vec{\Pi}_e$ - vector Hertz electric; $\vec{\Pi}_h$ - vector Hertz magnetic. Aceşti vectori sunt definiți în Cap.1 prin relațiile generale (1.1.48), (1.1.60), pe care le retranscriem aici

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{\Pi}_e(\vec{r},t)\right) \tag{4.5.1}$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{\Pi}_h(\vec{r},t)\right) \tag{4.5.2}$$

unde toate mărimile au caracterul unor „*câmpuri fizice*"; pentru câmpurile armonice relațiile (4.5.1) şi (4.5.2) iau forma (1.2.59), respectiv (1.2.66). În medii isotrope, omogene şi fără surse vectorii $\vec{\Pi}_e$ şi $\vec{\Pi}_h$ satisfac ecuațiile de propagare de forma

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_e(\vec{r},t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{4.5.3}$$

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_h(\vec{r},t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_h(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{4.5.4}$$

Presupunem că semnalele care se propagă sunt „*armonice*" (variația în timp este dată de $exp(j\omega t)$) iar propagarea are loc după direcția $z$, definită prin versorul $\hat{k}$. Toate modurile TE pot fi deduse dintr-un vector Hertz electric $\vec{\Pi}_e = \hat{k}\Pi_{ez}$, așa cum rezultă din (4.5.1); similar, toate modurile TM pot fi deduse dintr-un vector Hertz magnetic $\vec{\Pi}_h = \hat{k}\Pi_{hz}$, așa cum rezultă din (4.5.2). Mărimile $\Pi_{ez}$ și $\Pi_{hz}$ reprezintă componentele longitudinale și satisfac ecuații de propagare scalare de tip Helmholtz. În structurile de propagare cu geometrie cilindrică aceste ecuații au formele:

a) *În interiorul miezului* $(\rho \le a)$

$$\left(\nabla_T^2 + k_{1\lambda}^2\right)\Pi_{ez} = 0, \qquad \text{moduri TE} \tag{4.5.5}$$

$$\left(\nabla_T^2 + k_{1\lambda}^2\right)\Pi_{hz} = 0, \qquad \text{moduri TM} \tag{4.5.6}$$

unde: $\nabla_T^2$ este Laplaceanul transversal (2.4.4); $k_{1\lambda}$ este numărul de undă transversal, definit printr-o expresie de forma $k_{1\lambda}^2 = k_1^2 - \beta^2$ (4.4.7), în care s-a presupus $\gamma_1 = j\beta$ (ghid fără pierderi) și $k_1^2 = k_0^2 n_1$. Soluțiile se obțin prin metoda separării variabilelor. Expresiile generale ale acestor soluții, incluzând și factorul de propagare longitudinală $exp(-j\beta z)$, sunt

$$\Pi_{ez} = A_n J_n(k_{1\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.5.7}$$

$$\Pi_{hz} = B_n J_n(k_{1\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.5.8}$$

unde: $J_n(k_{1\lambda}\rho)$ sunt funcții Bessel de speța întâia și ordin $n$; constantele de amplitudine $A_n$, $B_n$ se determină din condițiile la limită și cele de excitare.

b) *În exteriorul miezului central ( $\rho \ge a$ în coroana cilindrică)*

$$\left(\nabla_T^2 + k_{2\lambda}^2\right)\Pi_{ez} = 0, \qquad \text{moduri TE} \tag{4.5.9}$$

$$\left(\nabla_T^2 + k_{2\lambda}^2\right)\Pi_{hz} = 0, \qquad \text{moduri TM} \tag{4.5.10}$$

Întrucât în coroana cilindrică câmpul este puternic atenuat pe direcția radială, situație ce corespunde undelor trapate, $k_{2\lambda}^2$ trebuie să fie o mărime negativă, notându-se $k_{2\lambda}^2 = -\alpha_{2\lambda}^2$. Soluțiile sunt date de funcțiile Bessel modificate

$$\Pi_{ez} = C_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.5.11}$$

$$\Pi_{hz} = D_n K_n(\alpha_{2\lambda}\rho) e^{-jn\phi} e^{-j\beta z} \tag{4.5.12}$$

unde $\alpha_{2\lambda}^2 = \beta^2 - k_2^2$ și $k_2^2 = k_0^2 n_2$ (4.4.7).

Constantele de amplitudine $C_n$ și $D_n$ se determină, de asemenea, din condițiile la limită pe interfața $\rho = a$; în acest scop este necesară determinarea componentelor tangențiale $E_z, H_z, E_\phi, H_\phi$ care trebuie să fie continue la interfață. Utilizând relațiile de definiție (4.5.1), (4.5.2) se pot scrie expresiile generale

$$E_z(\rho,\phi,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\Pi_{ez} \tag{4.5.13}$$

$$H_z(\rho,\phi,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\Pi_{hz} \tag{4.5.14}$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial z}\Pi_{ez}+j\omega\mu\frac{\partial}{\partial\rho}\Pi_{hz} \tag{4.5.15}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z)=-j\omega\varepsilon\frac{\partial}{\partial\rho}\Pi_{ez}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial z}\Pi_{hz} \tag{4.5.16}$$

unde: $k=k_1=k_0n_1^{1/2}$ şi $\varepsilon=\varepsilon_1$ în miez; $k=k_2=k_0n_2^{1/2}$ şi $\varepsilon=\varepsilon_2$ în coroana cilindrică.
Este convenabil să se opereze în două etape. Întâi se pun condițiile de continuitate la $\rho=a$ pentru $E_z$ şi $H_z$, obținându-se

$$\left.\begin{aligned}A_nJ_n(k_{1\lambda}a)&=C_nK_n(\alpha_{2\lambda}a)\\B_nJ_n(k_{1\lambda}a)&=D_nK_n(\alpha_{2\lambda}a)\end{aligned}\right\} \tag{4.5.17}$$

din care se obțin rapoartele $A/C=B/D$ care ne permit să scriem expresiile (4.5.7), (4.5.8) şi (4.5.11), (4.5.12) sub forma

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{ez}&=\frac{A_z}{k_{1\lambda}^2}\frac{J_n(k_{1\lambda}\rho)}{J_n(k_{1\lambda}a)}e^{-jn\phi}e^{-j\beta z}\\\Pi_{hz}&=\frac{B_z}{k_{1\lambda}^2}\frac{J_n(k_{1\lambda}\rho)}{J_n(k_{1\lambda}a)}e^{-jn\phi}e^{-j\beta z}\end{aligned}\right\}\quad \rho<a \tag{4.5.18}$$

$$\left.\begin{aligned}\Pi_{ez}&=\frac{A_z}{\alpha_{2\lambda}^2}\frac{K_n(\alpha_{2\lambda}\rho)}{K_n(\alpha_{1\lambda}a)}e^{-jn\phi}e^{-j\beta z}\\\Pi_{hz}&=\frac{B_z}{\alpha_{2\lambda}^2}\frac{K_n(\alpha_{2\lambda}\rho)}{K_n(\alpha_{2\lambda}a)}e^{-jn\phi}e^{-j\beta z}\end{aligned}\right\}\quad \rho>a \tag{4.5.19}$$

unde $A_z$, $B_z$ sunt constante.

Punând condițiile de continuitate şi pentru $E_\phi$, $H_\phi$ la $\rho=a$, în final se obține o ecuație de valori proprii, similară cu (4.4.50)

$$\left[\frac{n_1^2J_n'(u_1)}{u_1J_n(u_1)}+\frac{n_2^2K_n'(u_2)}{u_2K_n(u_2)}\right]\left[\frac{J_n'(u_1)}{u_1J_n(u_1)}+\frac{K_n'(u_2)}{u_2K_n(u_2)}\right]=\left[\frac{n\beta}{k_0}\left(\frac{u_1^2+u_2^2}{u_1^2u_2^2}\right)\right]^2 \tag{4.5.20}$$

în care s-a notat $u_1=k_{1\lambda}a$, $u_2=\alpha_{2\lambda}a$ şi s-a ținut cont de (4.4.8); se poate scrie

$$u_1^2+u_2^2=(ak_0)^2\left(n_1^2-n_2^2\right) \tag{4.5.21}$$

Din ultimele două relații se determină constanta de propagare $\beta$ în funcție de frecvență şi de parametrii constructivi ai structurii. În cazul fibrei optice este convenabilă reprezentarea grafică a constantei de propagare normate $Y_\beta$ în funcție de frecventa normată $X_f$, unde

$$Y_\beta=\frac{\beta^2-k_2^2}{k_1^2-k_2^2}=\frac{u_2^2}{u_1^2+u_2^2} \tag{4.5.22}$$

$$X_f^2=(ak_0)^2\left(n_1^2-n_2^2\right)=u_1^2+u_2^2 \tag{4.5.23}$$

Graficele pentru câteva moduri uzuale sunt arătate în Fig. 4.17a, din care se observă că frecvența de tăiere a modului $HE_{11}$ este egală cu zero; configurația modului $HE_{11}$ (numit adesea şi mod de dipol) reprezintă un mod dominant şi este arătată în Fig. 4.17b; modurile următoare care au frecvențele de tăiere cele mai joase sunt $TE_{01}$ şi $TM_{01}$. Valorile frecvențelor de tăiere pentru aceste moduri pot fi obținute punând $n=0$ în (4.5.20), din care vor rezulta două ecuații de valori proprii

independente: egalând cu zero prima paranteză din membrul stâng se obține ecuația de valori proprii pentru modul TM; egalând cu zero cea de-a doua paranteză din membrul stâng se obține ecuația de valori proprii pentru modul TE (identică cu (4.4.32)).

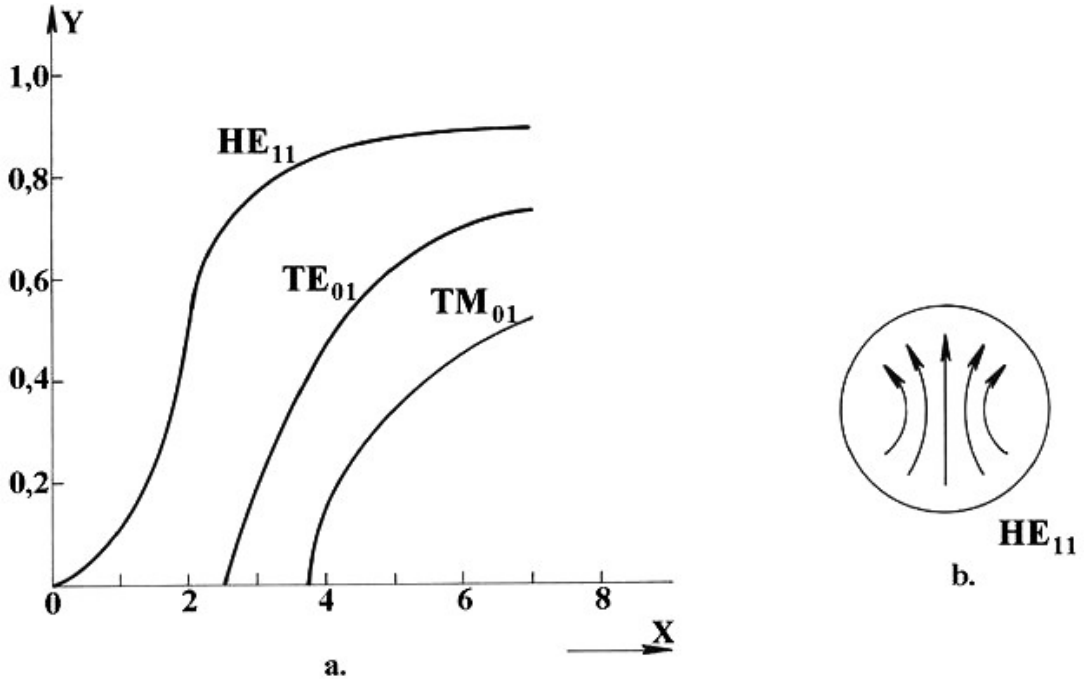



**Fig. 4.17. Fibră optică: a – variația constantei de propagare normate în funcție de frecvența normată; b – configurația liniilor de câmp electric pentru modul hibrid dominant $HE_{11}$**

Din (4.5.22) rezultă că frecvența de tăiere pentru care $Y_\beta = 0$ survine pentru $u_2 \to 0$. Referindu-ne de exemplu la modul $TE_{01}$, a doua paranteză din membrul stâng al ecuației (4.5.20) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{J_0(u_1)}{J_0'(u_1)} = -\frac{u_2}{u_1}\frac{K_0(u_2)}{K_0'(u_2)} \tag{4.5.24}$$

Ținem cont că $K_0(u_2) \neq 0$ când $u_2 \to 0$; în fapt $K_0(u_2 \to 0) = -[log(u_2/2) + \gamma_e]$ (anexa AII,(II.2.33)), unde $\gamma_e = 1{,}781$ este constanta Euler; astfel din (4.5.24) rezultă că frecvența de tăiere, atât pentru $TE_{01}$, cât şi pentru $TM_{01}$, este dată de condiția

$$J_0(u_1) = 0 \tag{4.5.25}$$

a cărei rădăcină minimă este $u_1 = 2{,}405$ (Tabelul 2.1). Frecvența normată de tăiere rezultă din (4.5.23)

$$X_f = 2{,}405 = \left(n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2} ak_0 = \frac{2\pi a n_1}{\lambda_0}\left(1 - n_2^2/n_1^2\right)^{1/2} \tag{4.5.26}$$

Dacă frecvența normată este mai mică sau egală cu *2,405* în fibra optică se propagă un singur mod; de exemplu pentru valorile uzuale $n_1 = 1{,}48,\ n_2 = 1{,}46$ şi $\lambda_0 = 0{,}82\,\mu m$, diametrul maxim al miezului care asigură propagarea monomod este $2a = 2{,}59\,\mu m$.

Dacă diametrul miezului este mult mai mare, $2a >> \lambda_0$, fibra suportă propagarea multimod; numărul modurilor pentru o anumită frecvență normată $X_f$ este dat de formula aproximativă $N \cong X_f^2/2$. Considerând $\lambda_0 = 10\,\mu m$ (infraroşu apropiat) şi $2a = 100\,\mu m$, teoretic fibra poate suporta până la 25000 moduri; practic însă se pot distinge aproximativ 200 moduri utilizabile.

Un parametru important al fibrelor optice este *apertura numerică NA*, care defineşte abilitatea structurii de a colecta unda luminoasă în miezul fibrei. Acest parametru este determinat de $sin\theta_{max}$, unde $\theta_{max}$ este unghiul maxim de intrare a fasciculului luminos în miezul dielectric (Fig. 4.18) pentru care raza este captată în miez, adică unghiul de incidenţă pe interfaţa miez – coroană cilindrică este $\theta_i^*$ (unghiul critic de reflexie totală); se poate scrie

$$NA = sin\theta_{max} = \left(n_1^2 - n_2^2\right)^{1/2} \tag{4.5.27}$$

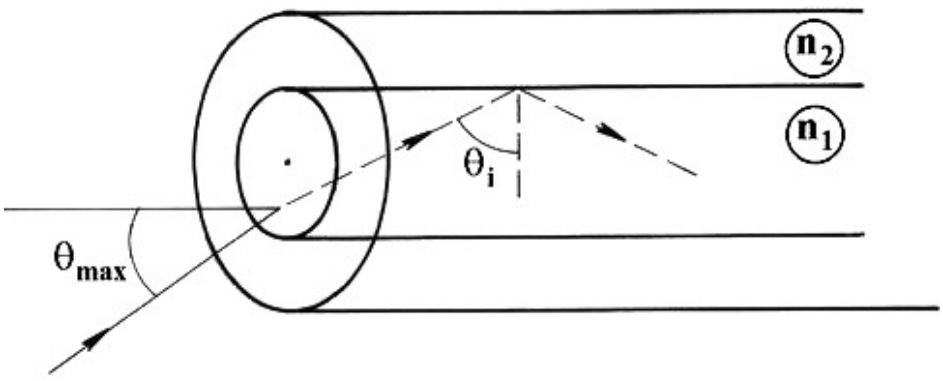



**Fig. 4.18. Definiția aperturii numerice**

### 4.5.2. Fibre optice cu variaţie graduală a indicelui de refacţie

În cazul fibrelor cu variaţie graduală a indicelui de refracţie în miezul central (Fig. 4.16b) avem de rezolvat o problemă de propagare în medii neomogene; propagarea modurilor cu undă de suprafaţă în medii neomogene este studiată cu ajutorul metodei WKB (Wentzel – Kramers - Brillouin). Ecuaţia de propagare în interiorul miezului $(\rho < a)$ pentru modul TM este de tipul (4.5.6) pe care o scriem sub forma

$$\left[\nabla_T^2 + k_{1\lambda}^2(\rho)\right]\Pi_{hz} = 0\,; \tag{4.5.28}$$

numărul de undă transversal $k_{1\lambda}(\rho)$ are o expresie de tipul (4.4.7), astfel se poate scrie

$$k_{1\lambda}^2(\rho) = k_1^2(\rho) - \beta^2 = k_0^2 n_1^2(\rho) - \beta^2 \tag{4.5.29}$$

Indicele de refracţie $n_1(\rho)$ poare avea legi diferite de variaţie; în multe structuri se adoptă o variaţie pătratică de forma

$$n_1^2(\rho) = n_{10}^2\left[1 - 2\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \Delta_n\right] \tag{4.5.30}$$

unde: $n_{10}$ este valoarea indicelui de refracţie pe axul miezului;

$$\Delta_n = \frac{n_{10}^2 - n_2^2}{2n_{10}^2} \cong \frac{n_{10} - n_2}{n_{10}}\,; \tag{4.5.31}$$

(se observă că $n_2^2 = n_{10}^2(1 - 2\Delta_n) = n_1^2(a)$).

Utilizând metoda WKB numărul de undă $k_{1\lambda}(\rho)$ satisface condiţia [2]

$$\int_{-a}^{a} k_{1\lambda}(\rho)d\rho = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{4.5.32}$$

Rezolvarea riguroasă a ecuației (4.5.28) este extrem de laborioasă, depășind scopul secțiunii de față. Constanta de propagare $\beta$ este cuprinsă între $k_0 n_2 < \beta < k_0 n_{10}$ şi are expresia

$$\beta^2 = k_0^2 n_{10}^2 \left[ 1 - \frac{2(2\Delta_n)^{1/2}}{k_0 n_{10} a} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right] \tag{4.5.33}$$

### 4.5.3. Efecte de dispersie la propagarea pe fibre optice

Semnalele transmise pe fibrele optice constau în succesiuni de impulsuri de diferite durate de timp $\tau_i$, şi forme; în această ordine de idei este utilă determinarea câtorva parametri ce caracterizează performanțele cablurilor optice: întârzierea specifică $\tau_0$ (pe unitatea de lungime), lărgirea impulsului pe unitate de lungime $\Delta\tau_i$, dispersia $S$, produsul $(BL)$, unde $B$ este lărgimea benzii de frecvențe iar $L$ este lungimea parcursă.

**1°. Efecte de dispersie în ghiduri metalice.**

Noțiunile de bază referitoare la parametrii enumerați pot fi introduse convenabil prin referire la ghidul metalic dreptunghiular. Pentru simplitate considerăm modul $TE_{10}$ iar câmpul $E_y$ reprezintă o undă modulată, având purtătoarea $\omega_0$; în puntul de excitare $z = 0$ avem

$$E_y(0,t) = A(t)\cos[\omega_0 t + \Phi(t)] = Re\left[u_0(t) e^{j\omega_0 t}\right] \tag{4.5.34}$$

unde: $A(t)$ şi $\Phi(t)$ reprezintă amplitudinea, respectiv faza cu variații lente în timp; $u_0(t)$ este *anvelopa complexă* $u(z,t)$ evaluată la $z = 0$; $u_0 = Ae^{j\phi}$. Uzual, anvelopa complexă $u(z,t)$ este legată de un semnal analitic $u_a(z,t)$ punând $u_a = u\,exp(j\omega_0 t)$; factorul $sin(\pi x/a)$ din expresia componentei $E_y(x,y)$ (2.3.74) este independent de $z$ şi $t$ şi este inclus în $A(t)$.

Exprimăm semnalul analitic în punctul de excitare $z = 0$ prin integrala Fourier

$$u_a(0,t) = u_0(t) e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_a(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{4.5.35}$$

Componenta Fourier $U_a$ se obține din relația

$$U_a(\omega) = \int u_0(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = U(\omega - \omega_0) = U(\omega') \tag{4.5.36}$$

iar $U(\omega')$ este transformata Fourier a anvelopei complexe

$$U(\omega') = \int u_0(t) e^{-j\omega t} dt \tag{4.5.37}$$

Relația (4.5.36) arată că componenta Fourier a unui semnal (impuls) modulat este dată de către componenta Fourier a anvelopei complexe centrată pe frecvența purtătoare. Fiecare componentă Fourier satisface ecuația de propagare într-un punct oarecare $z$, fiind caracterizată prin factorul de propagare $exp(-j\beta z)$. Însumând toate componentele de frecvență, câmpul $E_y(z,t)$ într-un punct $z \neq 0$ este

$$E_y(z,t) = Re\left[ \frac{1}{2\pi} \int U(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} e^{-j\beta z} d\omega \right] \tag{4.5.38}$$

ce reprezintă o expresie generală a undei $E_y(z,t)$ care se propagă într-un sistem cu dispersie.

Considerăm un semnal (impuls) de bandă îngustă iar constanta $\beta(\omega)$ este o mărime lent variabilă în funcție de $\omega$; întrucât $\omega - \omega_0 << \omega_0$, exponentul funcției de sub integrală se poate dezvolta în serie Taylor, reținând primii trei termeni

$$\beta(\omega)=\beta(\omega_0)+(\omega-\omega_0)\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\bigg|_{\omega_0}+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\bigg|_{\omega_0} \tag{4.5.39}$$

Acum, observând că (4.5.38) se poate pune sub forma

$$E_y(z,t)=Re\left[u(z,t)e^{j\omega_0 t}\right] \tag{4.5.40}$$

se poate scrie

$$u(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int U(\omega')exp\left[-j\beta(\omega_0)z-j\frac{\omega'^2}{2}\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}+j\omega'(t-t_0)\right]d\omega' \tag{4.5.41}$$

unde s-a notat

$$t_0=z\frac{\partial\beta}{\partial\omega} \tag{4.5.42}$$

În cazul ghidurilor fără pierderi $t_0$ reprezintă *întârzierea de grup*, definită ca $t_0=z/v_{gr}$, unde $v_{gr}=(\partial\beta/\partial\omega)^{-1}$ este viteza cu care se propagă semnalul în ansamblu; mărimea $\tau_0=(1/v_{gr})=\partial\beta/\partial\omega$ reprezintă *întârzierea specifică* (pe unitatea de lungime). Al doilea termen al exponențialei de sub integrala (4.5.41) în care intră $(\partial^2\beta/\partial\omega^2)$ reprezintă lărgirea impulsului; dacă acest termen este neglijabil, atunci câmpul $E_y(z,t)$ poate fi scris sub forma

$$E_y(z,t)=Re\left[u_0(t-t_0)e^{j\omega_0 t}e^{-j\beta(\omega_0)z}\right] \tag{4.5.43}$$

adică în cazul sistemelor fără pierderi unda se propagă cu viteza de grup $v_{gr}$, fără distorsiuni.

Presupunem că semnalul de intrare are o anvelopă de tip Gauss,

$$E_y(0,t)=A_0\,exp\left[-t^2/T_0^2\right]cos\,\omega_0 t \tag{4.5.44}$$

unde $T_0$ este lărgimea inițială a impulsului. Anvelopa complexă la $z=0$ este

$$u_0(t)=A_0\,exp\left[-t^2/T_0^2\right] \tag{4.5.45}$$

iar transformata Fourier va fi

$$U(\omega')=A_0\pi^{1/2}T_0\,exp\left[-T_0^2\omega'^2/4\right] \tag{4.5.46}$$

Introducând în (4.5.41) se obține

$$u(z,t)=\frac{A_0}{(1+jS/T_0)^{1/2}}exp\left[-\frac{(t-t_0)^2(1-jS/T_0)}{T_0^2+S^2}\right]e^{-j\beta(\omega_0)z} \tag{4.5.47}$$

unde s-a notat $S=(2/T_0)z\left(\partial^2\beta/\partial\omega^2\right)\Big|_{\omega_0}$; se observă că față de valoarea inițială $T_0$, lărgimea impulsului a crescut la

$$T=\left(T_0^2+S^2\right)^{1/2} \tag{4.5.48}$$

Ținând cont de (4.4.42) mărimea $|S|$ poate fi explicitată sub forma

$$|S|=\left|\Delta\omega\frac{\partial t_0}{\partial\omega}\right| \tag{4.5.49}$$

unde $\Delta\omega=(2/T_0)$ este banda de frecvență a impulsului Gauss la $z=0$, iar $\partial t_0/\partial\omega$ reprezintă întârzierea de grup pe unitatea de frecvență; prin urmare $|S|$ este întârzierea de grup totală cauzată de către toate componentele de frecvență ale impulsului. Adesea este convenabil ca parametrul $|S|$

să fie exprimat în funcţie de lungimea de undă de spaţiu liber; observând că $(\Delta\omega/\omega) = -(\Delta\lambda_0/\lambda_0)$, se poate scrie

$$|S| = \left|\Delta\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \lambda_0}\right|; \tag{4.5.50}$$

lărgirea impulsului pe unitatea de lungime este

$$|S_0| = \Delta\tau_0 = \left|\Delta\lambda_0 \frac{\partial \tau_0}{\partial \lambda_0}\right| \tag{4.5.51}$$

În cazul modului $TE_{10}$ în ghidul metalic avem $\beta^2 = \left[k^2 - (\pi/a)^2\right]^{1/2}$, astfel mărimile $\tau_0$ şi $|S_0|$ devin

$$\tau_0 = \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = \frac{\omega}{\beta c_0^2}; \qquad |S_0| = \Delta\tau_0 = \left|\Delta\omega \frac{\partial\tau_0}{\partial\omega}\right| = \left|\Delta\omega \frac{(\pi/a)^2}{\beta^3 c_0^2}\right| \tag{4.5.52}$$

unde $c_0$ este viteza luminii în vid.

**2°. Dispersia în fibre optice cu variaţie abruptă a indicelui de refracţie.**

Este utilă întâi o ilustrare a proceselor de propagare în cele trei tipuri principale de fibre optice: fibră cu variaţie abruptă a indicelui de refracţie şi propagare monomod (Fig. 4.19a); fibră cu variaţie abruptă a indicelui de refracţie şi propagare multimod (Fig. 4.19b); fibră cu variaţie graduală a indicelui de refracţie si propagare multimod (Fig. 4.19c).

a) În cazul *propagării monomod* avem:

- Întârzierea de grup specifică

$$\tau_0 = d\beta/d\omega; \tag{4.5.53}$$

- Creşterea lărgimii impulsului

$$|S_0| = \Delta\tau_0 = \frac{d\tau_0}{d\lambda}\Delta\lambda; \tag{4.5.54}$$

- Dispersia, definită ca lărgire a impulsului pe unitate de lungime şi unitate de frecvenţă (lungime de undă)

$$\widetilde{S} = \frac{d\tau_0}{d\lambda} \tag{4.5.55}$$

care prin multiplicarea cu lărgimea spectrului la sursă $\Delta\lambda_s$ ne dă lărgirea impulsului exprimată în $ns/km$.

- Produsul (bandă de trecere × distanţă) care se defineşte după cum urmează. Dispersia (lărgirea impulsului) pe o distanţă $L$ se exprimă în termenii benzii de trecere ca $B = (\Delta\tau_0 L)^{-1}$, astfel în final avem

$$BL = (\Delta\tau_0)^{-1}\left[Hz \cdot Km\right] \tag{4.5.56}$$

În general dispersia $\widetilde{S} = d\tau_0/d\lambda$ poate avea două componente: dispersia de material (variaţia indicelui de refracţie cu frecvenţa) şi dispersia de mod. La materialele cele mai utilizate, $SiO_2$ şi $SiO_2$ dopat cu Ge dispersia de material, definită ca $\widetilde{S}_m = dn/d\omega = c_0\, dn/dk_0$ este minimă pentru lungimi de undă $\lambda_0 = 1{,}27 \div 1{,}55\,\mu m$. În cazul propagării monomod dispersia de mod este nesemnificativă. În sistemele actuale având $\lambda_0 = 1{,}3\,\mu m$ şi fibră din $SiO_2$ dopat cu Ge au fost obţinute dispersii minime; de exemplu pentru $\lambda_0 = 1{,}3\,\mu m$ şi lărgimea spectrului la sursă $\Delta\lambda_s = 10nm$ se obţine $BL \cong 5GHz \cdot km$.

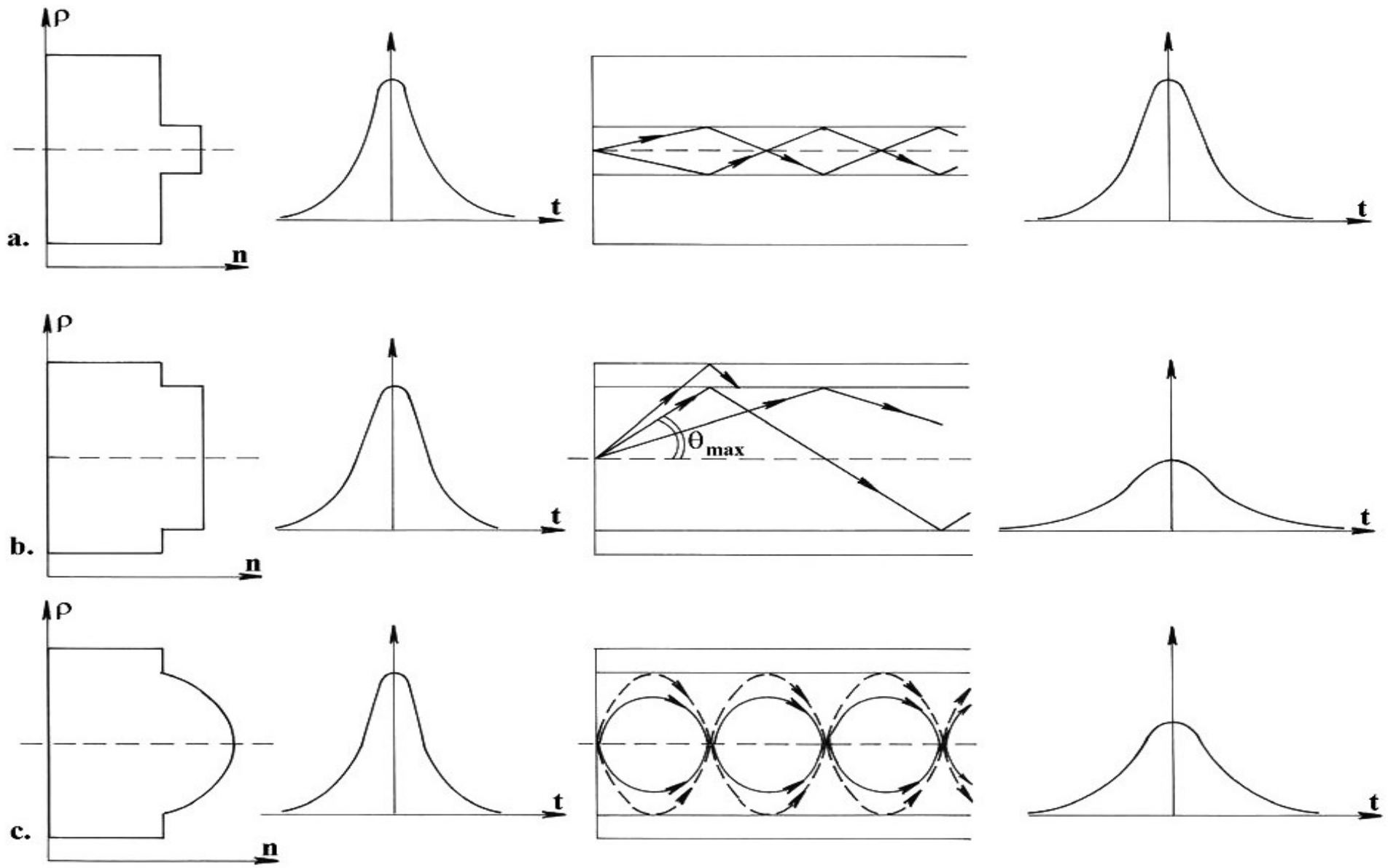



**Fig. 4.19. Propagarea în fibre optice: a - indice de refracție cu variație abruptă, propagare monomod; b - indice de refracție cu variație abruptă, propagare multimod; c - variație graduală a indicelui de refracție, propagare multimod**

b) *Propagarea multimod*. În acest caz dispersia totală va cuprinde dispersia de material şi dispersia intermodală. Ne oprim asupra dispersiei intermodale care este datorată faptului că diferite moduri de propagare au întârzieri de grup diferite. Referindu-ne la Fig. 4.19b se poate face o estimare asupra împrăştierii impulsului, ținând cont de diferența dintre timpii de propagare corespunzători razei cu parcursul cel mai mare, respectiv cu parcursul cel mai mic. Drumul razei cu parcurs minim poate fi redus la o linie dreaptă iar timpul de propagare pe direcția $z$ în lungul fibrei este $t_1 = z/v_{gr} = (n_1/c_0)z$. Raza cu parcurs maxim este cea care face unghiul maxim față de axa $z$, situație ce corespunde unghiului $\theta_i^*$ de reflexie totală la interfața miez – coroană cilindrică (Fig. 4.18); astfel se poate scrie

$$t_2 = \frac{l}{v_{gr}} = \frac{\left(z/\sin\theta_i^*\right)}{v_{gr}} = \frac{n_1^2}{c_0 n_2} z \tag{4.5.57}$$

în care s-a pus $\sin\theta_i^* = n_2/n_1$ (Cap. 9).

Lărgirea impulsului pe unitate de lungime (dispersia) este

$$\Delta\tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01} = \frac{n_1}{c_0}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)\Delta_n \tag{4.5.58}$$

unde $\Delta_n = (n_1 - n_2)/n_1$ (4.5.31).

**3°. Dispersia în fibrele optice cu variație graduală a indicelui de refracție.**

Propagarea în aceste fibre este de regulă de tip multimod (Fig. 4.19c); calculul exact al timpilor de propagare pe unitatea de lungime prin utilizarea unei expresii de tipul (4.5.33) pentru constanta de propagare $\beta$ presupune calcule laborioase [2]; timpul de întârziere pe unitatea de lungime $\tau_0$ este definit de relația (4.5.33). Pentru simplificare vom observa că lărgirea impulsului poate fi aproximată prin expresia

$$\Delta\tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01} = \tau_0\big|_{\beta=\beta_2} - \tau_0\big|_{\beta=\beta_1} \tag{4.5.59}$$

unde: $\beta_2 = k_0 n_2$, $\beta_1 = k_0 n_{10}$ reprezintă valoarea minimă, respectiv maximă a constantei de propagare; în general $k_0 n_0 < \beta < k_0 n_{10}$. Neglijând dispersia de material, în cazul variației pătratice a indicelui de refracție $n_1(\rho)$ (4.5.30), se poate scrie

$$\tau_0 = \frac{n_{10}\left[1 - \left(\rho/a^2\right)\Delta n\right]}{c_0\left[1 - 2\left(\rho/a^2\right)\Delta_n\right]^{1/2}} \tag{4.5.60}$$

Valoarea minimă se obține la $\rho = 0$, iar cea maximă la $\rho = a$; avem

$$\begin{aligned} \tau_0\big|_{\beta=\beta_1} &= \frac{n_{10}}{c_0} \\ \tau_0\big|_{\beta=\beta_2} &= \frac{n_{10}^2 + n_2^2}{2 n_2 c_0} \end{aligned} \tag{4.5.61}$$

Conform (4.5.59) rezultă

$$\Delta\tau_0 = \frac{n_{10}}{2c_0}\Delta_n^2 \tag{4.5.62}$$

Se observă că în cazul fibrelor cu variație graduală a indicelui de refracție dispersia (împrăştierea) pe unitatea de lungime este proporțională cu $\Delta_n^2$, prin urmare va fi mai mică decât la fibra cu variație abruptă a indicelui de refracție (propagarea multimod), unde dispersia este proporțională cu $\Delta_n$ (4.5.58).

## Bibliografie Capitolul 4


1. R.E. Collin „Field Theory of Guided Waves”, second edition, Oxford University Press (1991)
2. A. Ishimaru „Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering”, Prentice – Hall International Edition, N.Y. (1991)
3. D.M. Pozar „Microwave Engineering”, Addison Wesley, (1990)
4. M.H. Choudhury „Electromagnetism”, Ellis Horwood Ltd., J. Wiley and Sons, (1989)
5. D.H. Cheng „Field and Wave Electromagnetics”, Addison Wesley, N.Y., (1989)
6. A.M. Kuguşev, N.S. Golubeva „Osnovy radioelektroniki”, Energia, Moskva,(1969)
7. G. Rulea „Bazele teoretice şi experimentale ale tehnicii microundelor”, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, (1989)
8. Tatiana Rădulescu „Telecomunicații”, Teora, (1998)
9. Ed. Nicolau (coordonator) „Manualul inginerului electronist. Radiotehnica”, vol. 1, Ed. Tehnică, (1987)

# CAPITOLUL 5

# CAVITĂȚI REZONANTE ŞI REZONATOARE DIELECTRICE

## 5.1. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA SISTEMELOR ELECTROMAGNETICE REZONANTE

Prin sistem electromagnetic, în general se înțelege un ansamblu de medii metalice, dielectrice şi magnetice în care poate fi excitat un câmp electromagnetic. În categoria sistemelor rezonante de microunde şi de frecvență înaltă sunt incluse sisteme electromagnetice în care pot lua naştere oscilații cu *frecvențe proprii*, ca urmare a variațiilor rapide ale câmpului de excitație sau a unui parametru constructiv. În procesul de oscilații libere are loc schimbul periodic al energiilor înmagazinate în câmpul electric, respectiv în cel magnetic din interiorul sistemului; de asemenea, dacă sistemul are pierderi de energie, are loc o disipare treptată a unei fracțiuni din energia totală înmagazinată. Valorile frecvențelor proprii sunt determinate de parametrii cavității ($\varepsilon$, $\mu$, dimensiuni) şi de configurația câmpului (tipul de mod excitat).

Există mai multe tipuri de sisteme rezonante: cavități rezonante metalice de diferite forme, cu aer în interior sau umplute parțial cu medii având $\varepsilon_r \neq 1$ şi $\mu_r \neq 1$; rezonatoare dielectrice constituite din materiale dielectrice cu permitivitatea relativă mare $(\varepsilon_r \geq 10)$; structuri microstrip constituite din substraturi dielectrice mărginite cu folii metalice.

Cavitățile rezonante se utilizează pentru separarea frecvențelor dorite în sistemele de generare, amplificare, transmiterea şi recepția semnalelor de microunde şi de frecvențe înalte; de asemenea cavitățile rezonante se folosesc în instalațiile de măsurare ai unor parametri ai mediului sau ai materialelor, în acceleratoarele de particule etc. Dacă în cavități sunt excitate oscilații forțate are loc fenomenul de *rezonanță electrică*, atunci când frecvența semnalului de excitație coincide cu una din frecvențele proprii.

Referindu-ne la cavitățile metalice, acestea pot avea forme extrem de diverse; ele pot fi împărțite în două categorii: cavități formate din segmente de ghid metalic omogen, mărginite la capete tot cu pereți metalici; cavități de formă geometrică oarecare. Prima categorie poate fi studiată prin oricare din cele două metode disponibile: *metoda reflexiilor* şi *metoda generală* (tridimensională). În cazul metodei reflexiilor se pot folosi direct expresiile componentelor de câmp obținute în capitolul 2, însoțite de anumite condiții la limită pe pereții din capăt; metoda generală se bazează pe utilizarea ecuațiilor diferențiale Helmholtz complete (tridimensionale) şi condițiile la limită corespunzătoare. A doua categorie de cavități poate fi studiată numai prin metoda generală. În continuarea secțiunii se prezintă pe scurt principiile celor două tipuri de metode.

**1°. Metoda reflexiilor**

Se consideră o cavitate rezonantă formată dintr-un segment de ghid omogen, cu pereți metalici la capete (Fig. 5.1); secțiunea transversală poate fi dreptunghiulară sau circulară. Metoda reflexiilor este adecvată pentru înțelegerea proceselor fizice din cavitate. Într-adevăr, în urma introducerii semnalului prin fanta (apertura) $F_0$ din peretele $z = 0$, câmpul electromagnetic se propagă spre celălalt perete, $z = c$, unde este total reflectat (pentru simplitatea expunerii se consideră pereți ideali), urmând apoi reflexii succesive la pereții $z = 0$ şi $z = c$; în cavitate i-a naştere o *undă staționară*, rezultată prin suprapunerea undei incidente şi a celei reflectate. Se poate considera că la un moment dat în cavitate se propagă unde progresive în sensuri opuse; transportul de energie între pereții $z = 0$ şi $z = c$ are un caracter oscilant, iar sensul vectorului Poynting printr-un plan dat (de exemplu $z = c/2$) se schimbă la fiecare sfert de perioadă a variației câmpului electromagnetic, astfel frecvența de oscilație a vectorului Poynting este dublă față de frecvența câmpului de microunde.

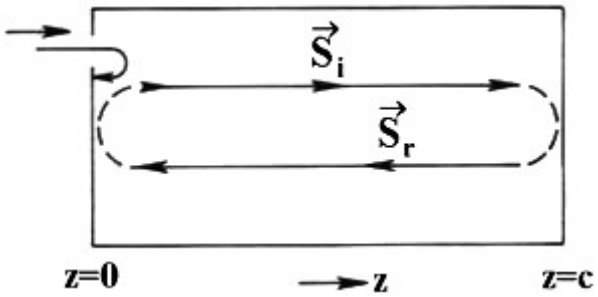



**Fig. 5.1. Ilustrarea metodei reflexiilor**

Câmpul electromagnetic din interiorul cavității poate fi descris prin expresiile generale

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) = Re\left\{\left[\vec{E}_i(\vec{\eta})e^{-\gamma z} + \vec{E}_r(\vec{\eta})e^{+\gamma z}\right]e^{j\omega t}\right\} \tag{5.1.1}$$

$$\vec{\mathscr{H}}(\vec{r},t) = Re\left\{\left[\vec{H}_i(\vec{\eta})e^{-\gamma z} + \vec{H}_r(\vec{\eta})e^{+\gamma z}\right]e^{j\omega t}\right\} \tag{5.1.2}$$

Condițiile la limită care se impun necesită ca pe pereții de capăt (desigur şi pe pereții laterali) componentele tangențiale ale câmpului electric să se anuleze în orice moment. Ne referim la câmpul electric într-un tronson de ghid ideal $\left(\gamma = +j\beta_g\right)$ şi scriem o relație similară cu (5.1.1), pentru componenta tangențială

$$\vec{\mathscr{E}}_T(\vec{r},t) = Re\left\{\left[\vec{E}_{iT}(\vec{\eta})e^{-j\beta_g z} + \vec{E}_{rT}(\vec{\eta})e^{+j\beta_g z}\right]e^{j\omega t}\right\} \tag{5.1.3}$$

Componentele tangențiale la pereții de capăt ale câmpului electric, incident şi reflectat, reprezintă tocmai componentele transversale calculate pentru ghidurile de undă; astfel sunt justificate notațiile $\vec{E}_{iT}(\vec{\eta})$ şi $\vec{E}_{rT}(\vec{\eta})$ din ultima relație. Mărimea din paranteza pătrată devine

$$\vec{E}_{RT}(\vec{r}) = \vec{E}_{iT}(\vec{\eta})e^{-j\beta_g z} + \vec{E}_{rT}(\vec{\eta})e^{+j\beta_g z} \tag{5.1.4}$$

unde $\vec{E}_{RT}(\vec{r})$ este câmpul electric rezultant (componentă tangențială) în orice punct din interiorul cavității. Punând condiția $\vec{E}_{RT}(\vec{r}) = 0$ la $z = 0$, din (5.1.4.) se obține $\vec{E}_{rT}(\vec{\eta}) = -\vec{E}_{iT}(\vec{\eta})$, astfel se poate scrie

$$\vec{E}_{RT}(\vec{r}) = -j2\vec{E}_{iT}(\vec{n})\sin\beta_g z \tag{5.1.5}$$

Acum, punând condiția $\vec{E}_{RT}(\vec{r}) = 0$ la $z = c$, se obține

$$\beta_g = \frac{p\pi}{c}, \qquad p = 1,2,3,... \tag{5.1.6}$$

astfel constanta de fază $\beta_g$ poate fi privită ca un număr de undă longitudinal. Ultima relație stabileşte faptul că distanța dintre planele ce delimitează segmentul de ghid trebuie să fie un multiplu de jumătăți de lungimi de undă; prin aceasta se delimitează un set de *frecvențe proprii* pentru care în cavitate poate exista câmp electromagnetic de o anumită configurație. Într-adevăr conform relației (2.2.36), în care punem $\gamma = j\beta_g$, se poate scrie

$$k_\lambda^2 + \beta_g^2 = k_r^2 = \omega_r^2\mu\varepsilon \tag{5.1.7}$$

din care se scoate frecvența de rezonanță şi lungimea de undă de rezonanță proprie

$$\omega_r = \frac{c_0}{(\varepsilon_1\mu_1)^{1/2}}\left[k_\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.1.8}$$

$$\lambda_r = \frac{2\pi}{\left[k_\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{5.1.9}$$

unde $c_0 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ este viteza luminii în spațiul liber. Numărul de undă transversal $k_\lambda$ depinde de dimensiunile şi forma geometrică a secțiunii transversale.

**2°. Metoda generală (tridimensională)**

Această metodă poate fi aplicată atât în cazul cavităților provenite din segmente de ghid omogen cât şi în cazul cavităților de formă geometrică neregulată. Pentru exemplificare se consideră o cavitate rezonantă paralelipipedică (Fig. 5.2) şi utilizăm ecuații Helmholtz scalare pentru fazorul scalar $\Psi(x,y,z)$. Trebuie subliniat că la o cavitate paralelipipedică având dimensiunile *a, b ,c* de valori apropiate, precizarea modului de oscilație poate deveni o problemă incertă; modul de oscilație este complet precizat numai dacă este specificat locul şi procedeul de excitare a cavității.

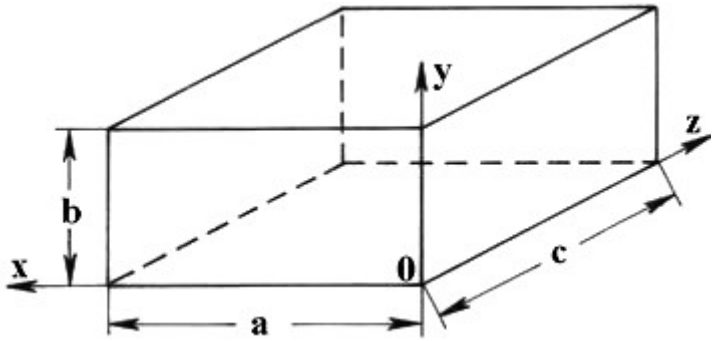



**Fig. 5.2. Cavitate rezonantă paralelipipedică**

Ecuația Helmholtz scalară omogenă în coordonate cartesiene, referitoare la mărimea $\Psi(x,y,z)$ este

$$\left[\nabla^2 + k_r^2\right]\Psi_c(x,y,z) = 0 \tag{5.1.10}$$

Pentru rezolvare se aplică metoda separării variabilelor, $\Psi_c(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$; procedând similar ca la ghidurile dreptunghiulare se obține

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_r^2 \tag{5.1.11}$$

Fiecare termen din această ecuație este constant şi independent de ceilalți; astfel (5.1.11) poate fi scrisă sub forma a trei ecuații independente

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0\,; \quad \frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0\,; \quad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \tag{5.1.12}$$

în care

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_r^2 \tag{5.1.13}$$

Având în vedere că $k_\lambda^2 = k_x^2 + k_y^2$ şi $k_z^2$ pot lua numai valori discrete rezultă că $k_r^2$ are semnificația unui număr de undă de rezonanță proprie. Relația (5.1.13) este compatibilă cu (2.2.36) în care se pune $\beta_g = k_z$, iar $k_z$ are valori discrete; astfel se poate scrie

$$k_x^2 + k_y^2 + \beta_g^2 = k_r^2 = \omega_r^2 \varepsilon\mu \tag{5.1.14}$$

în care $\omega_r$ este frecvența de rezonanță proprie a cavității.

Soluțiile ecuațiilor (5.1.12) au forma generală

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \\ Y(y) &= B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \\ Z(z) &= C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

Constantele de integrare se determină din condițiile la limită, care în cazul tridimensional sunt numite *condiții la limită mixte*. Aceste condiții pot fi împărțite în două categorii:

*A.* Dacă pe pereții laterali ai cavității se pun condițiile $\Psi_c = 0$ la $x = 0, a$ şi $y = 0, b$ (condiții de tip Dirichlet), atunci pe pereții de capăt se pune condiția $(\partial \Psi_c / \partial z) = 0$ la $z = 0, c$ (condiții de tip Neumann); se poate scrie

$$\Psi_c(x,y,z) = 0 \quad \text{pentru} \begin{cases} x = 0, x = a \\ y = 0, y = b \end{cases} \tag{5.1.16}$$

$$\frac{\partial \Psi_c(x,y,z)}{\partial z} = 0 \quad \text{pentru} \quad z = 0, z = c \tag{5.1.17}$$

Aplicând condițiile (5.1.16) expresiilor $X(x)$ şi $Y(y)$, se obțin expresii de forma (2.3.13); aplicând condiția (5.1.17) mărimii $Z(z)$ se obține $C_2 = 0$ şi

$$k_z = p\pi / c \tag{5.1.18}$$

Astfel soluția completă este

$$\Psi_c(\vec{r}) = \Psi_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{c}\right) \tag{5.1.19}$$

unde $\Psi_0 = A_2 B_2 C_1$ este o constantă care se determină din condițiile experimentale concrete: mod de excitare, cuplaje, disipație.

Numărul de undă total (de rezonanță) are valoarea

$$k_r^2 = k_{mnp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \tag{5.1.20}$$

cu: *m = 1,2,3...; n = 1,2,3...; p = 0,1,2,3...;* se observă că indicele *r* semnifică un set de valori *m, n, p,* care definesc moduri de oscilație existente în cavitate.

*B*. Dacă pentru pereții laterali ai cavității se pun condiții de tip Neumann, atunci pe pereții de capăt se vor utiliza condiții Dirichlet; explicitând se poate scrie

$$\frac{\partial \Psi_c(x,y,z)}{\partial x} = 0 \quad \text{pentru} \quad x = 0, x = a \tag{5.1.21}$$

$$\frac{\partial \Psi_c(x,y,z)}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru} \quad y = 0, y = b \tag{5.1.22}$$

$$\Psi_c(x,y,z) = 0 \quad \text{pentru} \quad z = 0, z = c \tag{5.1.23}$$

Aplicând condițiile (5.1.21) şi (5.1.22) expresiilor $X(x)$ şi $Y(y)$ se obțin expresii de forma (2.3.59); aplicând condiția (5.1.23) mărimii $Z(z)$ se obține $C_1 = 0$ şi $k_z = p\pi / c$. Astfel, soluția completă este

$$\Psi_c(\vec{r}) = \Psi_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{p\pi z}{c}\right) \tag{5.1.24}$$

în care: $\Psi_0 = A_1 B_1 C_2$; $m = 0,1,2,...; n = 0,1,2,3...; p =,1,2,3...;$ dar $m$ şi $n$ nu pot fi zero concomitent. Este locul de subliniat că alegerea grupului de *condiții mixte* pentru situații fizice concrete rămâne o problemă deschisă.

## 5.2. CAVITĂȚI REZONANTE PARALELIPIPEDICE

### 5.2.1. Moduri $TM_{mnp}$

În general procedura de clasificare a configurațiilor de câmp electromagnetic din cavitățile rezonante, în *moduri de oscilație* comportă un anumit grad de incertitudine; o configurație fizică dată poate fi descrisă prin vectori şi valori proprii diferite. Vom presupune la început moduri $TM$, în sensul că pe direcția $z$ nu sunt prezente componente de câmp magnetic. Considerăm cavitatea rezonantă paralelipipedică arătată în Fig. 5.2. Pentru determinarea expresiilor analitice ale diferitelor componente de câmp se foloseşte metoda tridimensională, astfel se pleacă de la ecuația Helmholtz scalară referitoare la componenta $E_z(x,y,z)$

$$\left[\nabla^2 + k_r^2\right]E_z(x,y,z) = 0 \tag{5.2.1}$$

pentru rezolvarea căreia se utilizează metoda clasică a separării variabilelor $E_z(x,y,z) = X_E(x)Y_E(y)Z_E(z)$; indicii $E$ ataşați mărimilor $X,Y,Z$ subliniază faptul că se referă la un câmp electric. Rezultă trei ecuații diferențiale independente, identice cu (5.1.8)

$$\frac{d^2X_E}{dx^2} + k_x^2 X_E = 0 \;;\quad \frac{d^2Y_E}{dy^2} + k_y^2 Y_E = 0 \;;\quad \frac{d^2Z_E}{dz^2} + k_z^2 Z_E = 0 \tag{5.2.2}$$

în care s-a notat

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_r^2 \tag{5.2.3}$$

Soluțiile ecuațiilor (5.2.2) sunt de forma

$$X_E(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \tag{5.2.4}$$

$$Y_E(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \tag{5.2.5}$$

$$Z_E(z) = C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z \tag{5.2.6}$$

Întrucât operăm cu o componentă de câmp electric, pentru pereții laterali sunt adecvate condiții la limită de tip Dirichlet iar pentru pereții de capăt sunt adecvate condiții Neumann. Într-adevăr, aplicând condiții Dirichlet soluțiilor (5.2.4) şi (5.2.5) se obțin expresii de forma (2.3.13); prin aplicarea condiției Neumann soluției (5.2.6), $(\partial Z_E(z)/\partial z = 0)$ la $z = 0$ şi $z = c$ se obține $C_2 = 0$ şi $k_z = p\pi/c$. Soluția completă pentru componenta longitudinală a câmpului electric este

$$E_z(x,y,z) = E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\cos\left(\frac{p\pi z}{c}\right) \tag{5.2.7}$$

unde $E_0 = A_2B_2C_1$ este o constantă (dimensiuni: $V/m$) care depinde de puterea de microunde injectată, dimensiunile geometrice ale cavității şi de *tipul de mod* (valori *m, n, p*).

Expresiile celorlalte componente $E_x, E_y, H_x, H_y$ pot fi găsite pe două căi: 1°- utilizarea rezultatelor obținute la studiul modurilor $TM$ în ghidurile metalice dreptunghiulare; 2°- utilizarea ecuațiilor Maxwell de evoluție. În această secțiune se va utiliza prima cale. Componentele $E_x$ şi $E_y$ se determină cu ajutorul relației (2.2.43) la care este necesară explicitarea mărimii $\gamma$; conform notațiilor (2.2.14) şi (2.2.15) se observă egalitatea $-\gamma = \partial/\partial z$. Astfel se poate scrie

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \hat{i}E_x + \hat{j}E_y = \frac{1}{k_\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla_T E_z\right] \tag{5.2.8}$$

Efectuând calculele rezultă

$$E_x(x,y,z) = -\frac{k_x k_z}{k_\lambda^2} E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) \tag{5.2.9}$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{k_y k_z}{k_\lambda^2} E_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) \tag{5.2.10}$$

Componentele $H_x$ şi $H_y$ se obțin prin utilizarea relațiilor (2.2.42) şi (2.2.43); avem (aerul din interiorul cavității este caracterizat prin parametrii $\varepsilon_0$ , $\mu_0$ )

$$\vec{H}_T(\vec{r}) = \hat{i}H_x + \hat{j}H_y = \frac{-j\omega_r\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times(\nabla_T E_z)\right] \tag{5.2.11}$$

din care rezultă

$$H_x(x,y,z) = \frac{j\omega_r\varepsilon_0 k_y}{k_\lambda^2} E_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z) \tag{5.2.12}$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{-j\omega_r\varepsilon_0 k_x}{k_\lambda^2} E_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z) \tag{5.2.13}$$

Numărul de undă de rezonanță $k_r$ determină o frecvență de rezonanță; avem

$$k_{mnp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2 \qquad \begin{matrix} m = 1,2,3,... \\ n = 1,2,3,... \\ p = 0,1,2,3,... \end{matrix} \tag{5.2.14}$$

$$\omega_r = \frac{k_{mnp}}{(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}} = \pi c_0\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.2.15}$$

şi $\lambda_r = 2\pi/k_{mnp}$ ; $c_0 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ este viteza luminii în spațiu liber; în general *m, n* şi *p* reprezintă numărul de jumătăți de lungimi de undă dispuse pe direcțiile *x, y* şi *z* în interiorul cavității.

În funcție de valorile discrete pe care le pot lua mărimile *m, n* şi *p*, se obțin diferite moduri *TM*, notate în general $TM_{mnp}$; pentru a înlătura orice confuzie asupra tipului de mod adesea se mai introduce un indice suplimentar *z* care defineşte transversalitatea în raport cu axa *z*; în aceste cazuri se va scrie $TM_{mnp}^{(z)}$.

### 5.2.2. Moduri $TE_{mnp}$

Componenta de câmp electric pe direcția z este zero; ecuația Helmholtz scalară omogenă se scrie pentru componenta $H_z(x,y,z)$

$$\left[\nabla^2 + k_r^2\right]H_z(x,y,z) = 0 \tag{5.2.16}$$

care se rezolvă prin metoda separării variabilelor $H_z(x,y,z) = X_H(x)Y_H(y)Z_H(z)$; indicele *H* se referă la un câmp magnetic.

Ecuația (5.2.16) se descompune în trei ecuații independente care au soluțiile

$$X_H(x) = A_3\cos k_x x + A_4 \sin k_x x \tag{5.2.17}$$

$$Y_H(y) = B_3\cos k_y y + B_4 \sin k_y y \tag{5.2.18}$$

$$Z_H(z) = C_3\cos k_z z + C_4 \sin k_z z \tag{5.2.19}$$

Întrucât se operează cu componenta de câmp magnetic pe pereții laterali sunt adecvate condiții la limită Neumann iar pe pereții din capăt condiții Dirichlet. Aplicând condiții Neumann soluțiilor $X_H(x)$ şi $Y_H(y)$ se obține expresii de forma (2.3.59); prin aplicarea condiției Dirichlet pe pereții de capăt se obține $C_3 = 0$ şi $k_z = p\pi/c$. Soluția completă pentru câmpul magnetic longitudinal este

$$H_z(x,y,z) = H_0 \cos(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) \tag{5.2.20}$$

unde $H_0 = A_3 B_3 C_4$ este o constantă (dimensiunea: *A/m*) care depinde de puterea injectată, tipul de cuplaj, dimensiuni geometrice, modul de oscilație (valorile *m, n* şi *p*).

Celelalte componente ale câmpului se determină prin utilizarea relațiilor (2.2.48), (2.2.49) şi ținând cont de egalitatea $-\gamma = \partial/\partial z$. Pentru componentele $H_x$ şi $H_y$ avem

$$\vec{H}_T(\vec{r}) = \hat{i}H_x + \hat{j}H_y = \frac{1}{k_\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla_T H_z\right] \tag{5.2.21}$$

din care rezultă

$$H_x(x,y,z) = -\frac{k_x k_z}{k_\lambda^2} H_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z) \tag{5.2.22}$$

$$H_y(x,y,z) = -\frac{k_y k_z}{k_\lambda^2} H_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z) \tag{5.2.23}$$

Componentele $E_x$ şi $E_y$ se determină din relația

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \hat{i}\vec{E}_x + \hat{j}\vec{E}_y = \frac{-j\omega_r\mu_0}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times(\nabla_T H_z)\right] \tag{5.2.24}$$

de unde scoatem

$$E_x(x,y,z) = \frac{j\omega_r\mu_0 k_y}{k_\lambda^2} H_0 \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z) \tag{5.2.25}$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{j\omega_r\mu_0 k_x}{k_\lambda^2} H_0 \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z) \tag{5.2.26}$$

Numărul total de undă $k_r = k_{mnp}$ are o expresie identică cu (5.2.14) însă: *m = 0, 1, 2, 3,...*; *n = 0, 1, 2, 3,...*; *p = 1, 2, 3,...*; *m* şi *n* nu pot fi concomitent zero. În funcție de valorile proprii *m, n, p* se obțin diferite moduri, notate sub formă generală $TE_{mnp}$; şi în cazul acestor moduri adesea se introduce indicele suplimentar *z* pentru a preciza transversalitatea în raport cu axa *z*; astfel în aceste cazuri se scrie $TE_{mnp}^{(z)}$.

### 5.2.3 Configurații de câmp ale unor moduri particulare în cavitățile paralelipipedice

**1°. Mod $TM_{110}$**

În scopul reprezentării unor configurații ale componentelor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ precum şi a curenților de conducție $(\vec{J}_{sf})$ este necesară cunoaşterea câmpurilor fizice (valori instantanee totale), astfel încât la un moment dat de timp să poată fi specificate fazele diferitelor componente. Câmpurile fizice se determină prin utilizarea relațiilor complete de forma (1.2.1) care, de exemplu pentru componenta $E_z$ ia forma

$$\mathscr{E}_z(\vec{r},t) = Re\left[E_z(\vec{r})e^{j\omega t}\right] \tag{5.2.27}$$

În cazul modului $TM_{110}$ avem

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_z(x,y,z,t) &= E_0 \sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)\cos\omega t \\ \mathscr{H}_x(x,y,z,t) &= H_{x0} \sin(\pi x/a)\cos(\pi y/b)\sin\omega t \\ \mathscr{H}_y(x,y,z,t) &= H_{y0} \cos(\pi x/a)\sin(\pi y/b)\sin\omega t \end{aligned} \qquad (5.2.28)$$

$$\mathscr{E}_x = 0, \quad \mathscr{E}_y = 0, \quad \mathscr{H}_z = 0$$

în care s-a notat $H_{x0} = \left(-\omega_r \varepsilon_0 k_y / k_\lambda^2\right) E_0$, $H_{y0} = \left(\omega_r \varepsilon_0 k_x / k_\lambda^2\right) E_0$. Aşa cum rezultă din (5.2.28) câmpurile $\mathscr{E}$ şi $\mathscr{H}$ sunt defazate în timp cu $\pi/2$, prin urmare valoarea medie a vectorului Poynting, este egală cu zero; de asemenea, ca urmare a acestui defazaj, reprezentarea câmpurilor *E* şi *H* se face la momente diferite de timp.

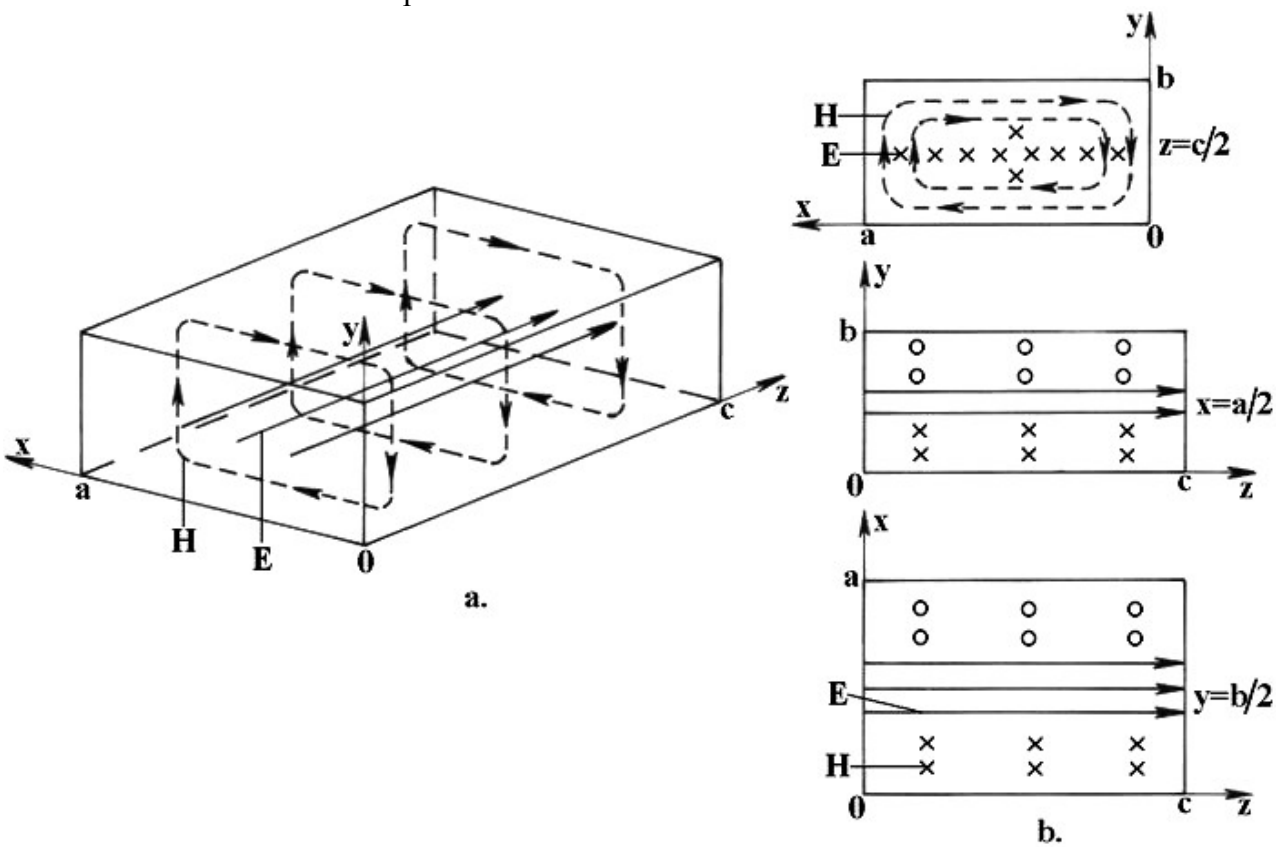



**Fig. 5.3. Configurații de câmp pentru modul dominant $TM_{110}$ în cavitatea paralelipipedică: a – vedere spațială; b – ilustrarea componentelor de câmp pe secțiuni**

Configurația spațială a câmpurilor *E* şi *H* este arătată în Fig. 5.3a; aceiaşi configurație este arătată în Fig. 5.3b prin secționări ale cavității. Deosebit de ilustrativă este variația amplitudinilor componentelor $E_z$, $H_x$ şi $H_y$ pe diferite axe (Fig. 5.4).

Trebuie subliniat că modul $TM_{110}$ reprezintă un *mod fundamental* (*dominant*), deoarece pentru dimensiuni *a, b, c* date lungimea de undă de rezonanță este maximă iar frecvența de rezonanță este minimă

$$\lambda_r = \lambda_{110E} = \frac{2ab}{\left[a^2 + b^2\right]^{1/2}} \qquad (5.2.29)$$

$$\omega_r = \omega_{110E} = \frac{\pi c_0}{ab}\left[a^2 + b^2\right]^{1/2} \tag{5.2.30}$$

indicele suplimentar *E* precizează că valorile respective se referă la un mod transversal magnetic.

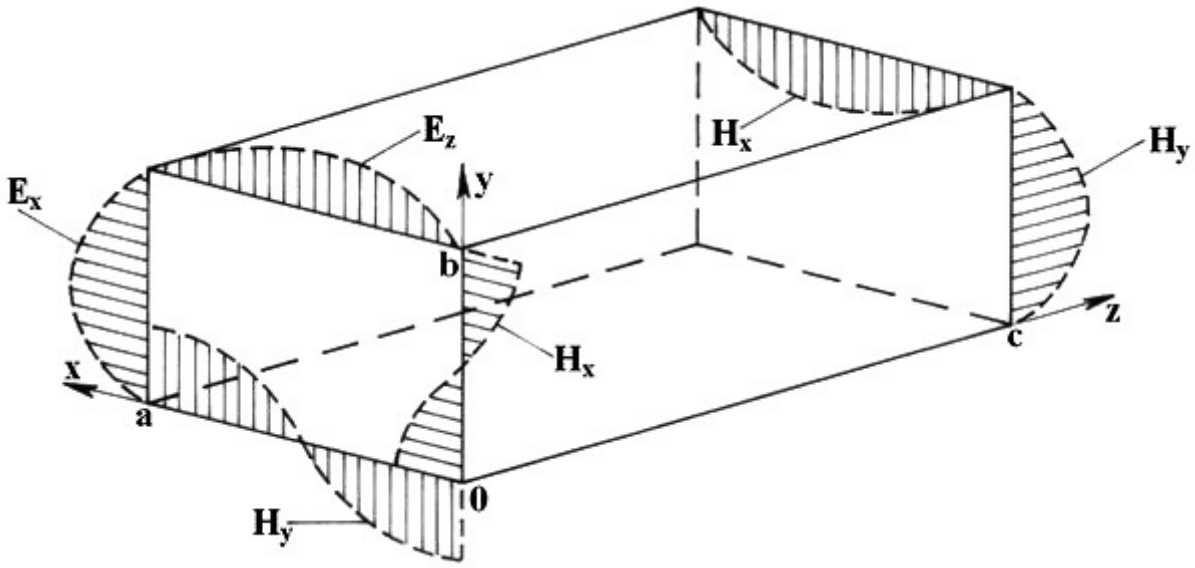



**Fig. 5.4. Mod $TM_{110}$, variații ale amplitudinilor componentelor**

**2°. Mod $TM_{111}$**

Procedând similar ca mai sus, pentru câmpurile fizice se obțin expresiile

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_z(x,y,z,t) &= E_0 \sin(\pi x/a)\sin(\pi y/b)\cos(\pi z/c)\cos\omega t \\
\mathscr{E}_x(x,y,z,t) &= E_{x0} \cos(\pi x/a)\sin(\pi y/b)\sin(\pi z/c)\cos\omega t \\
\mathscr{E}_y(x,y,z,t) &= E_{y0} \sin(\pi x/a)\cos(\pi y/b)\sin(\pi z/c)\cos\omega t \\
\mathscr{H}_x(x,y,z,t) &= H_{x0} \sin(\pi x/a)\cos(\pi y/b)\cos(\pi z/c)\sin\omega t \\
\mathscr{H}_y(x,y,z,t) &= H_{y0} \cos(\pi x/a)\sin(\pi y/b)\cos(\pi z/c)\sin\omega t
\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

unde: $E_{x0} = \left(-k_x k_z / k_\lambda^2\right)E_0$ , $E_{y0} = \left(-k_y k_z / k_\lambda^2\right)E_0$; $H_{x0}$ şi $H_{y0}$ au expresiile specificate la modul $TM_{110}$.

Configurația spațială de câmp este arătată în Fig. 5.5a; configurațiile bidimensionale obținute prin secționări ale cavității sunt arătate în Fig. 5.5b. Lungimea de undă $\lambda_r$ şi frecvența de rezonanță au expresiile

$$\lambda_r = \lambda_{111E} = \frac{2abc}{\left[a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right]^{1/2}} \tag{5.2.32}$$

$$\omega_r = \omega_{111E} = \frac{\pi c_0}{abc}\left[a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right]^{1/2} \tag{5.2.33}$$

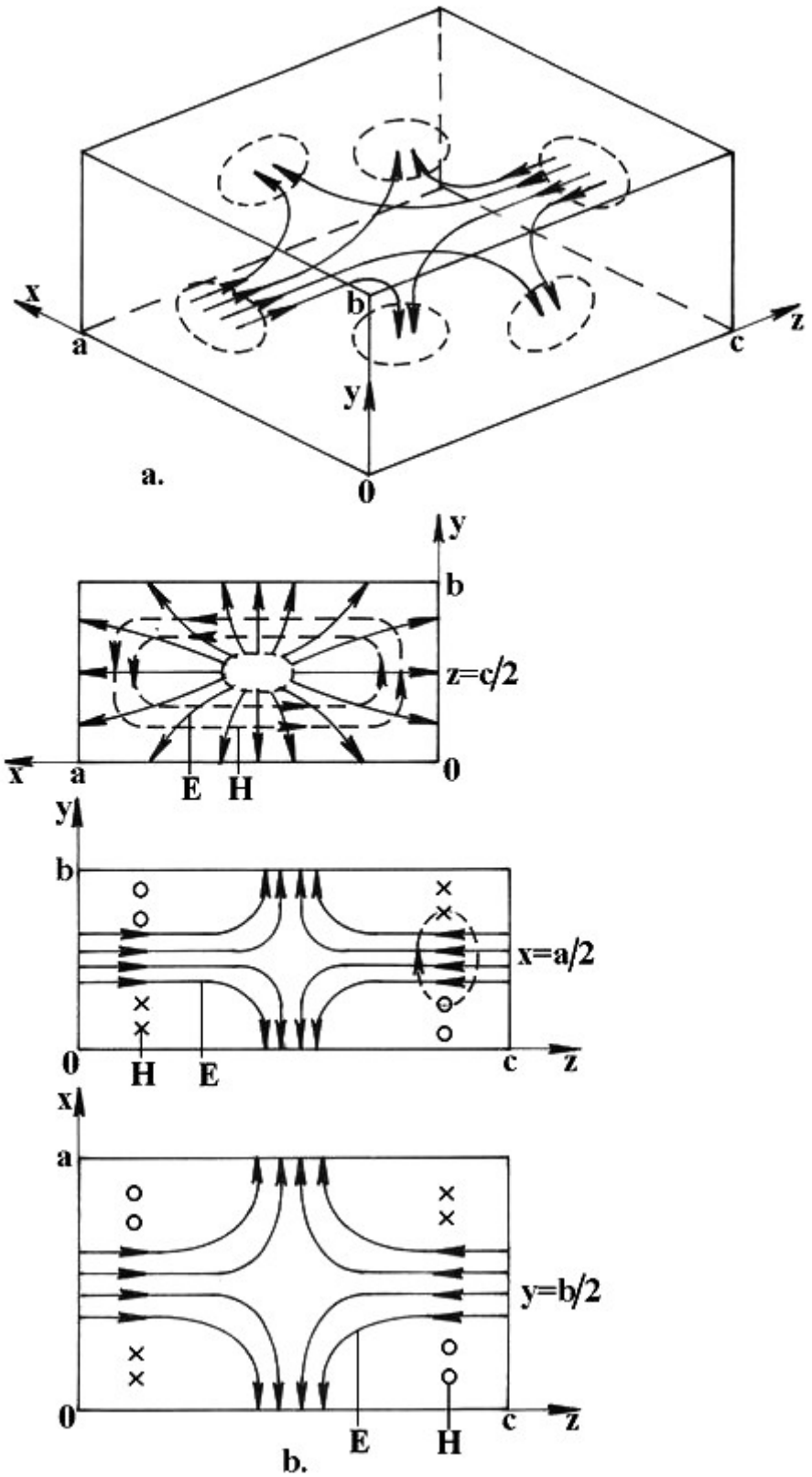



**Fig. 5.5. Configurații de câmp pentru modul $TM_{111}$ în cavitatea paralelipipedică:**
**a – vedere spațială a liniilor de câmp electric; b – configurații de câmp pe secțiuni ale cavității**

### 3°. Mod $TE_{101}$

Câmpurile fizice se obțin din expresiile componentelor $H_z$, $H_x$, $H_y$, $E_x$ şi $E_y$ în care punem $m = 1, n = 0, p = 1$; rezultă

$$\mathscr{H}_z(x,y,z,t) = H_0\cos(\pi x/a)\sin(\pi z/c)\cos\omega t$$
$$\mathscr{H}_x(x,y,z,t) = H_{x0}\sin(\pi x/a)\cos(\pi z/c)\cos\omega t \qquad (5.2.34)$$
$$\mathscr{E}_y(x,y,z,t) = E_{y0}\sin(\pi x/a)\sin(\pi z/c)\sin\omega t$$

unde: $H_{x0} = \left(-k_x k_z / k_\lambda^2\right)H_0$, $E_{y0} = \left(\omega_r \mu_0 k_x / k_\lambda^2\right)H_0$.

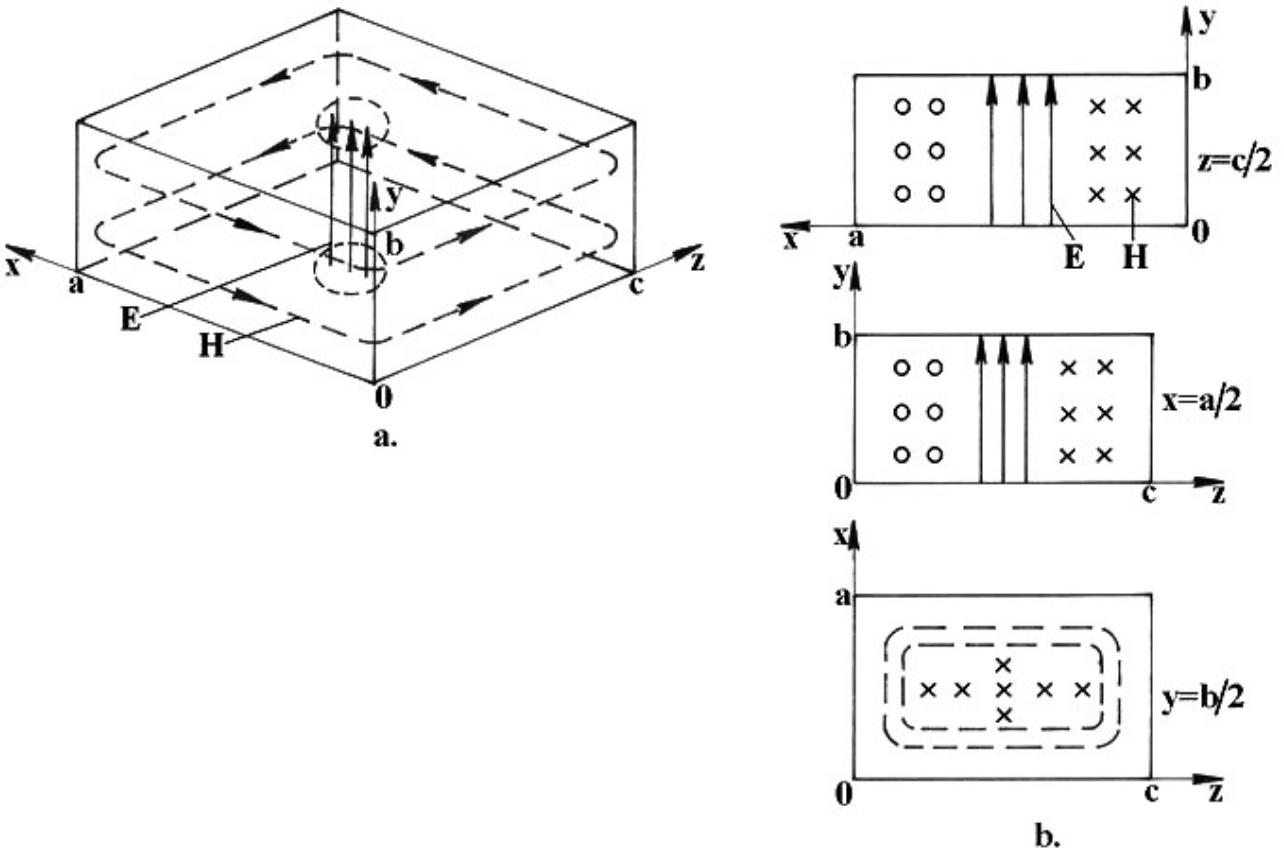



**Fig. 5.6. Configurații de câmp pentru modul $TE_{101}$ în cavitatea paralelipipedică: a – vedere spațială; b – configurații de câmp pe secțiuni ale cavității**

Configurația spațială de câmp este arătată în Fig. 5.6a iar configurațiile bidimensionale obținute prin secționări ale cavității sunt arătate în Fig. 5.6b. Modul $TE_{101}$ este considerat un *mod fundamental* deoarece frecvența de rezonanță are valoarea minimă

$$\omega_r = \omega_{101H} = \frac{\pi c_0}{ac}\left[a^2 + c^2\right]^{1/2} \qquad (5.2.35)$$

$\lambda_r = \lambda_{101H} = \left(2ac/\left(a^2 + c^2\right)^{1/2}\right)$; indicele $H$ se referă la un mod transversal electric.

**4°. Mod *$TE_{011}$***

Câmpurile fizice au expresiile

$$\mathscr{H}_z(x,y,z,t) = H_0\cos(\pi y/b)\sin(\pi z/c)\cos\omega t$$
$$\mathscr{H}_y(x,y,z,t) = H_{y0}\sin(\pi y/b)\cos(\pi z/c)\sin\omega t \qquad (5.2.36)$$
$$\mathscr{E}_x(x,y,z,t) = E_{x0}\sin(\pi y/b)\sin(\pi z/c)\sin\omega t$$

în care $H_{y0} = \left(-k_y k_z / k_\lambda^2\right)H_0$, $E_{x0} = \left(\omega_r \mu_0 k_y / k_\lambda^2\right)H_0$.

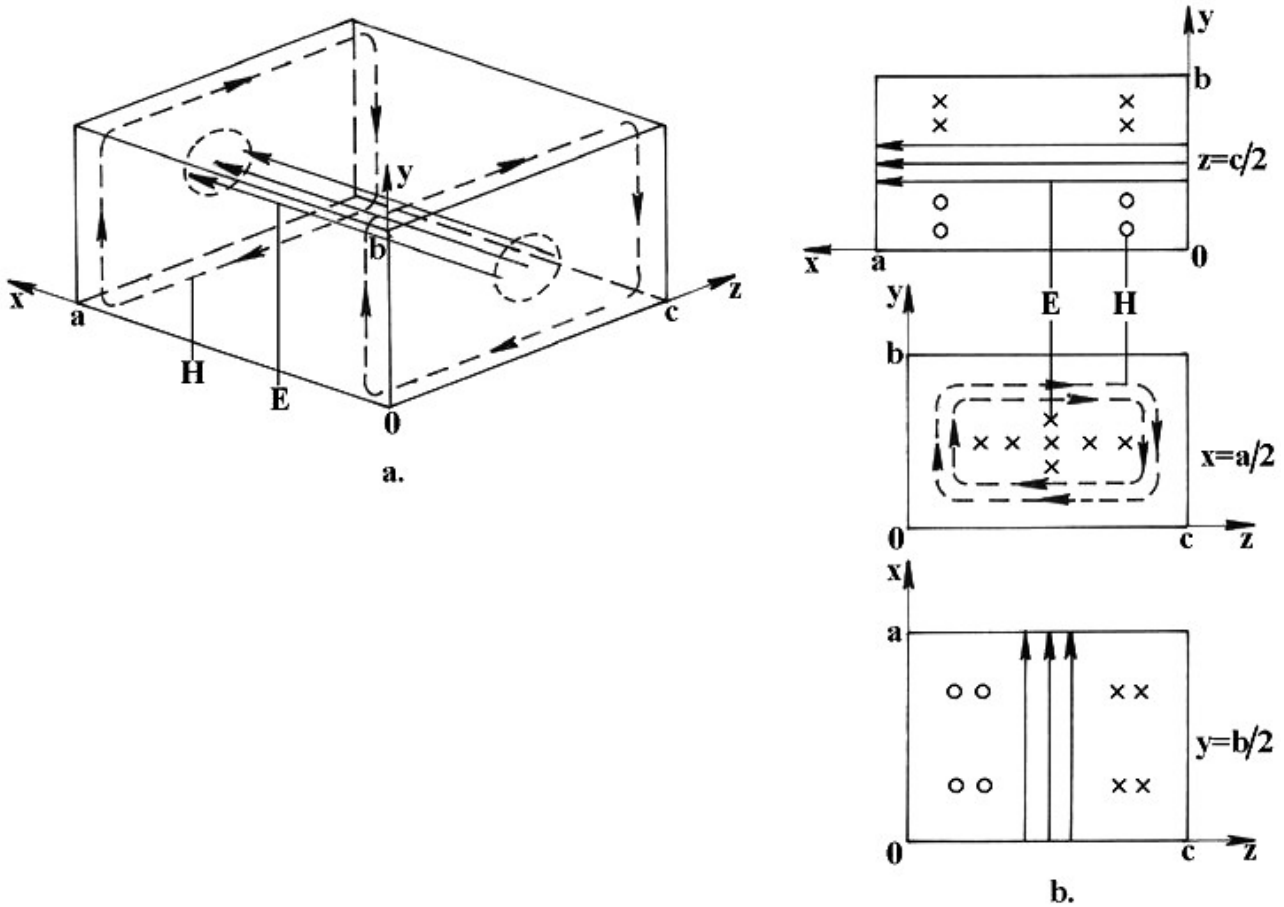



**Fig. 5.7. Configurații de câmp pentru modul $TE_{011}$ în cavitatea paralelipipedică: a – vedere spațială; b – configurații de câmp pe secțiuni ale cavității**

Configurația spațială de câmp este arătată în Fig. 5.7a; configurațiile bidimensionale obținute prin secționări sunt arătate în Fig. 5.7b. Frecvența de rezonanță este

$$\omega_r = \omega_{011H} = \frac{\pi c_0}{bc}\left[b^2 + c^2\right]^{1/2} \tag{5.2.37}$$

*Observații*. În încheierea secțiunii sunt utile câteva observații.

**1°. Moduri degenerate**. Din figurile 5.3a, 5.6a şi 5.7a se observă că configurațiile spațiale de câmp electromagnetic ale modurilor $TM_{110}$, $TE_{101}$ şi $TE_{011}$ pot fi considerate identice; este suficient să efectuăm rotiri adecvate ale sistemului de coordonate, astfel încât vectorul $\vec{E}$ să conserve direcția, aşa cum se arată în Fig. 5.8. Dacă şi dimensiunile a, b, c ale cavității sunt de valori apropiate, este posibil ca şi frecvențele de rezonanță date de expresiile (5.2.30), (5.2.35) şi (5.2.37) să aibă aceiaşi valoare; modurile $TM_{mnp}$ şi $TE_{mnp}$ care au aceleaşi frecvențe de rezonanță proprie se numesc moduri degenerate.

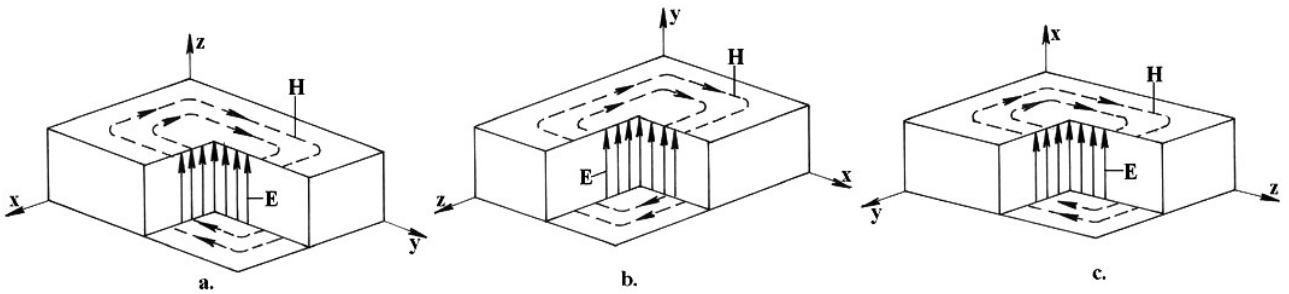



**Fig. 5.8. Ilustrarea modurilor degenerate în cavitățile paralelipipedice, vectorul $\vec{E}$ conservă direcția: a – $TM_{110}$; b – $TE_{101}$; c – $TE_{011}$**

**2°. Paralelă cu ghidurile de undă**. a – În ghidurile de undă au loc fenomene de propagare şi se transmite *putere reală*; în cavitatea rezonantă au loc fenomene de oscilaţie şi în unda staţionară se înmagazinează *energie reactivă*. b – În ghidul de undă uniform componentele transversale (câmpuri fizice) sunt toate în fază, dar defazate în timp cu $\pi/2$ faţă de componenta longitudinală. În cavitatea rezonantă componentele de aceiaşi natură (de exemplu *H*) sunt toate în fază, dar defazate în timp cu $\pi/2$ faţă de celelalte componente (*E* în exemplul considerat); acest fapt rezultă din compararea expresiilor câmpurilor fizice din cavitate pentru un mod dat. Prin urmare în cavitate există momente când este prezent numai câmpul magnetic *H* iar după intervalul $t = T/4$ este prezent numai câmpul electric *E*. Dacă se admite o cavitate cu pierderi neglijabile atunci energia electromagnetică este înmagazinată succesiv în câmpul magnetic, respectiv în cel electric; condiţia $W_H = W_E$ poate fi privită ca o condiţie de rezonanţă.

## 5.3. CAVITĂȚI REZONANTE CILINDRICE

Cavităţile metalice cilindrice sunt utilizate larg în echipamentele de laborator şi în sistemele de acord al diferitelor instalaţii de emisie-recepţie în domeniul microundelor. Faţă de cavităţile paralelipipedice au două particularităţi: acordul mecanic se realizează mult mai uşor; pentru anumite moduri de oscilaţie se pot obţine valori ridicate ale factorului de calitate.

### 5.3.1. Moduri $TE_{nmp}$ în cavităţi rezonante cilindrice

Pentru determinarea expresiilor componentelor de câmp se foloseşte metoda tridimensională. Ne referim la cavitatea rezonantă cilindrică prezentată în Fig. 5.9. Ecuaţia Helmholtz scalară tridimensională, în coordonate cilindrice $(\rho,\phi,z)$ pentru componenta axială $H_z(\rho,\phi,z)$ are forma generală

$$\left[\nabla^2 + k_r^2\right] H_z(\rho,\phi,z) = 0 \tag{5.3.1}$$

unde laplaceanul $\nabla^2$ are expresia

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{5.3.2}$$

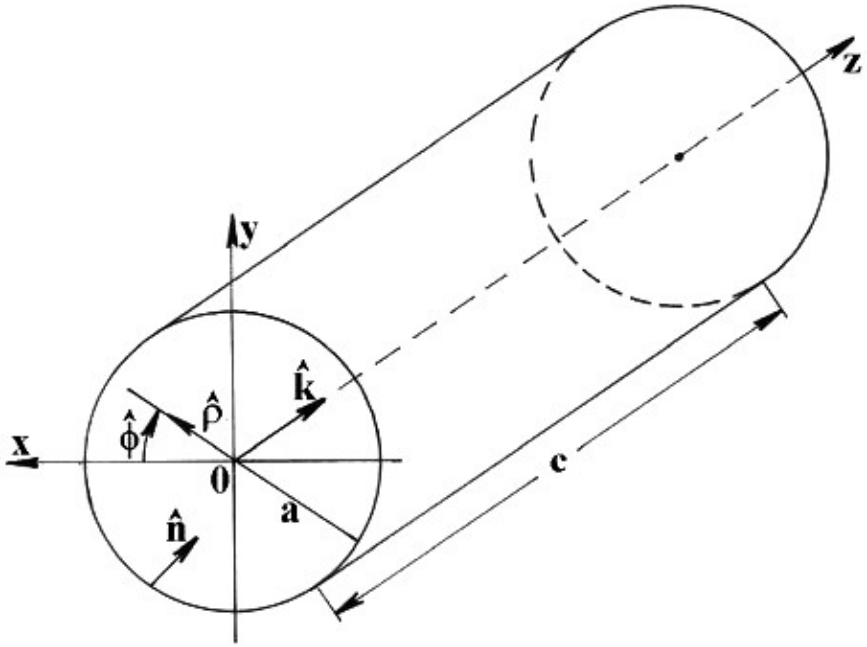



**Fig. 5.9. Cavitate rezonantă cilindrică**

Pentru rezolvare se aplică metoda separării variabilelor $H_z(\rho,\phi,z)=R_H(\rho)\Psi_H(\phi)Z_H(z)$, unde indicii H specifică faptul că se referă la o componentă de câmp magnetic; astfel ecuația (5.3.1) poate fi scrisă

$$\frac{1}{R_H}\left[\frac{d^2R_H}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR_H}{d\rho}\right]+\frac{1}{\rho^2\Psi_H}\frac{d^2\Psi_H}{d\phi^2}+\frac{1}{Z_H}\frac{d^2Z_H}{dz^2}=-k_r^2 \tag{5.3.3}$$

Condițiile la limită mixte pentru componenta $H_z(\rho,\phi,z)$ pot fi detaliate după cum urmează: pe pereții laterali se aplică condiții de tip Neumann iar pe pereții de capăt se aplică condiții de tip Dirichlet. Ecuația (5.3.3) poate fi separată în trei ecuații independente. Ne oprim întâi asupra ecuației

$$\frac{d^2Z_H(z)}{dz^2}+k_z^2Z_H(z)=0 \tag{5.3.4}$$

Scriem soluția sub forma

$$Z_H(z)=A_1\cos k_z z+A_2\sin k_z z \tag{5.3.5}$$

Punând condiția Dirichlet $Z_H(z)=0$ la z = 0 şi z = c se obține $A_1=0$ şi

$$k_z=p\pi/c,\quad p=1,2,3,... \tag{5.3.6}$$

Primii doi termeni din ecuația (5.3.3) formează o ecuație identică cu (2.4.8), astfel se poate scrie

$$\frac{d^2\Psi_H(\phi)}{d\phi^2}+n^2\Psi_H(\phi)=0 \tag{5.3.7}$$

$$\rho^2\frac{d^2R_H(\rho)}{d\rho^2}+\rho\frac{dR_H(\rho)}{d\rho}+\left(\rho^2k_\lambda^2-n^2\right)R_H(\rho)=0 \tag{5.3.8}$$

Ținând cont de soluțiile găsite în Cap. 2 la studiul modurilor *TE* în ghidul metalic cilindric, anume

$$\Psi_H(\phi)=\Psi_0\cos n\phi \tag{5.3.9}$$

$$R_H(\rho)=B_1J_n(k_\lambda\rho) \tag{5.3.10}$$

expresia completă a componentei $H_z(\rho,\phi,z)$ este

$$H_z(\rho,\phi,z)=H_0J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi\sin(p\pi z/c) \tag{5.3.11}$$

unde $H_0=B_1\Psi_0A_2$ este o constantă determinată de puterea injectată, dimensiunile cavității şi tipul de mod excitat.

Expresiile componentelor $H_\rho$, $H_\phi$, $E_\rho$ şi $E_\phi$ pot fi determinate prin utilizarea relațiilor (2.2.48) şi (2.2.49) în care se va pune $-\gamma=\partial/\partial z$. Pentru componentele de câmp magnetic se poate scrie

$$\vec{H}_T(\vec{r})=\hat{\rho}H_\rho+\hat{\phi}H_\phi=\frac{1}{k_\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla_T H_z(\rho,\phi,z)\right] \tag{5.3.12}$$

unde operatorul $\nabla_T$ în coordonate cilindrice are expresia (2.4.3). Se obține

$$H_\rho(\rho,\phi,z)=\frac{k_z}{k_\lambda}H_0J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi\cos(k_z z) \tag{5.3.13}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z)=-\frac{k_z}{k_\lambda^2\rho}nH_0J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi\cos(k_z z) \tag{5.3.14}$$

Pentru componentele de câmp electric avem

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \hat{\rho}E_\rho + \hat{\phi}E_\phi = \frac{-j\omega_r\mu_0}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times(\nabla_T H_z(\rho,\phi,z))\right] \tag{5.3.15}$$

de unde rezultă

$$E_\rho(\rho,\phi,z) = \frac{j\omega_r\mu_0}{k_\lambda^2\rho} nH_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi \sin(k_z z) \tag{5.3.16}$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z) = \frac{j\omega_r\mu_0}{k_\lambda} H_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi \sin(k_z z) \tag{5.3.17}$$

Condiția la limită Neumann pentru pereții laterali de tipul $(\partial H_z/\partial\rho)=0$ la $\rho=a$ se particularizează prin

$$E_\phi(\rho,\phi,z)\big|_{\rho=a} = 0 \tag{5.3.18}$$

adică

$$J_n'(k_\lambda a) = 0 \tag{5.3.19}$$

ale cărei soluții $\rho'_{nm} = k_\lambda a$ sunt date în Tabelul 2.1.

Este util să determinăm valorile proprii ale numărului de undă total (de rezonanță) $k_r$; având în vedere că numărul de undă transversal este determinat de rădăcinile derivatei funcției Bessel de speța întâia şi ordin *n*, $k_\lambda = \rho'_{nm}/a$, se poate scrie

$$k_r^2 = (\rho'_{nm}/a)^2 + k_z^2 \tag{5.3.20}$$

astfel lungimea de undă de rezonanță şi frecvența de rezonanță au expresiile

$$\lambda_r = \lambda_{nmp} = 2\pi\left[(\rho'_{nm}/a)^2 + (p\pi/c)^2\right]^{-1/2} \tag{5.3.21}$$

$$\omega_r = \omega_{nmp} = c_0\left[(\rho'_{nm}/a)^2 + (p\pi/c)^2\right]^{1/2} \tag{5.3.22}$$

*n = 0, 1, 2,...; m, p = 1, 2, 3,...*

Semnificația valorilor proprii *n, m, p* este următoarea: *n* este un număr întreg de lungimi de undă ale componentelor câmpului electromagnetic în lungul coordonatei unghiulare $\phi$; *m* şi *p* reprezintă numărul de jumătăți de lungimi de undă ale câmpului în lungul coordonatei radiale $\rho$, respectiv a celei axiale *z*.

### 5.3.2. Moduri $TM_{nmp}$ în cavitățile rezonante cilindrice

Ecuația Helmholtz scalară omogenă în coordonate cilindrice pentru componenta $E_z(\rho,\phi,z)$ este

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r^2\right] E_z(\rho,\phi,z) = 0 \tag{5.3.23}$$

Condițiile la limită mixte sunt: Dirichlet pe pereții laterali şi Neumann pe pereții de capăt. Aplicând metoda separării variabilelor, şi procedând similar ca la modul $TE_{nmp}$ se obține

$$E_z(\rho,\phi,z) = E_0 J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi\cos(p\pi z/c) \tag{5.3.24}$$

Expresiile componentelor $E_\rho$, $E_\phi$, $H_\rho$ şi $H_\phi$ se determină prin utilizarea relațiilor (2.2.42) şi (2.2.43) în care se ține seama de egalitatea $-\gamma = \partial/\partial z$

$$\vec{E}_T(\vec{r}) = \hat{\rho}E_\rho + \hat{\phi}E_\phi = \frac{1}{k_\lambda^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla_T E_z(\rho,\phi,z)\right] \tag{5.3.25}$$

$$\vec{H}_T(\vec{r}) = \hat{\rho}H_\rho + \hat{\phi}H_\phi = \frac{-j\omega_r\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times\left(\nabla_T E_z(\rho,\phi,z)\right)\right] \tag{5.3.26}$$

Se obține succesiv

$$E_\rho(\rho,\phi,z) = -\frac{k_z}{k_\lambda}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi\sin(k_z z) \tag{5.3.27}$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z) = \frac{k_z}{k_\lambda^2}\frac{n}{\rho}E_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi\sin(k_z z) \tag{5.3.28}$$

$$H_\rho(\rho,\phi,z) = \frac{-j\omega_r\varepsilon_0}{k_\lambda^2}\frac{n}{\rho}E_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi\cos(k_z z) \tag{5.3.29}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z) = \frac{-j\omega_r\varepsilon_0}{k_\lambda}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi\cos(k_z z) \tag{5.3.30}$$

Din condiția Dirichlet pentru pereții laterali se determină valorile proprii ale numărului de undă transversal; această condiție poate fi exprimată ca

$$E_z(\rho,\phi,z)\big|_{\rho=a} = 0 \tag{5.3.31}$$

astfel din (5.3.24) rezultă

$$J_n(k_\lambda a) = 0 \tag{5.3.32}$$

ale cărei soluții $\rho_{nm} = k_\lambda a$ sunt date în Tabelul 2.1. Numărul de undă transversal este $k_\lambda = \rho_{nm}/a$ iar numărul de undă total (de rezonanță) este

$$k_r^2 = (\rho_{nm}/a)^2 + k_z^2 \tag{5.3.33}$$

Lungimea de undă de rezonanță şi frecvența de rezonanță au expresiile

$$\lambda_r = \lambda_{nmp} = 2\pi\left[(\rho_{nm}/a)^2 + (p\pi/c)^2\right]^{-1/2} \tag{5.3.34}$$

$$\omega_r = \omega_{nmp} = c_0\left[(\rho_{nm}/a)^2 + (p\pi/c)^2\right]^{1/2} \tag{5.3.35}$$

### 5.3.3. Configurații de câmp ale unor moduri particulare în cavitățile cilindrice

#### 1°. Mod $TE_{111}$

Este un *mod fundamental* (*dominant*) deoarece rădăcina $\rho'_{11} = 1{,}841$ are valoarea minimă; lungimea de undă de rezonanță este maximă iar frecvența de rezonanță are valoarea minimă. Expresiile câmpurilor fizice se obțin din (5.3.11), (5.3.13), (5.3.14), (5.3.16) şi (5.3.17) în care punem *n = 1, m = 1, p = 1*, prin aplicarea unei relații de forma (5.2.27). Avem

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_z(\rho,\phi,z,t) &= H_0 J_1(\rho'_{11}\rho/a)\cos\phi\sin(\pi z/c)\cos\omega t \\
\mathscr{H}_\rho(\rho,\phi,z,t) &= H_{\rho 0} J_1'(\rho'_{11}\rho/a)\cos\phi\cos(\pi z/c)\cos\omega t \\
\mathscr{H}_\phi(\rho,\phi,z,t) &= H_{\phi 0}\frac{J_1(\rho'_{11}\rho/a)}{(\rho'_{11}\rho/a)\rho}\sin\phi\cos(\pi z/c)\cos\omega t \\
\mathscr{E}_\rho(\rho,\phi,z,t) &= E_{\rho 0}\frac{J_1(\rho'_{11}\rho/a)}{(\rho'_{11}\rho/a)\rho}\sin\phi\sin(\pi z/c)\sin\omega t \\
\mathscr{E}_\phi(\rho,\phi,z,t) &= E_{\phi 0} J_1'(\rho'_{11}\rho/a)\cos\phi\sin(\pi z/c)\sin\omega t
\end{aligned} \tag{5.3.36}$$

în care s-a notat: $H_{\rho 0} = -H_{\phi 0} = (\pi a / c_0 \rho'_{11}) H_0$; $E_{\rho 0} = E_{\phi 0} = (-\omega_{111H} \mu_0 a / \rho'_{11}) H_0$.

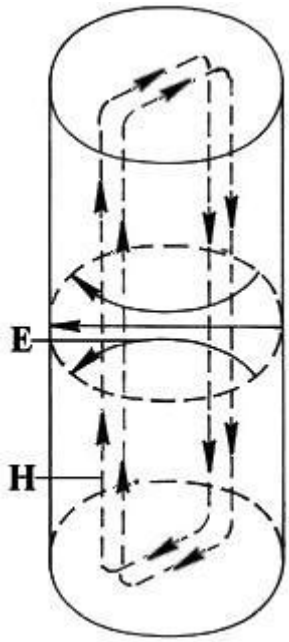



**Fig. 5.10. Modul dominant $TE_{111}$ în cavitatea rezonantă cilindrică, vedere spațială**

Configurația spațială de câmp este arătată în Fig. 5.10; configurațiile obținute prin secționări ale cavității pe diferite plane sunt reprezentate în Fig. 5.11; componentele E sunt reprezentate la momente diferite față de componentele H.

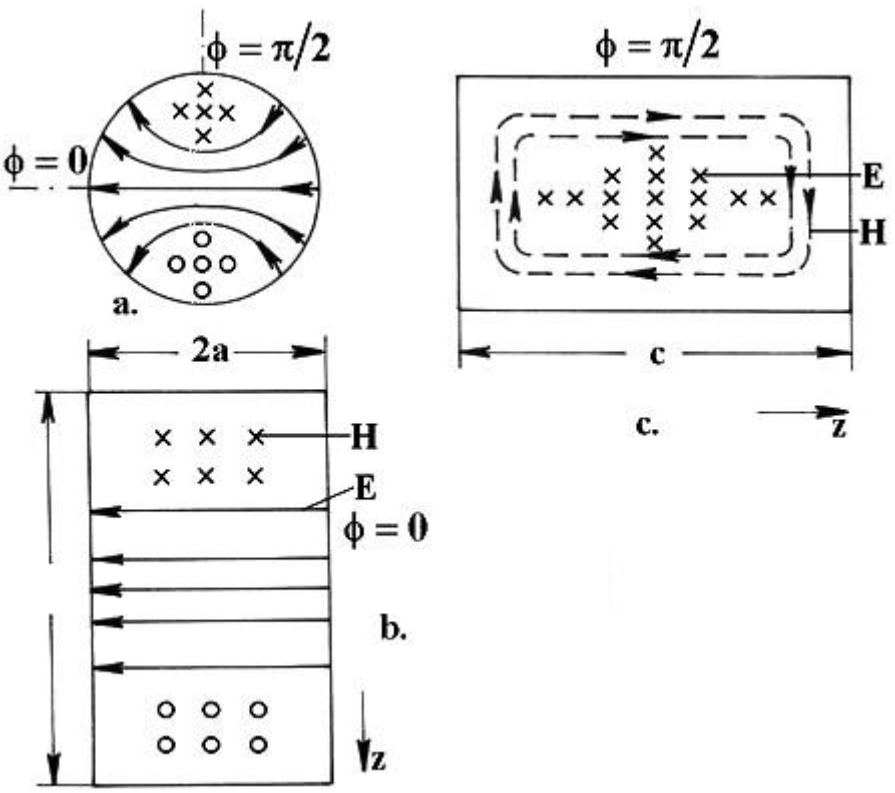



**Fig. 5.11. Configurații de câmp pe secțiuni ale modului dominant $TE_{111}$ în cavitatea cilindrică: a – secțiune transversală; b – secțiune longitudinală, $\phi = 0$ ; c – secțiune longitudinală, $\phi = \pi/2$ ;**

**2°. Mod $TE_{011}$**

Acest mod nu este fundamental deoarece rădăcina $\rho'_{01} = 3{,}832$ nu este minimă; însă cavitățile cilindrice în care se excită moduri $TE_{01p}$, cu $p$ = *1-20*, sunt larg răspândite în echipamentele de măsurare deoarece pentru aceste moduri factorii de calitate au valorile cele mai ridicate. Întrucât pe pereții laterali $(\rho = a)$ lipsesc curenții $\vec{J}_{sf}$ longitudinali iar pe pereții de capăt $(z = 0,\, c)$ lipsesc curenții $\vec{J}_{sf}$ radiali, există posibilitatea ca unul din pereții de capăt să fie realizat sub forma de piston mobil, fără contact direct cu pereții, fapt ce permite un acord mecanic în limite largi. Expresiile câmpurilor fizice sunt

$$\mathscr{H}_z(\rho,\phi,z,t) = H_0 J_0(\rho'_{01}\rho/a)\sin(\pi z/c)\cos\omega t$$

$$\mathscr{H}_\rho(\rho,\phi,z,t) = H_{\rho 0} J'_0(\rho'_{01}\rho/a)\cos(\pi z/c)\cos\omega t \qquad (5.3.37)$$

$$\mathscr{E}_\phi(\rho,\phi,z,t) = E_{\phi 0} J'_0(\rho'_{01}\rho/a)\sin(\pi z/c)\sin\omega t$$

unde s-a notat: $H_{\rho 0} = (\pi a/c_0\rho'_{01})H_0$; $E_{\phi 0} = \left(-\omega_{011H}\mu_0 a/\rho'_{01}\right)H_0$.

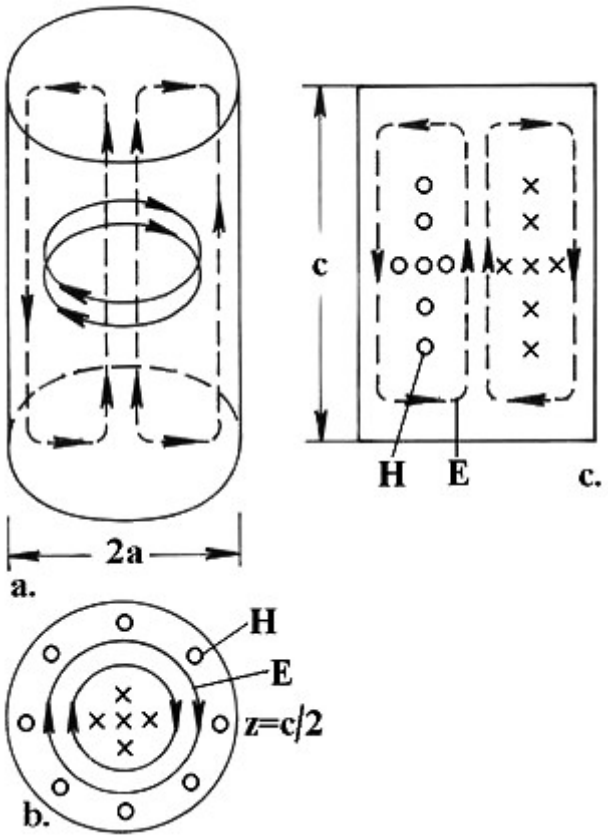



**Fig. 5.12. Modul $TE_{011}$ în cavitatea rezonantă cilindrică; a – vedere de ansamblu; b – secțiune transversală; c – secțiune longitudinală**

Configurația de câmp electromagnetic corespunzătoare modului $TE_{011}$ în cavitatea cilindrică este arătată în Fig. 5.12; ca urmare a simetriei axiale a liniilor de câmp electric şi magnetic au fost suficiente numai două secționări ale cavității: una transversală la $z = c/2$ (Fig. 5.12b) şi una longitudinală (Fig. 5.12c).

**3°. Mod $TM_{010}$**

Este un mod *fundamental* (*dominant*) deoarece rădăcina $\rho_{01} = 2{,}405$ are valoarea minimă (Tabelul 2.1). Câmpurile fizice au expresiile

$$\mathscr{E}_z(\rho,\phi,z,t) = E_0 J_0(\rho_{01}\rho/a)\cos\omega t$$

$$\mathscr{H}_\phi(\rho,\phi,z,t) = H_{\phi 0} J_0'(\rho_{01}\rho/a)\sin\omega t \tag{5.3.38}$$

unde $H_{\phi 0} = (\omega_{010E}\varepsilon_0 a/\rho_{01})E_0$.

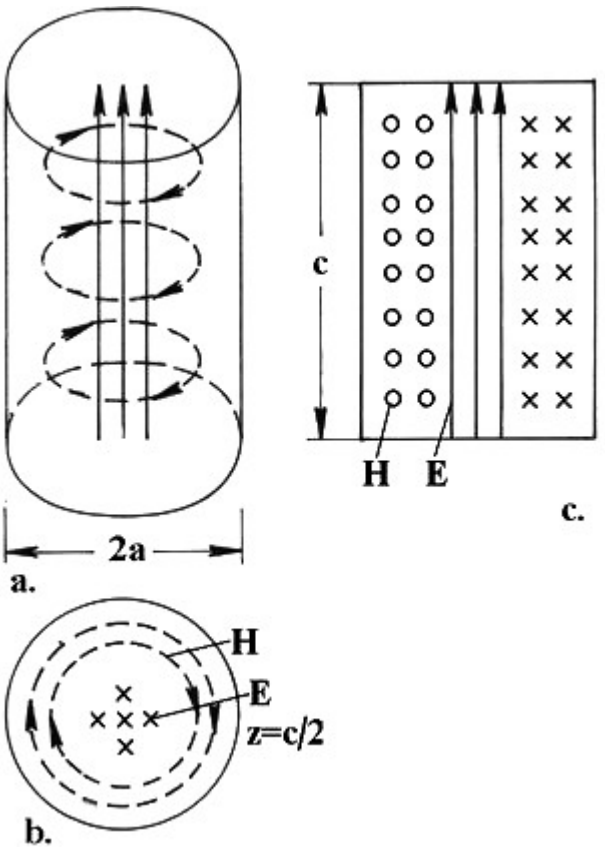



**Fig. 5.13. Modul dominant $TM_{010}$ în cavitatea rezonantă cilindrică; a – vedere de ansamblu; b – secțiune transversală; c – secțiune longitudinală**

Configurația de câmp electromagnetic este arătată în Fig. 5.13; şi pentru acest mod se constată o simetrie axială a liniilor de câmp electric şi magnetic.

**4°. Mod $TM_{011}$**

Deşi nu este fundamental acest mod se utilizează destul de des deoarece poate fi uşor excitat şi este stabil spațial. Expresiile câmpurilor fizice sunt

$$\mathscr{E}_z(\rho,\phi,z,t) = E_0 J_0(\rho_{01}\rho/a)\cos(\pi z/c)\cos\omega t$$

$$\mathscr{E}_\rho(\rho,\phi,z,t) = E_{\rho 0} J_0'(\rho_{01}\rho/a)\sin(\pi z/c)\cos\omega t \tag{5.3.39}$$

$$\mathscr{H}_\phi(\rho,\phi,z,t) = H_{\phi 0} J_0'(\rho_{01}\rho/a)\cos(\pi z/c)\sin\omega t$$

unde s-a notat: $E_{\rho 0} = (-\pi a/c_0\rho_{01})E_0$; $H_{\phi 0} = (\omega_{011E}\varepsilon_0 a/\rho_{01})E_0$.

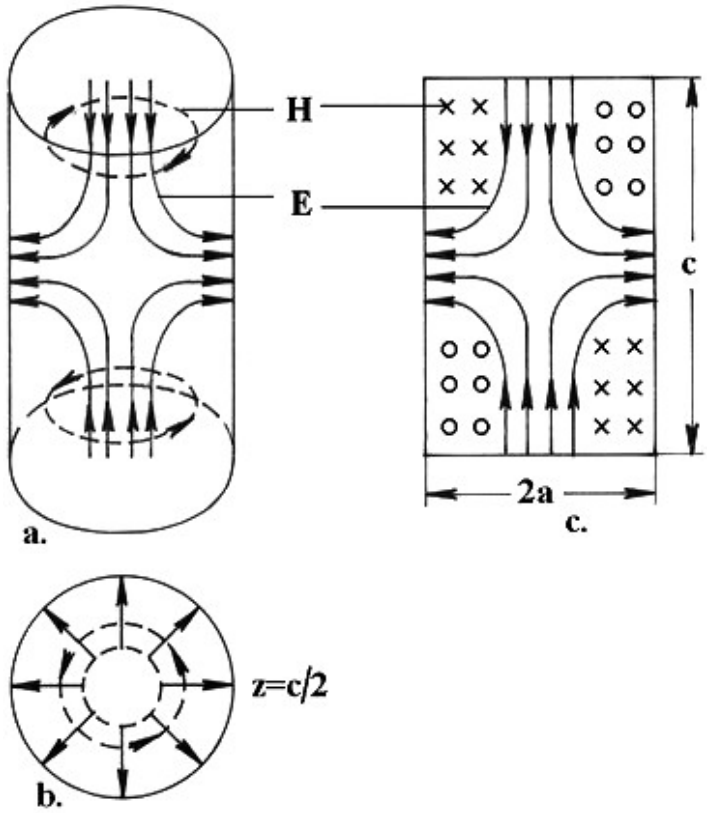



**Fig. 5.14. Configurații de câmp ale modului $TM_{011}$ în cavitatea rezonantă cilindrică; a – vedere de ansamblu; b – secțiune transversală; c – secțiune longitudinală**

Configurația de câmp electromagnetic este arătată în Fig. 5.14; ca urmare a simetriei axiale a liniilor de câmp electric şi magnetic sunt suficiente numai două secționări: una transversală la $z = c/2$ şi una longitudinală.

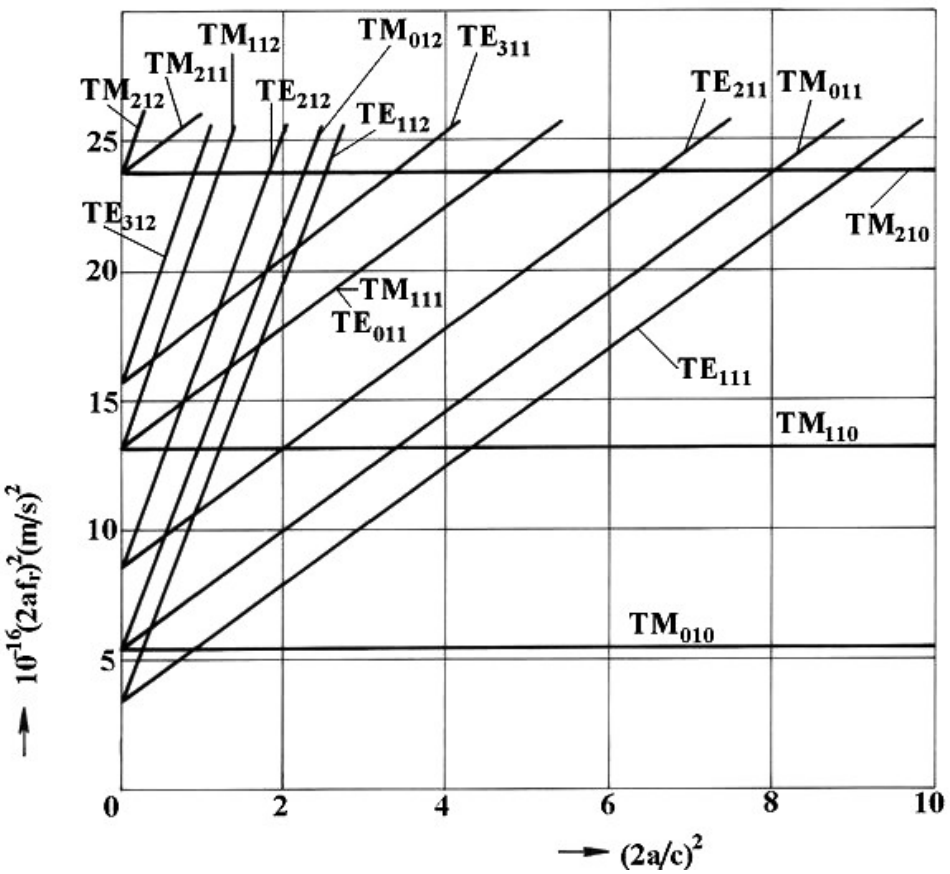



**Fig. 5.15. Variații ale frecvențelor de rezonanță ale diferitelor moduri în cavitatea cilindrică**

Este utilă prezentarea unor grafice generale de variație a frecvențelor de rezonanță în funcție de parametri *a* şi *c* pentru diferite moduri; câteva din aceste grafice sunt arătate în Fig. 5.15 [2]. Din aceste grafice rezultă că există moduri pentru care cavitățile nu sunt acordabile cu ajutorul pistoanelor mobile, în sensul că frecvența nu depinde de înălțimea *c* a cavității; aceste moduri sunt $TM_{010}$, $TM_{110}$, $TM_{210}$. Coordonatele graficelor generalizate pot fi determinate ținând cont de expresia frecvenței de rezonanță in cavitățile cilindrice. De exemplu în cazul modurilor $TE_{nmp}$ relația (5.3.22) poate fi rescrisă sub forma

$$(2af_r)^2 = \left(\frac{c_0\rho'_{nm}}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{c_0 p}{2}\right)^2\left(\frac{2a}{c}\right)^2 \tag{5.3.40}$$

astfel dependența $(2af_r)^2$ de $(2a/c)^2$ este o linie dreaptă; o expresie similară se obține şi pentru modurile $TM_{nmp}$, înlocuind pe $\rho'_{nm}$ cu $\rho_{nm}$.

## 5.4. FACTOR DE CALITATE AL CAVITĂȚILOR REZONANTE METALICE

### 5.4.1. Relații generale

Prin excitarea cu semnale de microunde în cavitățile rezonante fără pierderi (ideale) iau naştere oscilații neamortizate, caracterizate prin configurații particulare (moduri) ale câmpului electromagnetic; amplitudinile acestor oscilații teoretic au valori foarte mari şi formează un spectru discret neatenuat în timp; numerele de undă de rezonanță $k_r$ şi frecvențele de rezonanță corespunzătoare $\omega_r$ sunt mărimi reale. Cavitățile rezonante practice, fizic realizabile, constituie sisteme electromagnetice cu pierderi, fapt ce se manifestă prin lărgirea curbelor de rezonanță (liniilor spectrale) şi atenuarea treptată în timp a oscilațiilor; în acest caz numerele de undă (valorile proprii) şi frecvențele de rezonanță devin mărimi complexe, conținând şi părți imaginare de valori mici.

Proprietățile rezonante (selective) ale unei cavități rezonante sunt caracterizate prin factorul de calitate *Q,* care este definit prin relația

$$Q = \omega_r \frac{W(t)}{P_p},\ \omega_r = \frac{2\pi}{T} \tag{5.4.1}$$

unde: $W(t)$ reprezintă energia mediată totală pe întregul volum înmagazinată în câmpul electromagnetic din interiorul cavității; $P_p$ este puterea disipată în cavitate pe durata unei secunde; $\omega_r$ este pulsația de rezonanță a modului excitat în cavitate; $T$ este perioada oscilațiilor.

Considerăm pentru început o cavitate rezonantă închisă în care este excitat un mod de oscilație definit prin setul de valori proprii $k_r$ şi frecvența de rezonanță corespunzătoare $\omega_r$. Energia mediată $W$ reprezintă energia totală înmagazinată în câmpul magnetic, şi în cel electric deci $W = W_E + W_H$. Puterea disipată în cavitate are mai multe componente: $P_c$ - puterea disipată în pereții metalici, care au conductivitate finită; $P_d$ - puterea disipată în mediu dielectric din interiorul cavității; de regulă $P_d$ reprezintă pierderi dielectrice, însă în anumite situații poate include şi pierderi magnetice, proporționale cu $\mu$; $P_{em}$ - pierderi datorate unor emisii nedorite prin diferite fante în pereții cavității. Influența sarcinilor cuplate la cavitate prin diferite fante şi bucle de cuplaj vor fi discutate ulterior.

Rata de descreştere în timp a energiei totale înmagazinate trebuie să fie egală cu puterea disipată (pierdută) $P_p$; prin urmare, fără a detalia pe $W(t)$ şi $P_p$ se poate scrie

$$-\frac{dW(t)}{dt} = P_p \tag{5.4.2}$$

Atât energia înmagazinată cât şi puterea disipată sunt proporționale cu pătratul amplitudinilor câmpului; astfel, în orice moment de timp puterea disipată este proporțională cu energia înmagazinată la acelaşi moment de timp, prin urmare se poate scrie

$$-\frac{dW(t)}{dt} = P_p = 2\alpha W(t) \tag{5.4.3}$$

care are soluția (ținând cont şi de (5.4.1))

$$W(t) = W_0 e^{-2\alpha t} = W_0 e^{-(\omega_r/Q)t} \tag{5.4.4}$$

unde $W_0$ este energia înmagazinată la momentul $t = 0$. Factorul de proporționalitate în (5.4.3) a fost notat cu $2\alpha$ pentru a sublinia faptul că amplitudinile componentelor de câmp descresc după legea $exp(-\alpha t)$; prin urmare oscilațiile libere din cavitate, cu frecvența de rezonanță $\omega_r$, au o dependență de timp de forma

$$\vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) = Re\left[\vec{E}_0(\vec{r})e^{-\alpha t}e^{j\omega_r t}\right] \tag{5.4.5}$$

Relația (5.4.1) defineşte un factor de calitate rezultant (global); dacă ținem seama de componentele puterii disipate, se pot defini factorii de calitate parțiali

$$Q_c = \omega_r \frac{W}{P_c},\ Q_d = \omega_r \frac{W}{P_d},\ Q_{em} = \omega_r \frac{W}{P_{em}} \tag{5.4.6}$$

unde $P_c, P_d, P_{em}$ reprezintă pierderile în metal, dielectric şi emisie electromagnetică.
Se poate scrie

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{em}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{em}} \tag{5.4.7}$$

unde $Q_0$ este numit factor de calitate intrinsec (propriu); mai jos vom neglija pierderile prin radiație electromagnetică, astfel $P_{em} = 0$ şi termenul $(1/Q_{em}) = 0$.

Frecvența de rezonanță a cavității fără pierderi, pentru un moment dat va fi notată cu $\omega_{r0}$; ca urmare a pierderilor va rezulta o frecvență perturbată $\omega_{rp}$; aşa cum rezultă din (5.4.5) această frecvență este complexă

$$\omega_{rp} = \omega_{r0} + j\alpha = \omega_{r0}\left(1 + \frac{j}{2Q}\right) \tag{5.4.8}$$

Expresia (5.4.8) are un caracter general; ea poate fi particularizată în funcție de tipul de pierderi considerat preponderent.

În mod uzual la cavitățile metalice pierderile cele mai importante au loc în pereții metalici; aşa cum s-a arătat în Cap. 2, puterea disipată în peretele metalic se poate calcula după formula (2.5.78)

$$P_c = \frac{Re(\underline{Z}_S)}{2}\int_\Sigma \left|\vec{J}_{sf}\right|^2 ds = \frac{Re(\underline{Z}_S)}{2}\int_\Sigma \left|\vec{H}_t\right|^2 ds \tag{5.4.9}$$

unde: $\vec{J}_{sf} = \hat{n}\times\vec{H}$ reprezintă curentul de suprafață $(A/m)$; $\vec{H}_t$ reprezintă componentele tangențiale ale câmpului magnetic; $\Sigma$ este aria totală (interioară) a cavității; impedanța de suprafață, văzută din interiorul cavității spre perete, are expresia (2.5.74)

$$\underline{Z}_S = \frac{1+j}{\sigma\delta_s} = R_S + jX_S \tag{5.4.10}$$

în care $\sigma$ este conductivitatea metalului iar $\delta_s$ este adâncimea de pătrundere în metal ($\delta_s = (2/\omega\mu\sigma)^{1/2}$, vezi (2.5.60)).

La rezonanță energia înmagazinată în câmpul electric este egală cu cea înmagazinată în câmpul magnetic, $W_E = W_H$. Aşa cum s-a arătat la tratarea teoremei Poynting avem (vezi (1.4.35) şi (1.4.36))

$$W_H = \frac{\mu'}{4}\int_{V_c} \vec{H}\cdot\vec{H}^* dV\ , \quad W_E = \frac{\varepsilon'}{4}\int_{V_c} \vec{E}\cdot\vec{E}^* dV \tag{5.4.11}$$

astfel, la rezonanță se poate scrie $(W_E = W_H = W)$

$$W = \frac{\varepsilon'}{2}\int_{V_c} \vec{E}\cdot\vec{E}^* dV = \frac{\mu'}{2}\int_{V_c} \vec{H}\cdot\vec{H}^* dV \tag{5.4.12}$$

Relațiile (5.4.12) necesită unele precizări. Se notează prin $\vec{E}^{(0)}$ şi $\vec{H}^{(0)}$ mărimile de câmp neperturbate, ale cavității fără pierderi; la cavitatea cu pierderi mici se poate aproxima că mărimile de câmp $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ nu diferă esențial față de cavitatea fără pierderi, astfel se poate considera $\vec{E} \cong \vec{E}^{(0)}$ şi $\vec{H} \cong \vec{H}^{(0)}$; în continuare se vor păstra notațiile clasice fără superscripția *0*, admițând că mărimile de câmp corespund valorilor neperturbate.

Factorul de calitate parțial determinat de pierderile în metal va fi

$$Q_c = \frac{\omega_r \mu'}{R_S}\frac{\int_V \left|\vec{H}\right|^2 dV}{\int_\Sigma \left|\vec{H}_t\right|^2 ds}; \tag{5.4.13}$$

ținând cont de expresia lui $\delta_s$, ultima relație se pune sub forma

$$Q_c = \frac{2}{\delta_s}\frac{\int_V \left|\vec{H}\right|^2 dV}{\int_\Sigma \left|\vec{H}_t\right|^2 ds} \tag{5.4.14}$$

Pierderile dielectrice şi magnetice pot fi calculate ținând cont de forma integrală a teoremei Poynting (1.4.28) şi de expresia (1.4.32); avem

$$P_d = \frac{\omega_r \varepsilon''}{2}\int_V \left|\vec{E}\right|^2 dV \tag{5.4.15}$$

$$P_h = \frac{\omega_r \mu''}{2}\int_V \left|\vec{H}\right|^2 dV \tag{5.4.16}$$

De regulă pierderile magnetice $P_h$ sunt foarte mici în comparație cu $P_c$ sau chiar $P_d$; astfel $P_h$ poate fi neglijat iar factorul de calitate parțial, determinat de pierderile dielectrice, definit în (5.4.6) este

$$Q_d = \frac{\omega_r W}{P_d} = \frac{1}{\tan\delta_E} \tag{5.4.17}$$

Pierderile datorate radiației electromagnetice prin diferite fante reprezintă partea reală a vectorului Poynting, calculată pe aria $S_0$ a fantei

$$P_{em} = \frac{1}{2} Re\int_{S_0} \left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot d\vec{s}\ , \quad d\vec{s} = -\hat{n}ds \tag{5.4.18}$$

Factorul de calitate parțial $Q_{em}$, determinat de aceste pierderi va fi

$$Q_{em} = \omega_r \mu' \frac{\int_V \left|\vec{H}\right|^2 dV}{Re\int_{S_0} \left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) \cdot d\vec{s}} \tag{5.4.19}$$

Deşi pierderile dielectrice şi magnetice sunt relativ mici în comparaţie cu pierderile în pereţii metalici, ele pot influenţa totuşi frecvenţa de rezonanţă; dacă $\underline{\varepsilon}$ şi $\underline{\mu}$ sunt mărimi complexe, se poate scrie

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} &= \varepsilon' - j\varepsilon'' = \left|\underline{\varepsilon}\right| e^{-j\delta_E} \\ \underline{\mu} &= \mu' - j\mu'' = \left|\underline{\mu}\right| e^{-j\delta_H} \end{aligned} \tag{5.4.20}$$

Expresia generală a pulsaţiei de rezonanţă este $\left(\omega_r = 2\pi v_{ph} / \lambda_r \,;\; v_{ph} = \left(\underline{\mu}\underline{\varepsilon}\right)^{-1/2}\right)$

$$\omega_r = \frac{c_0}{\left[\left|\underline{\varepsilon}_r\right|\left|\underline{\mu}_r\right|\right]^{1/2}} \left[k_\lambda^2 + \left(\frac{p\pi}{c_0}\right)^2\right]^{1/2} e^{j(\delta_E + \delta_H)/2} \tag{5.4.21}$$

unde $c_0 = \left(\varepsilon_0 \mu_0\right)^{-1/2}$. Este evident că pulsaţia $\omega_r$ este o mărime complexă

$$\omega_r = \omega_1 + j\omega_2 \,;\; \frac{\omega_2}{\omega_1} = tan\left(\frac{\delta_E + \delta_H}{2}\right) \tag{5.4.22}$$

### 5.4.2 Expresii ale factorului de calitate pentru diferite moduri

Factorul de calitate intrinsec al cavităţilor este determinat în principal de pierderile în pereţii metalici; în această secţiune se prezintă câteva exemple de calcul a factorului de calitate $Q_c$ pentru cavităţi rezonante paralelipipedice şi cilindrice

**1°. Cavităţi paralelipipedice**

*Modul fundamental* $TE_{101}$. Din (5.2.34) avem

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 \cos(\pi x/a)\sin(\pi z/c) \\ H_x &= H_{x0} \sin(\pi x/a)\cos(\pi z/c) \\ E_y &= E_{y0} \sin(\pi x/a)\sin(\pi z/c) \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

unde: $H_{x0} = \left(-k_x k_z / k_\lambda^2\right)H_0$, $E_{y0} = \left(\omega_r \mu k_x / k_\lambda^2\right)H_0$; $\vec{H}_z = \hat{k}H_z$, $\vec{H}_x = \hat{i}H_x$, $\vec{E}_y = \hat{j}E_y$. După cum rezultă din Fig. 5.6 câmpul magnetic din cavitate este tangent la pereţi, prin urmare în expresia (5.4.14) atât în integrala de volum cât şi în cea de suprafaţă vor exista aceleaşi componente $\vec{H}$. Notând cu $A_v$ integrala de volum se obţine

$$A_v = \int_{V_c} \left|\vec{H}\right|^2 dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \left(H_z^2 + H_x^2\right) dxdydz = H_0^2 \frac{abc}{4}\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) \tag{5.4.24}$$

Notăm cu $A_{xs}, A_{ys}$ şi $A_{zs}$ integralele de suprafaţă pe pereţii perpendiculari pe coordonata specificată de indice. Pe pereţii laterali $x = 0$ *şi* $x = a$ avem $H_x = 0$ şi $\Sigma_x = bc$, astfel se obţine

$$A_{xs} = 2\int_0^b \int_0^c H_z^2 dydz = bcH_0^2 \,; \tag{5.4.25}$$

pe pereţii laterali $z = 0$ *şi* $z = c$ avem $H_z = 0$ şi $\Sigma_z = ab$, prin urmare se obţine

$$A_{zs} = 2\int_0^a\int_0^b H_x^2\,dxdy = H_0^2\,ab\left(\frac{a}{c}\right)^2; \tag{5.4.26}$$

referindu-ne la peretele inferior $y = 0$ şi cel superior $y = b$, avem $\Sigma_y = ac$, astfel pentru $A_{ys}$ se obține

$$A_{ys} = 2\int_0^a\int_0^c\left(H_x^2 + H_z^2\right)dxdy = H_0^2\,\frac{ac}{2}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) \tag{5.4.27}$$

Introducând ultimele patru expresii în (5.4.14) rezultă

$$Q_c = \frac{1}{\delta_s}\,\frac{abc\left(a^2+c^2\right)}{2b\left(a^3+c^3\right)+ac\left(a^2+c^2\right)} \tag{5.4.28}$$

Această expresie poate fi scrisă concentrat

$$Q_c = L_0/\delta_s \tag{5.4.29}$$

unde $L_0$ are dimensiunea unei lungimi; de exemplu pentru o cavitate cubică $a = b = c$ avem $L_0 = a/3$ şi $Q_c = a/3\delta_s$; pentru o cavitate plană cu $b << a,\ b << c$ rezultă $L_0 = b$, astfel se poate aproxima $Q_c = b/\delta_s$.

*Factor de calitate normat*, $Q_{cN} = Q_c\delta_s/\lambda_r$; această mărime este funcție numai de dimensiunile relative ale cavității şi de tipul modului excitat. De exemplu, pentru modurile transversal-electrice $TE_{mnp}$ se obține [2]

$$\frac{Q_c\delta_s}{\lambda_r} = \frac{abc\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]^{3/2}}{ac\left\{\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{p}{c}\right)^2+\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2\right\}+bc\left\{\left(\frac{n}{b}\right)^2\left(\frac{p}{c}\right)^2+\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2\right\}+ab\left(\frac{p}{c}\right)^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]} \tag{5.4.30}$$

Particularizând pentru modul fundamental $TE_{101}$ rezultă

$$\frac{Q_c\delta_s}{\lambda_r} = \frac{(b/2)\left(a^2+c^2\right)^{3/2}}{a^3(c+2b)+c^3(a+2b)} \tag{5.4.31}$$

Procedând similar, pentru modurile transversal-magnetic $TM_{mnp}$, rezultă [2]

$$\frac{Q_c\delta_s}{\lambda_r} = \frac{abc}{4}\,\frac{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{c}\right)^2\right]^{1/2}}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 b(a+c)+\left(\frac{n}{b}\right)^2 a(b+c)}; \tag{5.4.32}$$

particularizând pentru modul fundamental $TM_{110}$ se obține

$$\frac{Q_c\delta_s}{\lambda_r} = \frac{(c/4)\left(a^2+b^2\right)^{3/2}}{b^3(a+c)+a^3(b+c)} \tag{5.4.33}$$

**2°. Cavități cilindrice**

Ne referim întâi la modurile transversal-electrice $TE_{nmp}$; expresiile componentelor de câmp sunt date de relațiile (5.3.11), (5.3.13), (5.3.14), (5.3.16) şi (5.3.17). Integrala de volum din (5.4.14) are expresia generală

$$A_v = \int_V \left(H_z^2 + H_\rho^2 + H_\phi^2\right) dV = H_0^2 \frac{\pi c}{2} \int_0^a \left[ J_n(k_\lambda \rho) + \frac{k_z^2}{k_\lambda^2} J_n'(k_\lambda \rho) + \frac{n^2 k_z^2}{k_\lambda^2} J_n'(k_\lambda \rho) \right] \rho \, d\rho =$$

$$= H_0^2 \frac{\pi c}{4} J_n^2(\rho'_{nm}) \left[ \left( a^2 - \frac{n^2}{k_\lambda^2} \right) \left( 1 + \frac{k_z^2}{k_\lambda^2} \right) \right] \tag{5.4.34}$$

în care $k_z = p\pi/c$, $k_\lambda = \rho'_{nm}/a$.

Integrala de suprafață din (5.4.14) include doi termeni; primul $A_{sl}$ se referă la aria laterală a cilindrului, al doilea $A_{sz}$ se referă la pereții de capăt; avem

$$A_\Sigma = A_{sl} + A_{sz} = \int_{\Sigma l} \left(H_\rho^2 + H_\phi^2\right) a \, d\phi \, dz + 2 \int_{\Sigma z} \left(H_\rho^2 + H_\phi^2\right) \rho \, d\rho \, d\phi =$$

$$= H_0^2 J_n^2(\rho'_{nm}) \frac{\pi}{2} \left[ ac \left( 1 + \frac{n^2 k_z^2}{a^2 k_\lambda^4} \right) + 2 \frac{k_z^2}{k_\lambda^2} \left( a - \frac{n^2}{k_\lambda^2} \right) \right] \tag{5.4.35}$$

Factorul de calitate $Q_c$ are expresia

$$Q_c = \frac{1}{\delta_s} \frac{a \left( 1 - \frac{n^2}{\rho'^2_{nm}} \right) \left( 1 + \frac{a^2}{c^2} \frac{p^2 \pi^2}{\rho'^2_{nm}} \right)}{1 + 2 \frac{a^3 p^2 \pi^2}{c^3 \rho'^2_{nm}} + \frac{a^2 n^2 p^2 \pi^2}{c^2 \rho'^4_{nm}} \left( 1 - \frac{2a}{c} \right)} \tag{5.4.36}$$

Particularizând pentru modul $TE_{011}$ rezultă

$$Q_c = \frac{1}{\delta_s} \frac{a \left( 1 + \frac{a^2}{c^2} \frac{p^2 \pi^2}{\rho'^2_{nm}} \right)}{1 + 2 \frac{a^3 \pi^2}{c^3 \rho'^2_{nm}}}; \tag{5.4.37}$$

această ultimă expresie se poate obține şi direct prin utilizarea expresiilor (5.2.36). Factorul de calitate normat pentru modurile $TE_{nmp}$ este [2]

$$\frac{Q_c \delta_s}{\lambda_r} = \frac{\left[ 1 - \left( \frac{n}{\rho'_{nm}} \right)^2 \right] \left( \rho'^2_{nm} + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{c^2} \right)^{3/2}}{2\pi \left[ \left( \rho'^2_{nm} + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{c^2} \right) + \left( 1 - \frac{2a}{c} \right) \left( \frac{n \pi a}{c \rho'_{nm}} \right)^2 \right]} \tag{5.4.38}$$

În cazul modurilor $TM_{nmp}$ se obține

$$\frac{Q_c \delta_s}{\lambda_r} = \frac{\left( \rho_{nm}^2 + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{c^2} \right)^{1/2}}{2\pi (1 + 2a/c)} \tag{5.4.39}$$

Se observă că factorul de calitate normat variază cu dimensiunile cavității şi poate lua valori maxime pentru anumite rapoarte între aceste dimensiuni. De exemplu, pentru modurile $TE_{nmp}$ în cavitățile cilindrice relația (5.4.38) arată că factorul de calitate normat ia valoarea maximă pentru $2a=c$ (cilindru drept). Curbe de variația ale factorului de calitate normat pentru câteva moduri uzuale sunt arătate în Fig. 5.16 [3]. De asemenea, practica arată că cele mai ridicate valori ale factorului de calitate $Q_c$ se obțin la cavitățile cilindrice în care se excită moduri $TE_{01p}$; de exemplu pentru modul $TE_{01,17}$ cu $\lambda_r = 3\ cm$ (banda *X*) rezultă $Q_c = 150000$; pentru modul $TE_{011}$ cu $\lambda_r = 10\ cm$ (banda *S*) rezultă $Q_c = 50000$. Materialul utilizat pentru construcția cavităților rezonante trebuie să fie de conductivitate ridicată (cupru, argint sau bronz şi cupru argintate).

În general factorul de calitate $Q_c$ poate fi exprimat sub forma

$$Q_c = \frac{V}{\delta_s \Sigma} k_f \tag{5.4.40}$$

unde: $V$ este volumul iar $\Sigma$ este aria totală a suprafeței interioare a cavității; $k_f$ este numit factor de formă şi reprezintă un coeficient care depinde de forma geometrică a cavității şi de tipul (modul) de oscilații excitate; de exemplu în cazul cavităților cu $2a = c$ pentru modul $TE_{011}$ se obține $k_f \cong 3{,}3$. Ținând cont de curbele din Fig. 5.16 se poate face o aproximare grosieră a factorului de calitate $Q_c$ conform relației

$$Q_c \cong \lambda_r / \delta_s \propto \lambda_r^2 \tag{5.4.41}$$

într-adevăr energia înmagazinată în volumul cavității este proporțională cu $\lambda_r^3$ iar puterea disipată este proporțională cu aria cavității multiplicată cu adâncimea de pătrundere $\delta_s \Sigma \propto \delta_s \lambda_r^2$.

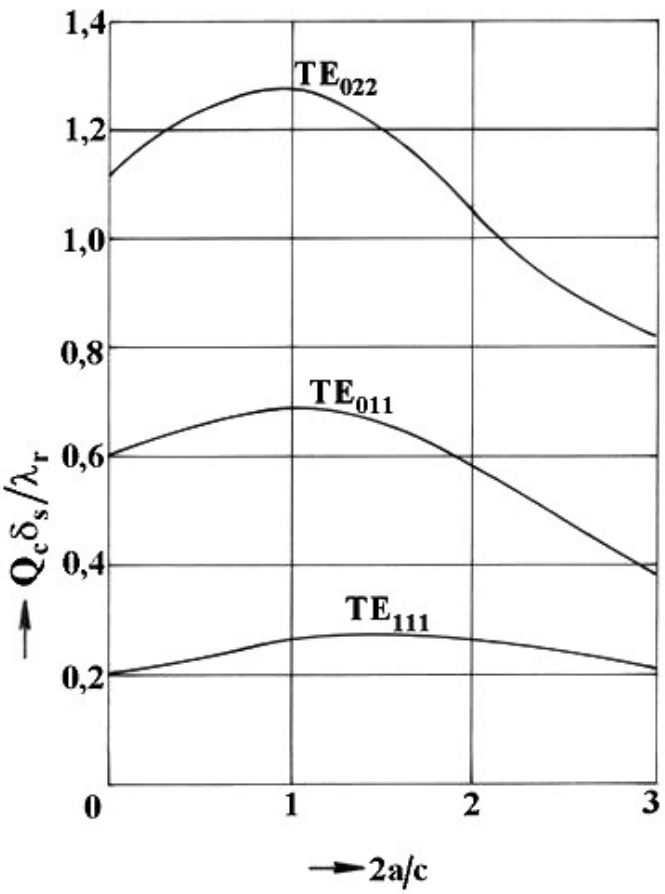



**Fig. 5.16. Variații ale factorului de calitate normat în cavitățile rezonante cilindrice**

### 5.4.3. Curbe de rezonanță. Circuite echivalente

Ca urmare a pierderilor din cavitatea rezonantă (în pereții metalici şi în mediul din interior) pulsația de rezonanță este o mărime complexă (5.4.8); pierderile influențează atât partea imaginară cât şi partea reală a acestei pulsații, numită pulsație perturbată $(\omega_{rp})$. În funcție de natura pierderilor preponderente şi de valoarea lor, precum şi de gradul de acuratețe impus, există mai multe modalități de aproximare a curbelor de rezonanță.

**1°. Circuite echivalente**

Cavitățile rezonante privite ca sisteme oscilante pot fi analizate cu ajutorul circuitelor echivalente, serie şi paralel (Fig. 5.17). În cazul circuitului echivalent serie (Fig. 5.17a) semnalul de excitație se reprezintă sub forma unui impuls Dirac de tensiune (sursă de tensiune constantă); imediat după terminarea semnalului de excitație, evoluția liberă a oscilațiilor este descrisă de relația simplă

$$(\underline{X}_L + \underline{X}_C + R_s)\underline{I} = 0 \tag{5.4.42}$$

unde: $\underline{X}_L$ este reactanța inductivă, $\underline{X}_C$ este reactanța capacitivă, rezistența serie $R_s$ este determinată de valoarea pierderilor.

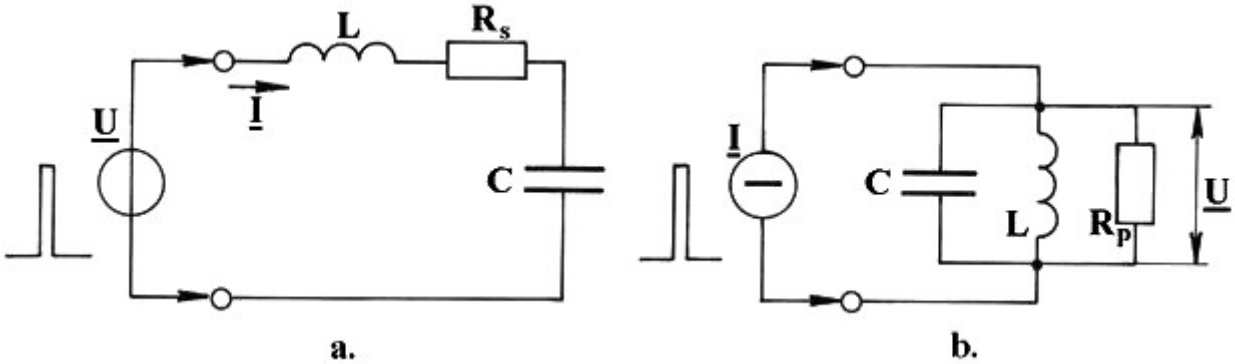



**Fig. 5.17. Circuite echivalente ale cavității rezonante: a – serie; b - paralel**

În vecinătatea rezonanței ultima relație devine

$$j\left(\omega_{rp}L - \frac{1}{\omega_{rp}C}\right) + R_s = 0 \tag{5.4.43}$$

Notând

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R_s} \tag{5.4.44}$$

se poate scrie

$$j\left(\frac{\omega_{rp}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{rp}}\right) + \frac{1}{Q_0} = 0; \tag{5.4.45}$$

pentru simplificarea scrierii s-a notat $\omega_{r0} = \omega_0$, iar $Q_0$ este definit prin relația (5.4.7)

Rezolvând ultima ecuație în raport cu pulsația perturbată $\omega_{rp}$ se obține

$$\omega_{rp} = \omega_0\left[1 + \frac{1}{4Q_0^2}\right]^{1/2} + \frac{j\omega_0}{2Q_0} \tag{5.4.46}$$

Se observă că pulsația proprie a cavității rezonante cu pierderi este o mărime complexă

$$\omega_{rp} = \omega_1 + j\omega_2 \tag{5.4.47}$$

unde

$$\omega_1 = \omega_0\left(1+\frac{1}{4Q_0^2}\right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q_0} \tag{5.4.48}$$

Utilizând raportul $(\omega_1/2\omega_2)$ se poate scrie o expresie simplificată pentru factorul de calitate $Q_0$; avem

$$\left(\frac{\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 = Q_0^2\left(1+\frac{1}{4Q_0^2}\right), \quad Q_0 = \left[\left(\frac{\omega_1}{2\omega_2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]^{1/2} \tag{5.4.49}$$

La circuitul echivalent paralel (Fig. 5.17b) semnalul de excitație reprezintă un impuls Dirac de curent (sursă de curent constant). Procedând similar ca mai sus, pentru circuitul echivalent paralel se obține

$$j\left(\omega_{rp}C - \frac{1}{\omega_{rp}L}\right) + g_p = 0 \tag{5.4.50}$$

unde conductanța $g_p = 1/R_p$ depinde de valoarea pierderilor; ultima relație se aduce la o formă analoagă cu (5.4.45)

$$j\left(\frac{\omega_{rp}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{rp}}\right) + \frac{1}{Q_0} = 0 \tag{5.4.51}$$

în care s-a notat

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad Q = \frac{\omega_0 C}{g_p} \tag{5.4.52}$$

Curbele de rezonanță ale circuitelor echivalente din Fig. 5.17 se determină prin metode convenționale utilizate în cazul circuitelor oscilante clasice.

**2°. Curbe de rezonanță normate**

Oscilațiile libere care iau naştere în cavitățile rezonante ca urmare a aplicării semnalului de excitație de tip Dirac, sunt descrise de o relație de tipul (5.4.5) (Fig. 5.18a).

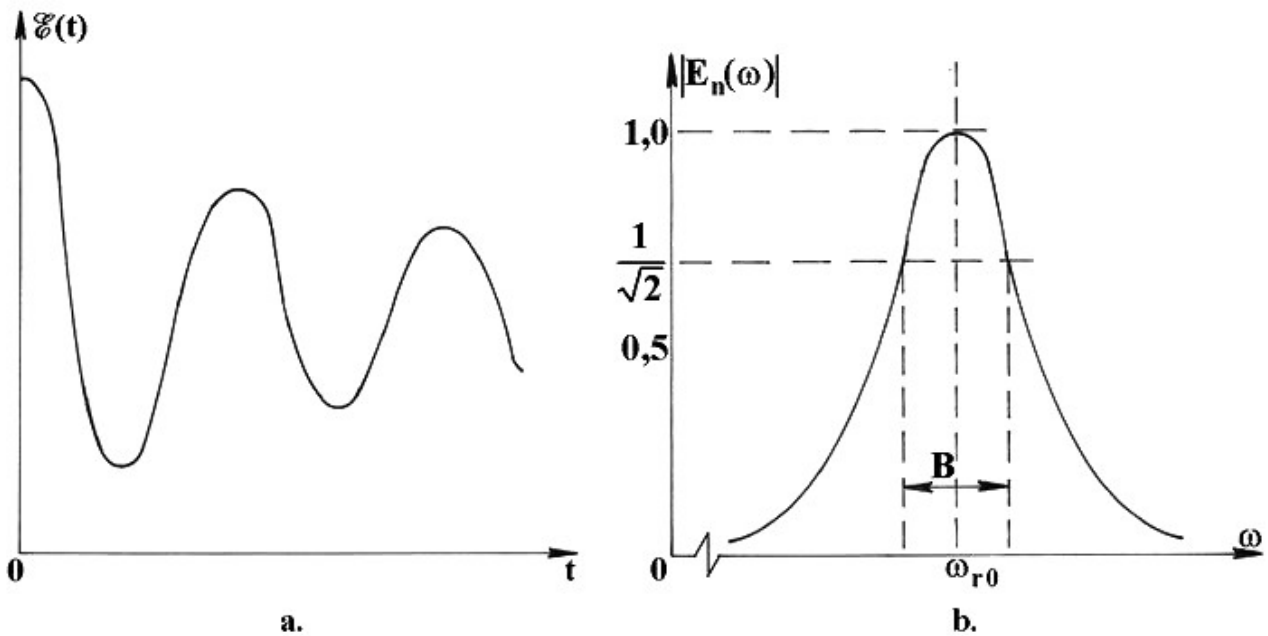



**Fig. 5.18. Ilustrarea fenomenului de rezonanță în cavitatea rezonantă:**
**a – descreştere exponențială a amplitudinii semnalului; b – curbă de rezonanță normată**

Pentru obținerea unei expresii analitice a curbei normate de rezonanță este convenabilă utilizarea transformatei Fourier a expresiei (5.4.5), pentru a trece din domeniul timp în domeniul frecvență; considerând $t > 0$ avem

$$\vec{E}(\omega) = \int_0^\infty \vec{\mathscr{E}}(\vec{r},t) e^{-j\omega t} dt = E_0 \frac{1}{\alpha + j(\omega - \omega_{r0})} \tag{5.4.53}$$

Luăm modulul valorii normate a câmpului $\vec{E}(\omega)$

$$\left|\vec{E}_n(\omega)\right| = \frac{\left|\alpha \vec{E}(\omega)\right|}{E_0} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\omega - \omega_{r0}}{\alpha}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{5.4.54}$$

Aşa cum rezultă din (5.4.8) avem $\alpha = \omega_{r0}/2Q_0$ , astfel ultima relație devine

$$\left|\vec{E}_n(\omega)\right| = \frac{1}{\left[1 + \xi^2 Q_0^2\right]^{1/2}} \tag{5.4.55}$$

unde $\xi = 2(\omega - \omega_{r0})/\omega_{r0}$ este numit *dezacord relativ*.

Curba normată de rezonanță este reprezentată în Fig. 5.18b, unde mărimea $B = 2(\omega - \omega_{r0}) = 2\Delta\omega$ reprezintă banda de trecere la *3 dB* atenuare; această valoare rezultă din (5.4.55) făcând $\xi Q_0 = 1$, astfel putem scrie $B = \omega_{r0}/Q_0$ ; la rezonanță $\xi = 0$ şi $\left|E_n(\omega)\right| = 1$.

Impedanța cavității rezonante văzută de la apertura de excitare reprezintă impedanța văzută de la bornele de intrare ale circuitului echivalent serie. În vecinătatea rezonanței se poate scrie

$$\underline{Z} = R_s + j\left(\omega_{rp} L - \frac{1}{\omega_{rp} C}\right) \cong R_s\left[1 + j\xi Q_0\right] \tag{5.4.56}$$

cu $Q_0 = \omega_{r0} L / R_s$ .

În mod similar se determină admitanța de intrare a cavității; în cazul utilizării circuitului echivalent paralel avem

$$\underline{Y} = g_p + j\left(\omega_{rp} C - \frac{1}{\omega_{rp} L}\right) = g_p\left[1 + j\xi Q_0\right] \tag{5.4.57}$$

cu $Q_0 = \omega_{r0} C / g_p$ .

## 5.5. REZONATOARE DIELECTRICE

Structura uzuală de rezonator dielectric constă dintr-un cilindru (disc cilindric) de material dielectric cu permitivitate relativă ridicată, $\varepsilon_r = 30 \div 100$ (Fig. 5.19); există de asemenea, şi rezonatoare de formă cubică sau sferică. Valoarea ridicată a permitivității $\varepsilon_r$ asigură confinarea majorității câmpului electromagnetic în interiorul dielectricului; totuşi, spre deosebire de cavitățile metalice, aici vor exista câmpuri de scăpări pe pereții laterali şi pe capete. Deşi pierderile în metal lipsesc, factorul de calitate $Q$ este limitat de câmpul de scăpări şi de faptul că odată cu creşterea permitivității cresc şi pierderile dielectrice; în practică au fost obținute rezonatoare cu $Q$ de câteva mii. În general rezonatoarele dielectrice au dimensiuni, greutăți şi costuri mai mici decât cavitățile metalice echivalente; ele sunt deosebit de convenabile pentru încorporare în componente cu linii microstrip şi circuitele integrate monolitice pentru microunde.

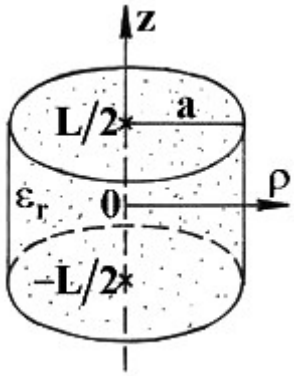



**Fig. 5.19. Rezonator dielectric cilindric**

### 5.5.1. Soluții aproximative pentru moduri cu simetrie axială

Dezvoltarea unei teorii riguroase privind fenomenele de rezonanță din rezonatoarele dielectrice constituie o problemă extrem de laborioasă. În această secțiune se prezintă întâi o metodă aproximativă, apoi se vor face unele extinderi. Complexitatea problemei de găsire a soluțiilor cât mai exacte este determinată de complexitatea fenomenelor la interfața dielectric-aer. În funcție de condițiile la limită mai grosiere sau mai detaliate şi soluțiile obținute vor fi mai aproximative sau mai exacte.

Procesele fizice la interfața a două medii dielectrice sunt prezentate detaliat în Cap. 9; în cazul rezonatorului mediul 1 este cilindru dielectric cu permitivitatea $\varepsilon_1 = \varepsilon_r \varepsilon_0$, iar mediul 2 este aerul cu permitivitatea $\varepsilon_0$. Aspectul fundamental care se ia în considerare la rezonatoarele dielectrice este *reflexia totală* la interfața dielectric-aer; numai în acest caz are loc confinarea energiei electromagnetice în interiorul dielectricului şi pot exista fenomene de rezonanță. În realitate însă propagarea undelor electromagnetice într-un mediu cu permitivitate ridicată este acompaniată de unde de suprafață în mediul cu permitivitate mai mică; acest aspect este studiat în Cap. 4, la ghidurile dielectrice (plate şi cilindrice) şi la fibrele optice. O apreciere aproximativă asupra fenomenului de reflexie totală poate fi dată prin considerarea incidenței normale $(\theta_i = 0,\ \theta_t = 0)$; în acest caz coeficientul de reflexie se pune sub forma

$$R_{SE} = \frac{Z_{W2} - Z_{W1}}{Z_{W2} + Z_{W1}} = \frac{(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} - (\mu_0/\varepsilon_1)^{1/2}}{(\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2} + (\mu_0/\varepsilon_1)^{1/2}} = \frac{\varepsilon_r^{1/2} - 1}{\varepsilon_r^{1/2} + 1} \to 1 \qquad (5.5.1)$$

Referindu-ne la fenomenele de reflexie în liniile de transmisie valoarea *+1* a coeficientului de reflexie se obține pentru o linie în gol $(Z_s \to \infty)$; în acest context interfața dielectric-aer poate fi aproximată printr-un *perete magnetic perfect* (PMP), pentru care sunt adevărate condițiile la limită (1.3.47): componentele tangențiale ale câmpului magnetic (sau componentele normele ale câmpului electric) se anulează. Deşi conceptul de perete magnetic ideal are un caracter ipotetic, el constituie o simplificare convenabilă pentru studiul propagării în diferite structuri şi permite obținerea de soluții aproximative; detalierea condițiilor de perete magnetic permite obținerea de soluții mai exacte.

În continuare vom considera că rezonatorul este constituit dintr-un tronson de ghid dielectric circular. Analiza simplificată consideră că în ghidul dielectric se propagă modul $TE_{01}$ iar condiția de perete magnetic perfect se aplică numai pe suprafața laterală; pe pereții de capăt se ține cont de existența undelor de suprafață. Forma generală a ecuației de propagare este

$$\left(\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right) H_{0z}(\rho, \phi) = 0 \qquad (5.5.2)$$

Având în vedere condițiile simplificatoare menționate, sunt necesare precizări asupra mărimilor $k_\lambda$ (număr de undă transversal) şi a constantei de propagare pe direcția *z*, notată $\beta_z$. În interiorul ghidului constanta $\beta_z$ este o mărime reală şi pozitivă, astfel se poate scrie

$$k_{1\lambda}^2 = k_1^2 - \beta_z^2 \;; \quad \beta_z^2 = \left[k_1^2 - k_{1\lambda}^2\right]^{1/2} \tag{5.5.3}$$

unde $k_1 = \omega(\mu_0\varepsilon_1)^{1/2}$. În exteriorul dielectricului adică pentru $|z| > L/2$ avem o undă evanescentă, prin urmare constanta de propagare este o mărime imaginară notată $j\alpha_{z\lambda}$, deci $\beta_z^2 = -\alpha_{z\lambda}^2$; astfel se poate scrie

$$\alpha_{z\lambda} = \left[k_{1\lambda}^2 - k_2^2\right]^{1/2} \tag{5.5.4}$$

unde $k_2 = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$.

Aşa cum s-a specificat în secţiunea 4.4.1 pentru modurile independente de $\phi$ $(n = 0)$, în interiorul rezonatorului $(|z| < L/2)$ soluţia ecuaţiei (5.5.2) este de forma (4.4.11), adică

$$H_{0z}(\rho) = H_0 J_0(k_{1\lambda}\rho);\; H_z(\rho,z) = H_0 J_0(k_{1\lambda}\rho)e^{\mp j\beta_z z} \tag{5.5.5}$$

Întrucât $\partial/\partial\phi = 0$ şi $\nabla_T = \hat{\rho}\,\partial/\partial\rho$, componentele transversale sunt

$$H_{0\rho}(\rho) = \frac{-j\beta_z}{k_{1\lambda}^2}\frac{\partial H_{0z}}{\partial\rho} = \frac{-j\beta_z}{k_{1\lambda}} H_0 J_0'(k_{1\lambda}\rho);\; H_\rho(\rho,z) = \frac{-j\beta_z}{k_{1\lambda}} H_0 J_0'(k_{1\lambda}\rho)e^{\mp j\beta_z z} \tag{5.5.6}$$

$$E_{0\phi}(\rho) = \frac{j\omega\mu_0}{k_{1\lambda}^2}\frac{\partial H_{0z}}{\partial\rho} = \frac{j\omega\mu_0}{k_{1\lambda}} J_0'(k_{1\lambda}\rho);\; E_\phi(\rho,z) = \frac{j\omega\mu_0}{k_{1\lambda}} J_0'(k_{1\lambda}\rho)e^{\mp j\beta_z z} \tag{5.5.7}$$

Din condiţia de perete magnetic perfect la $\rho = a$ avem $H_{0z}(\rho = a) = 0$, astfel din (5.5.5) va rezulta $J_0(k_{1\lambda}a) = 0$, a cărei rădăcină de valoare minimă este $\rho_{01} = 2{,}405$ (Tabelul 2.1), prin urmare $k_{1\lambda} = \rho_{01}/a$; această valoare se va introduce în (5.5.3) şi (5.5.4).

Din raţiuni de simetrie, în cazul modurilor fundamentale ($\lambda_{cr}$ de valoare maximă) câmpurile $H_\rho(\rho,z)$ şi $E_\phi(\rho,z)$ sunt funcţii pare în vecinătatea coordonatei $z = 0$. Este cunoscut în literatura de specialitate [5] că un mod foarte des folosit este $TE_{01\delta}$, unde $\delta = 2L/\lambda_g$ este uşor subunitar ($\lambda_g$ este lungimea de undă în ghidul dielectric pentru modul $TE_{01}$). În urma acestor precizări componentele transversale ale câmpului pot fi scrise sub următoarele forme

a) În interiorul rezonatorului $|z| < L/2$

$$H_\rho(\rho,z) = \frac{-jA_1}{Z_d} J_0'(k_{1\lambda}\rho)\sin\beta_z z \tag{5.5.8}$$

$$E_\phi(\rho,z) = A_1 J_0'(k_{1\lambda}\rho)\cos\beta_z z \tag{5.5.9}$$

unde

$$Z_d = \frac{E_\phi}{H_\rho} = \frac{\omega\mu_0}{\beta_z} \tag{5.5.10}$$

este impedanţa de undă în rezonator

b) În exteriorul rezonatorului $|z| > L/2$

$$H_\rho(\rho,z) = \frac{\pm A_2}{Z_a} J_0'(k_{1\lambda}\rho)e^{-\alpha_{z\lambda}|z|} \tag{5.5.11}$$

$$E_\phi(\rho,z) = A_2 J_0'(k_{1\lambda}\rho)e^{-\alpha_{z\lambda}|z|} \tag{5.5.12}$$

Semnul $\pm$ din (5.5.11) se referă la spaţiul $z > L/2$, respectiv $z < -L/2$; mărimea

$$Z_a = \frac{j\omega\mu_0}{\alpha_{z\lambda}} \tag{5.5.13}$$

este impedanța de undă în aer. Constantele de amplitudine $A_1$, $A_2$ pot fi eliminate punând condiții la limită adecvate; conform modelului adoptat condițiile la limită impun continuitatea componentelor tangențiale la $|z| = L/2$. Se obține

$$-j\frac{A_1}{Z_d}\sin(\beta_z L/2) = \frac{A_2}{Z_a}e^{-\alpha_{z\lambda}L/2} \tag{5.5.14}$$

$$A_1\cos(\beta_z L/2) = A_2\, e^{-\alpha_{z\lambda}L/2} \tag{5.5.15}$$

din care rezultă ecuația transcendentală

$$-jZ_a\sin(\beta_z L/2) = Z_d\cos(\beta_z L/2); \tag{5.5.16}$$

ținând cont de expresiile impedanțelor $Z_d$ şi $Z_a$ avem

$$\tan(\beta_z L/2) = \alpha_{z\lambda}/\beta_z \tag{5.5.17}$$

Ultima relație reprezintă o *ecuație de valori proprii* care se rezolvă numeric. Luând valori concrete pentru *a, L* şi $\varepsilon_r$ se calculează $\beta_z$ şi $\alpha_{z\lambda}$ conform relațiilor (5.5.3), (5.5.4) şi se introduc în (5.5.17); se obține valoarea lui $k_0$ care la rândul său determină frecvența de rezonanță, $f_r = c_0 k_0/2\pi$. Trebuie subliniat că ecuația (5.5.17) oferă soluții aproximative cu caracter orientativ; simplificarea importantă introdusă prin neglijarea efectelor de interfață pe peretele lateral al rezonatorului afectează precizia rezultatelor.

### 5.5.2. Modelul *perete magnetic perfect* (PMP)

Procesele de propagare în structurile dielectrice cilindrice sunt suficient de complexe ca urmare a existenței modurilor hibride: $EH_{nm}$ (modul preponderent este *TM*) şi $HE_{nm}$ (modul preponderent este TE). De asemenea, sub formă generală, ghidul dielectric constituie o structură cu unde de suprafața; acest fapt complică şi mai mult găsirea soluțiilor (frecvența de rezonanță şi configurații de câmp). Un model simplificator adesea utilizat în literatură pentru rezonatoarele dielectrice este cel cu *perete magnetic perfect*, reprezentat în Fig. 5.20; acest model presupune că rezonatorul este mărginit pe toate fețele prin pereți magnetici ideali: la interfața dielectric-aer componentele tangențiale ale câmpului magnetic sunt zero. În aceste condiții este suficientă scrierea ecuațiilor şi a expresiilor componentelor de câmp numai pentru interiorul rezonatorului.

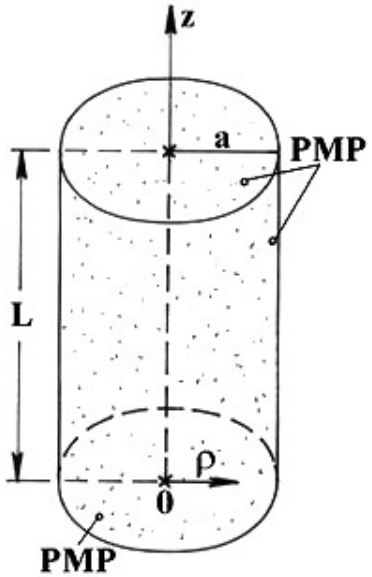



**Fig. 5.20. Modelul *perete magnetic perfect* (PMP) al rezonatorului dielectric**

Referindu-ne la Fig. 5.20 condițiile la limită generale pentru componentele magnetice de câmp care definesc modelul de perete magnetic ideal sunt

$$H_z(\rho,\phi,z)\Big|_{(\rho=a,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le L)} = 0 \tag{5.5.18}$$

$$H_\rho(\rho,\phi,z)\Big|_{\substack{(0\le\rho\le a,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ z=0)\\(0\le\rho\le a,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ z=L)}} = 0 \tag{5.5.19}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z)\Big|_{\substack{(\rho=a,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le L)\\(0\le\rho\le a,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ z=0)\\(0\le\rho\le a,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ z=L)}} = 0 \tag{5.5.20}$$

Deşi în realitate modurile de oscilație sunt hibride , pentru simplitate se vor presupune separat moduri $TE_{nmp}$ şi $TM_{nmp}$.

**1°. Moduri $TE_{nmp}$**

Aceste moduri sunt definite prin componentele $H_z, H_\rho, H_\phi, E_\rho$ şi $E_\phi$. Componenta $H_{0z}(\rho,\phi)$ se obține ca soluție a ecuației de propagare Helmholtz de forma (4.4.35); expresia componentei $H_z(\rho,\phi,z)$ este (4.4.37)

$$H_z(\rho,\phi,z) = H_0 J_n(k_{1\lambda}\rho)e^{-jn\phi}e^{-j\beta_z z} \tag{5.5.21}$$

Componentele $H_\rho(\rho,\phi,z)$ şi $H_\phi(\rho,\phi,z)$ se obțin prin utilizarea relațiilor între componentele transversale şi cele longitudinale; se obțin expresiile

$$H_\rho(\rho,\phi,z) = \frac{-j\beta_z}{k_{1\lambda}} H_0 J_n'(k_{1\lambda}\rho)e^{-jn\phi}e^{-j\beta_z z} \tag{5.5.22}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z) = \frac{-\beta_z}{k_{1\lambda}^2\rho} nH_0 J_n(k_{1\lambda}\rho)e^{-jn\phi}e^{-j\beta_z z} \tag{5.5.23}$$

Scopul final constă în determinarea frecvenței de rezonanță şi a unor configurații de câmp; pentru aceasta este suficientă găsirea unor expresii pentru numerele de undă $k_{1\lambda}$ şi $\beta_z$ în funcție de dimensiunile rezonatorului şi permitivitatea relativă. Ne referim la componenta $H_\phi(\rho,\phi,z)$ (5.5.23) şi punem condițiile (5.5.20):

a) Din condiția $H_\phi(\rho=a,\ 0\le\phi\le 2\pi,\ 0\le z\le L)=0$ se obține

$$J_n(k_{1\lambda}a)=0;\ k_{1\lambda}=\rho_{nm}/a \tag{5.5.24}$$

unde $\rho_{nm}$ este rădăcina de ordin *m* a funcției Bessel de speța întâia şi ordin *n*.

b) Termenul dependent de *z*, $exp(-j\beta_z z)$ trebuie pus sub o formă care să permită detalierea condițiilor la limitele *z=0* şi *z=L*; astfel, conform relațiilor (5.3.5) acest termen poate fi scris ca

$$Z_H(z) = A_1 \cos\beta_z z + A_2 \sin\beta_z z \tag{5.5.25}$$

din condiția $Z_H(0)=0$ rezultă $A_1=0$; punând acum condiția $Z_H(L)=0$ rezultă

$$\beta_z L = p\pi,\ \ p=0,1,2,... \tag{5.5.26}$$

Numărul de undă total (de rezonanță) se determină din relația

$$k_r^2 = k_{nmp}^2 = k_{1\lambda}^2 + \beta_z^2 = \left(\frac{\rho_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 = \omega_r^2\mu_0\varepsilon_1 \tag{5.5.27}$$

prin urmare frecvența de rezonanță pentru modurile $TE_{nmp}$ în rezonatoarele dielectrice are expresia generală

$$f_{r,nmp} = \frac{c_0}{2\pi\varepsilon_r^{1/2}}\left[\left(\frac{\rho_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.5.28}$$

Modul dominant $TE_{010}$ are frecvența (minimă), astfel în cadrul modelului PMP avem $\delta = 0$; în cazul când capetele rezonatorului sunt metalizate, se utilizează modelul perete electric perfect (PEP), şi se obține $\delta \cong 1$; avem

$$f_{r,010} = \frac{c_0\rho_{01}}{2\pi\, a\varepsilon_r^{1/2}} = \frac{2{,}405}{2\pi\varepsilon_r^{1/2}a}c_0 \tag{5.5.29}$$

**2°. Moduri $TM_{nmp}$**

Aceste moduri sunt definite prin componentele $E_z, E_\rho, E_\phi, H_\rho$ şi $H_\phi$. Componenta $E_{0z}(\rho,\phi)$ este soluția ecuației de propagare Helmholtz de forma (4.4.34); expresia componentei $E_z(\rho,\phi,z)$ este (4.4.36)

$$E_z(\rho,\phi,z) = E_0 J_n(k_{1\lambda}\rho)e^{-jn\phi}e^{-j\beta_z z} \tag{5.5.30}$$

Componentele magnetice transversale sunt ((4.4.40), (4.4.41))

$$H_\rho(\rho,\phi,z) = \frac{\omega\varepsilon_1}{k_{1\lambda}^2\rho}nE_0 J_n(k_{1\lambda}\rho)e^{-jn\phi}e^{-j\beta_z z} \tag{5.5.31}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z) = \frac{-j\omega\varepsilon_1}{k_{1\lambda}}E_0 J_n'(k_{1\lambda}\rho)e^{-jn\phi}e^{-j\beta_z z} \tag{5.5.32}$$

Procedând similar ca la modurile $TE_{nmp}$, se obține expresia numărului de undă total (de rezonanță)

$$k_r^2 = k_{nmp}^2 = \left(\frac{\rho'_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 = \omega_r^2\mu_0\varepsilon_1 \qquad p = 1,2,3,... \tag{5.5.33}$$

iar frecvența de rezonanță este

$$f_{r,nmp} = \frac{c_0}{2\pi\varepsilon_r^{1/2}}\left[\left(\frac{\rho'_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.5.34}$$

Modul dominant $TM_{111}$ are frecvența

$$f_{r,111} = \frac{c_0}{2\pi\varepsilon_r^{1/2}}\left[\left(\frac{\rho'_{11}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.5.35}$$

unde $\rho'_{11} = 1{,}841$.

Făcând comparație cu frecvențele şi modurile de oscilație din cavitățile rezonante metalice cilindrice se constată o *inversare*: modurile $TE_{nmp}$ din rezonatoarele dielectrice corespund modurilor $TM_{nmp}$ din cavitățile metalice; modurile $TM_{nmp}$ din rezonatoarele dielectrice corespund modurilor $TE_{nmp}$ din cavitățile metalice. Această inversare decurge din inversarea condițiilor la limită: pereții rezonatoarelor dielectrice sunt modelați prin pereți magnetici perfecți (PMP), în timp ce pereții cavităților metalice sunt modelați prin *pereți electrici perfecți* (PEP), pentru care componentele tangențiale ale câmpului electric (sau componentele normale ale câmpului magnetic) se anulează.

## 5.6. REZONATOARE ELECTROMAGNETICE DE TIP FABRY-PEROT

Odată cu creşterea frecvenţelor factorul de calitate al cavităţilor metalice clasice descreşte semnificativ, ajungând la valori inutilizabile; conform relaţiei (5.4.13) factorul de calitate $Q_c$, determinat de pierderile în metal, variază invers proporţional cu $R_s$, care la rândul său variază cu frecvenţa la puterea $1/2$, deci $Q_c \sim (1/f)^{1/2}$. De asemenea, pentru a funcţiona pe moduri dominante (frecvenţe de rezonanţe de valori minime) dimensiunile geometrice devin foarte mici, fapt ce ridică probleme de realizare tehnologică. În cazul utilizării modurilor superioare frecvenţele de rezonanţă ale modurilor învecinate vor fi foarte apropiate, fapt ce îngreunează separarea lor, astfel cavitatea rezonantă îşi pierde rolul de filtru. Aceste dificultăţi pot fi diminuate prin utilizarea rezonatoarelor deschise; în principiu există două tipuri de rezonatoare deschise: rezonatoare Fabry-Perot, şi rezonatoare dielectrice cu plăci metalice pe capete.

**1°. Rezonatoare Fabry-Perot**

Similar cu interferometrul optic Fabry-Perot, în benzile superioare de microunde (unde milimetrice şi submilimetrice) se utilizează rezonatoare electromagnetice *deschise* de tip Fabry-Perot.

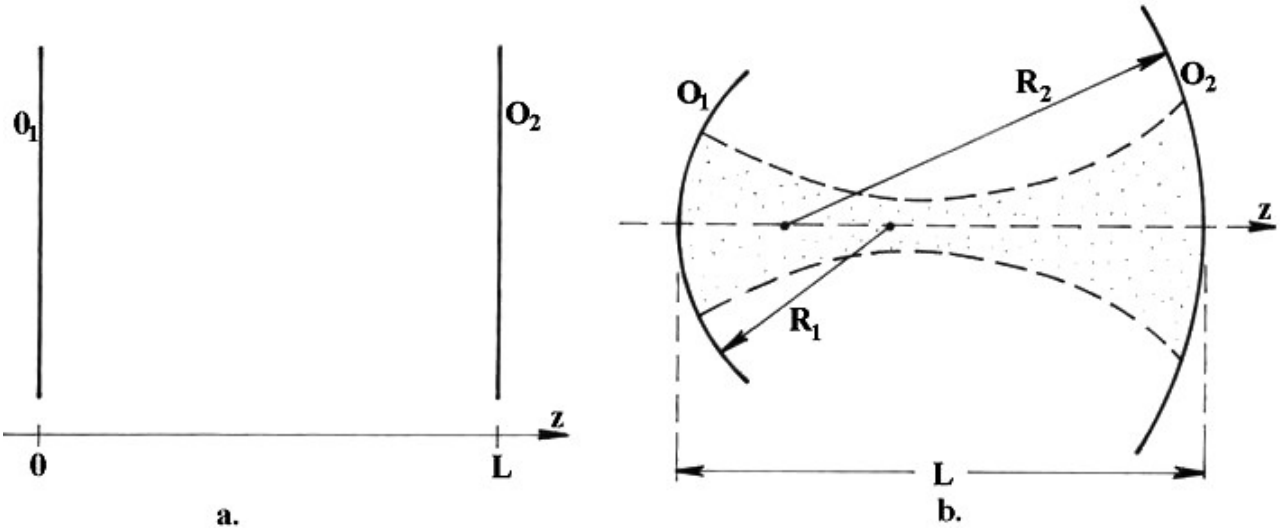



**Fig. 5.21. Rezonatoare electromagnetice Fabry-Perot: a – oglinzi paralele; b – oglinzi parabolice**

Dacă la o cavitate rezonantă cilindrică metalică se înlătură pereţii laterali are loc diminuarea pierderilor în conductoare precum şi reducerea numărului posibil de moduri rezonante. Construcţia este arătată schematic în Fig. 5.21a; în realitate pereţii metalici de capăt au forme parabolice (oglinzi), fapt ce asigură o mai bună confinare a energiei electromagnetice în spaţiul dintre oglinzi (Fig. 5.21b).

În cadrul unei analize simplificate considerăm că pereţii metalici de capăt sunt plăci paralele cu dimensiuni infinite în raport cu distanţa dintre ele; astfel se poate admite că între plăci se propagă o undă electromagnetică plană (TEM), definită prin expresiile

$$\vec{E}_x(x,y,z) = \hat{i}E_0 \sin k_0 z \tag{5.6.1}$$

$$\vec{H}_y(x,y,z) = \hat{j}(jE_0/Z_0)\cos k_0 z \tag{5.6.2}$$

unde $k_0 = \omega(\mu_0\varepsilon_0)^{1/2}$. Condiţia de rezonanţă (undă staţionară) derivă din condiţiile la limită $E_{x\,(z=0)} = 0,\ E_{x\,(z=L)} = 0$; rezultă

$$k_0 L = p\pi \qquad p = 1,2,3,... \tag{5.6.3}$$

$$f_0 = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{c_0 k_0}{2\pi} = \frac{c_0 p}{2L} \tag{5.6.4}$$

În scopul determinării factorului de calitate ne referim la unitatea de arie transversală ($1\ m^2$); expresia factorului de calitate, determinat de pierderile în conductor este (5.4.6)

$$Q_c = \omega_r \frac{W}{P_c} \tag{5.6.5}$$

unde: $W = W_E + W_H$ este energia totală înmagazinată într-un volum cu aria transversală de $1\ m^2$ şi lungimea $z = L$; $P_c$ este energia pierdută în plăci, pe unitate de arie. La rezonanță $W_H = W_E$, astfel $W = 2W_E$ iar $W_E$ are expresia (vezi (5.4.11))

$$W_E = \frac{\varepsilon_0}{4}\int_{z=o}^{L} |E_x|^2\, dz = \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2 L}{8} \tag{5.6.6}$$

Energia disipată în conductor are expresia generală (2.5.75); particularizând pentru unitatea de arie a unei plăci, în cazul nostru se poate scrie

$$P_{c1} = \frac{R_S}{2}\left|H_y(z=0)\right|^2 = \frac{R_S}{2}\frac{|E_0|^2}{Z_0^2} \tag{5.6.7}$$

Ținând cont că $W = 2W_E$ şi $P_c = 2P_{c1}$ din (5.6.5) rezultă

$$Q_c = \frac{\omega_r \varepsilon_0 Z_0^2 L}{4R_S} = \frac{c_0 \pi \varepsilon_0 Z_0^2}{4R_S}\, p = \frac{\pi Z_0}{4R_S}\, p \tag{5.6.8}$$

Pierderile dielectrice $P_d = 1/\tan\delta_E$ sunt neglijabile dacă între plăcile metalice se află aer. Din expresia (5.6.8) se constată că şi în cazul rezonatorului Fabry-Perot factorul de calitate scade cu frecvența conform legii $(1/f)^{1/2}$; acest aspect justifică diminuarea ariei plăcilor metalice. De asemenea $Q_c$ variază liniar cu $p$ (adică cu $L$) şi poate lua valori foarte mari: de exemplu pentru $f_0 = 94\ GHz$ şi $L = 4\ cm$ ($p = 25$) se obține $Q_c = 92530$ (în cazul cuprului la frecvența specificată se obține $R_S = 0{,}08\ \Omega$); la $\lambda_0 = 2mm$, şi $L = 1\ m$ ($p = 10^3$) se obține $Q_c = 295 \cdot 10^4$.

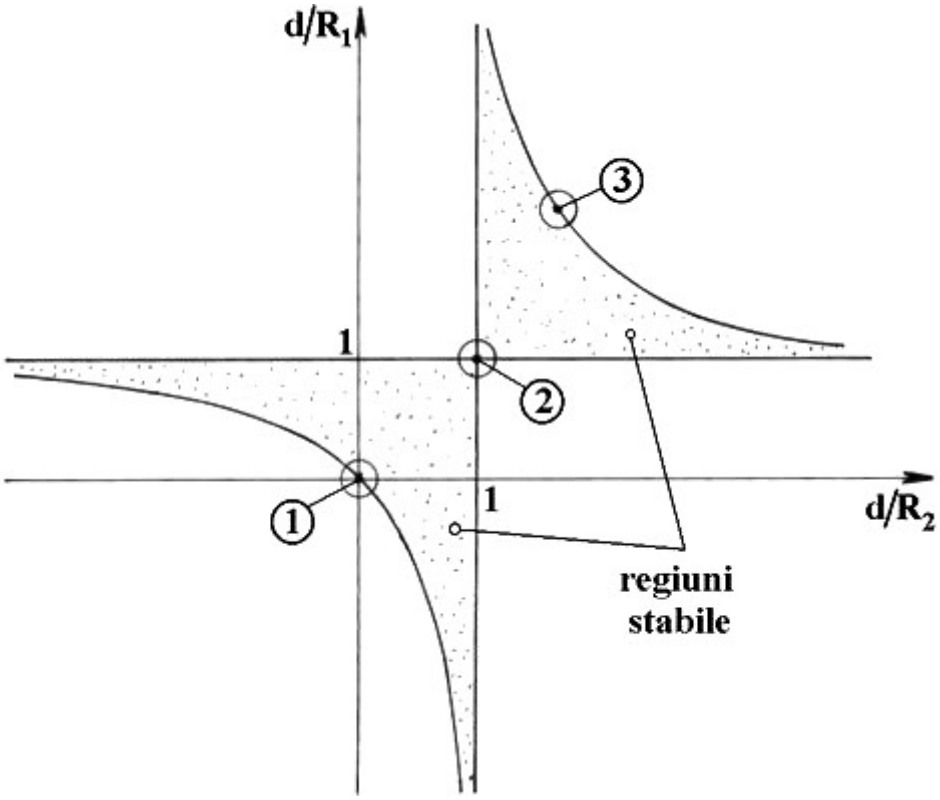



**Fig. 5.22. Regiuni şi puncte de funcționare stabilă ale rezonatorului electromagnetic „deschis”**

În construcțiile practice oglinzile de capăt au forme parabolice cu razele $R_1$, respectiv $R_2$ şi sunt amplasate la distanța $L$. Ca urmare a proprietăților de focalizare ale oglinzilor, energia poate fi confinată într-o regiune îngustă în jurul axei (rezonator stabil) aşa cum este ilustrat în Fig. 5.21b; totuşi, dacă razele de curbură şi distanța dintre oglinzi nu sunt adecvat alese este posibilă împrăştierea (pierderea) energiei în afara limitelor oglinzilor (rezonator instabil), fapt echivalent cu creşterea pierderilor şi diminuarea factorului de calitate.

În această ordine de idei este utilă o scurtă discuție asupra criteriului de stabilitate. Utilizând conceptul de raze optice se poate se poate arăta că rezonatorul din Fig. 5.21b suportă un mod stabil dacă este satisfăcută condiția

$$0 \le \left(1 - L/R_1\right)\left(1 - L/R_2\right) \le 1 \tag{5.6.9}$$

Pentru ilustrarea punctelor şi regiunilor de stabilitate ne referim la Fig. 5.22 [1]. Limitele asociate cu partea stângă a inegalității (5.6.9) sunt reprezentate prin dreptele $L/R_1 = 1,\ L/R_2 = 1$; limitele asociate cu partea dreaptă a inegalității reprezintă hiperbole având focarele în punctul $(1,1)$. Pe baza reprezentărilor din Fig. 5.22. se pot face câteva particularizări: a) *Rezonator cu oglinzi plane paralele*; în acest caz $R_1 = R_2 = \infty$ şi $L/R_1 = L/R_2 = 0$, obținându-se punctul stabil ① în originea sistemului de coordonate ales; se observă că acest punct este situat exact la limita dintre o regiune stabilă şi una instabilă, prin urmare orice deviere de la paralelismul perfect sau prezența unor iregularități ale suprafețelor poate cauza instabilitatea rezonatorului. b) *Rezonator confocal;* în acest caz $R_1 = R_2 = L$ iar funcționarea stabilă este reprezentată prin punctul ② determinat de coordonatele $(1,1)$, care de asemenea este sensibil la iregularități ale oglinzilor; c) *Rezonator concentric,* pentru care $R_1 = R_2 = L/2$; oglinzile au acelaşi centru iar funcționarea stabilă corespunde punctului ③ situat la limita dintre o regiune stabilă şi una instabilă $(2,2)$. d) *Rezonator stabil*; alegând valorile $L/R_1 = L/R_2 \cong 0{,}6$ sau $L/R_1 = L/R_2 \cong 1{,}4$ punctele de funcționare se situează aproximativ în mijlocul regiunilor stabile.

**2°. Rezonatoare dielectrice cu plăci metalice pe capete**

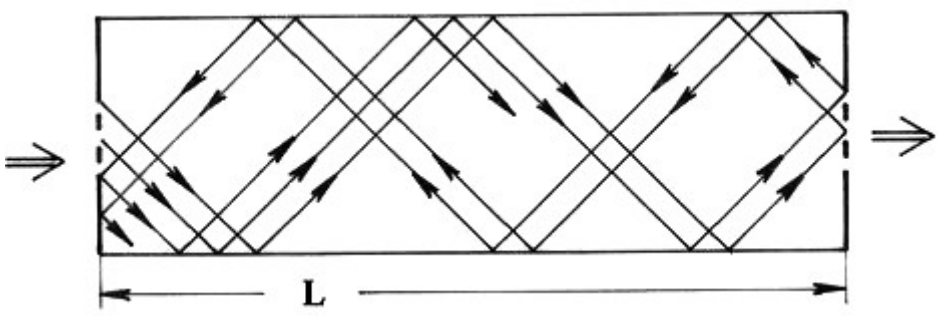



**Fig. 5. 23. Rezonator dielectric cu plăci metalice pe capete**

Acest tip de rezonatoare reprezintă în fapt rezonatoare dielectrice cu plăci metalice pe capete (Fig. 5.23), destinate să funcționeze în benzile superioare de microunde. În analiza simplificată presupunem moduri independente de $\phi$; într-o astfel de structură pot fi excitate atât moduri $TE_{0mp}$ cât şi moduri $TM_{0mp}$. Față de relațiile prezentate în secțiunea 5.5.2 se modifică numai condițiile la limită pe pereții de capete. Considerăm modul $TM_{0mp}$; conform ecuației (4.4.34) se poate scrie

$$E_z(\rho,z) = E_0 J_0(k_{1\lambda}\rho) e^{-j\beta_z z} \tag{5.6.10}$$

Componentele transversale sunt

$$E_\rho(\rho,z) = \frac{-j\beta_z}{k_{1\lambda}} E_0 J_0'(k_{1\lambda}\rho) e^{-j\beta_z z} \tag{5.6.11}$$

$$H_\phi(\rho,z) = \frac{j\omega\varepsilon_1}{k_{1\lambda}} E_0 J_0'(k_{1\lambda}\rho) e^{-j\beta_z z} \tag{5.6.12}$$

Condiția de perete magnetic perfect la $\rho = a$ presupune $H_\phi(\rho = a, z) = 0$, obținându-se $J_0'(k_{1\lambda} a) = 0$ iar $\rho_{0m}' = k_{1\lambda} a$ este rădăcina de ordin *m* a derivatei funcției Bessel. Condiția de perete electric perfect la $z = 0$ şi $z = L$ conduce la relația cunoscută $\beta_z L = p\pi,\ p = 0,1,2,...$ Aplicând metoda reflexiilor, în final se poate scrie

$$E_z(\rho, z) = E_0 J_0(\rho_{0m}' \rho / a) cos(p\pi z / L) \tag{5.6.13}$$

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{-j\beta_z}{\rho_{0m}' / a} E_0 J_0'(\rho_{0m}' \rho / a) sin(p\pi z / L) \tag{5.6.14}$$

$$H_\phi(\rho, z) = \frac{j\omega\varepsilon_1}{\rho_{0m}' / a} E_0 J_0'(\rho_{0m}' \rho / a) cos(p\pi z / L) \tag{5.6.15}$$

Numărul de undă de rezonanță are expresia generală

$$k_r^2 = k_{0mp}^2 = \left(\frac{\rho_{0m}'}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 \tag{5.6.16}$$

Modul dominant $TM_{011}$ are frecvența de oscilație

$$f_{r,011} = \frac{c_0}{2\pi\varepsilon_r^{1/2}} \left[\left(\frac{\rho_{01}'}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.6.17}$$

## 5.7. CAVITĂȚI REZONANTE MICROSTRIP

Structurile microstrip studiate în Cap.3 pot fi utilizate pentru realizarea unor tipuri diverse de componente pentru tehnica microundelor: linii de transmisie, cuploare direcționale, filtre, circulatoare, cavități rezonante, antene. În acest capitol se descriu cavitățile rezonante cu secțiuni transversale dreptunghiulare şi circulare. Structurile uzuale de cavități rezonante microstrip sunt arătate în Fig. 5.24; ele constau dintr-un perete metalic inferior (adesea numit suport), substratul dielectric şi un perete metalic superior numit *petic* (patch), a cărui formă şi dimensiuni au un rol esențial în determinarea frecvențelor de rezonanță. Datorită avantajelor importante ale cavităților microstrip (dimensiuni mici şi cost redus), ele sunt larg utilizate în echipamentele de microunde, mai ales în realizarea rețelelor de antene. Drept urmare au fost elaborate mai multe metode de analiză, unele dintre ele foarte riguroase însă extrem de laborioase. Aici se prezintă o analiză aproximativă care utilizează condiții la limită simplificate: perete electric perfect (PEP) pentru pereții metalici, inferior şi superior; perete magnetic perfect (PMP) pentru pereții laterali.

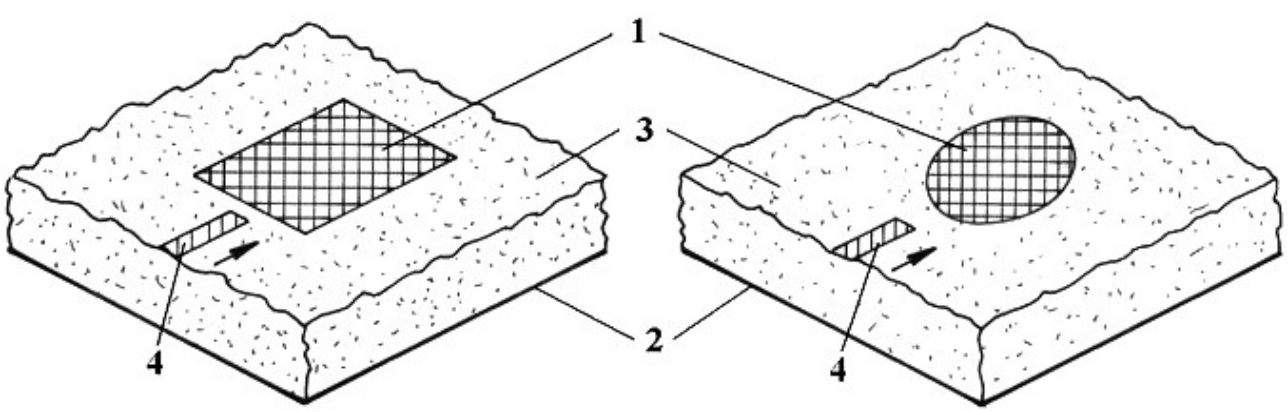



**Fig. 5. 24. Structuri uzuale de cavități rezonante microstrip: 1 – perete superior (patch=petic); 2 – perete inferior; 3 –substrat dielectric; 4 – linie microstrip de alimentare**

**1°.Cavitate rezonantă microstrip dreptunghiulară**

Aşa cum este arătat în Fig. 5.25 sistemul de coordonate este astfel ales încât să poată fi efectuată o paralelă convenabilă cu rezonatoarele dielectrice, sau cu cavitățile rezonante obținute din segmente de ghid metalic la care se înlătură pereții laterali.

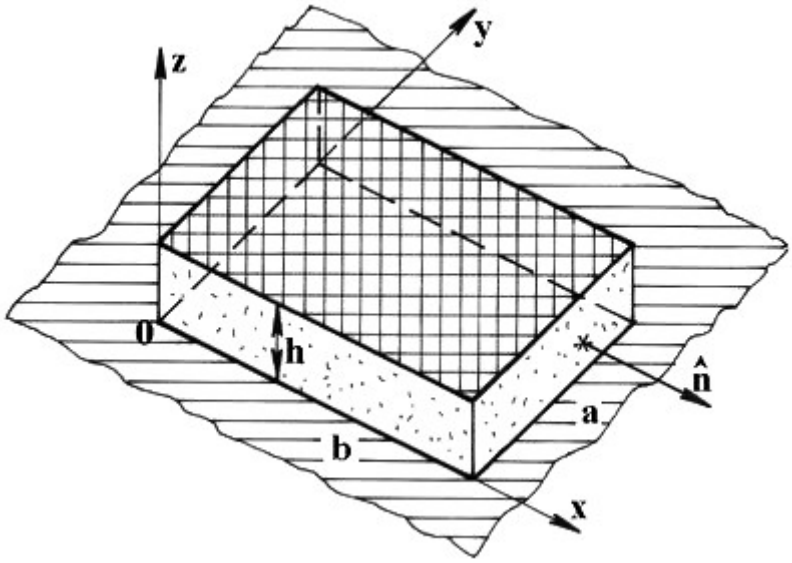



**Fig. 5.25. Cavitate rezonantă microstrip de formă dreptunghiulară**

Având în vedere că grosimea $h$ a substratului dielectric este foarte mică în comparație cu lungimea de undă $(0{,}005\lambda_0 \le h \le 0{,}05\lambda_0)$, se poate aproxima că componentele de câmp nu variază pe direcția $z$, prin urmare

$$\partial(E,H)/\partial z = 0 \tag{5.7.1}$$

Condițiile la limită pe pereții metalici de capăt $(z = 0,\ z = h)$ sunt

$$\vec{E} \times \hat{k} = 0, \quad \vec{H} \cdot \hat{k} = 0; \tag{5.7.2}$$

Condițiile la limită pe pereții magnetici laterali sunt

$$\vec{H} \times \hat{n} = 0, \quad \vec{E} \cdot \hat{n} = 0 \tag{5.7.3}$$

unde $\hat{k}$ este versorul pe direcția $z$ iar $\hat{n}$ este versorul normalei pe pereții laterali. Din ultimele relații rezultă $E_x = 0,\ E_y = 0,\ H_z = 0$; prin urmare modurile de oscilație în cavitățile microstrip vor fi preponderent $TM^z$ (transversal electromagnetic pe direcția $z$).

Aplicând metoda generală (tridimensională) de analiză avem ecuația

$$\left[\nabla^2 + k_r^2\right] E_z(x,y,z) = 0 \tag{5.7.4}$$

cu condițiile la limită specificate mai sus; pentru început se admite că atât substratul dielectric cât şi pereții metalici sunt fără pierderi. Prin utilizarea metodei separării variabilelor $E_z(x,y,z) = X_E(x)Y_E(y)Z_E(z)$ din (5.7.4) se obțin trei ecuații independente de forma (5.2.2). Soluțiile sunt de forma (5.2.4) ÷ (5.2.6) pe care le retranscriem în scopul precizării condițiilor la limită care sunt diferite

$$X_E(x) = A_1 \cos k_x x + A_2 \sin k_x x \tag{5.7.5}$$

$$Y_E(y) = B_1 \cos k_y y + B_2 \sin k_y y \tag{5.7.6}$$

$$Z_E(z) = C_1 \cos k_z z + C_2 \sin k_z z \tag{5.7.7}$$

Pe pereții metalici de capăt rămân valabile condițiile Neumann $dZ_E(z)/dz = 0$ la $z = 0$ şi $z = h$; astfel se obține $C_2 = 0$ şi $k_z = p\pi/h$. Condițiile la limită pe peretele magnetic perfect se aplică convenabil pentru componentele de câmp magnetic; aceste componente pot fi obținute fie prin utilizarea ecuațiilor Maxwell, fie pe baza relației (5.2.11) pe care o scriem sub forma

$$\vec{H}_T = \hat{i}H_x + \hat{j}H_y = \frac{-j\omega_r\varepsilon_1}{k_\lambda^2}\left[\hat{k}\times(\nabla_T E_z)\right] \tag{5.7.8}$$

unde $\varepsilon_1$ este permitivitatea substratului.

Din condiția $H_x = 0$ la $y = 0$ şi $y = b$ se obține $B_2 = 0$ şi $k_y = n\pi/b$; similar, din condiția $H_y = 0$ la $x = 0$ şi $x = a$ se obține $A_2 = 0$ şi $k_x = m\pi/a$. În final se poate scrie

$$E_z(x,y,z) = E_0\cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z) \tag{5.7.9}$$

Numărul de undă transversal $k_\lambda$ este

$$k_\lambda^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{5.7.10}$$

unde: $m = 0,1,2,...$; $n = 0,1,2,...$ însă *m* şi *n* nu pot fi concomitent egale cu zero; numărul de undă de rezonanță $k_r$ este

$$k_\lambda^2 = k_{mnp}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2 = \omega_r^2(\mu\varepsilon_1); \tag{5.7.11}$$

frecvența de rezonanță are expresia generală

$$f_r = f_{mnp} = \frac{1}{2(\mu\varepsilon_1)^{1/2}}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{h}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.7.12}$$

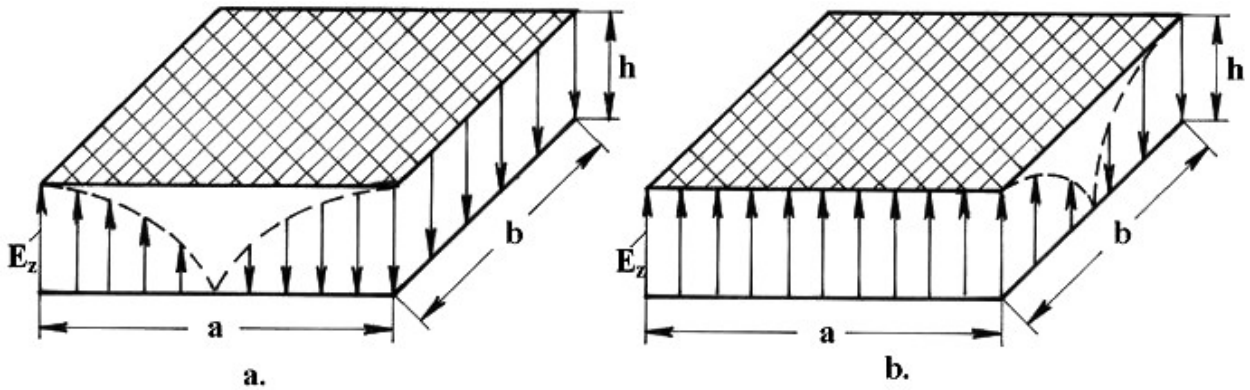



**Fig. 5. 26. Moduri dominante de oscilație în cavități, rezonanțe microstrip dreptunghiulare (linii de câmp electric): a - $\mathbf{TM}_{100}^{z}$; b - $\mathbf{TM}_{010}^{z}$**

În cazul cavităților microstrip uzuale, la care componentele nu variază pe direcția *z*, avem $p = 0$, astfel se poate scrie

$$E_z(x,y) = E_0\cos(m\pi x/a)\cos(n\pi y/b) \tag{5.7.13}$$

$$H_x = -j\omega_r\varepsilon_1 E_0\frac{n\pi}{k_\lambda^2 b}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{5.7.14}$$

$$H_y = j\omega_r\varepsilon_1 E_0\frac{m\pi}{ak_\lambda^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{5.7.15}$$

Modul de oscilație *fundamental (dominant)* cu frecvența cea mai mică depinde de raportul dintre dimensiunile *a* şi *b*: dacă $a > b$ modul fundamental este $TM^z_{100}$; dacă $a < b$ acest mod va fi $TM^z_{010}$. Configurațiile de câmp (electric) pentru modurile $TM^z_{100}$ şi $TM^z_{010}$ sunt arătate în Fig.5.26; frecvențele de rezonanță corespunzătoare sunt $\left(\mu = \mu_0,\ \varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_r\right)$

$$f_{r,100} = \frac{1}{2a\left(\mu\varepsilon_1\right)^{1/2}} = \frac{c_0}{2a\varepsilon_r^{1/2}}$$
$$f_{r,010} = \frac{1}{2b\left(\mu\varepsilon_1\right)^{1/2}} = \frac{c_0}{2b\varepsilon_r^{1/2}} \qquad (5.7.16)$$

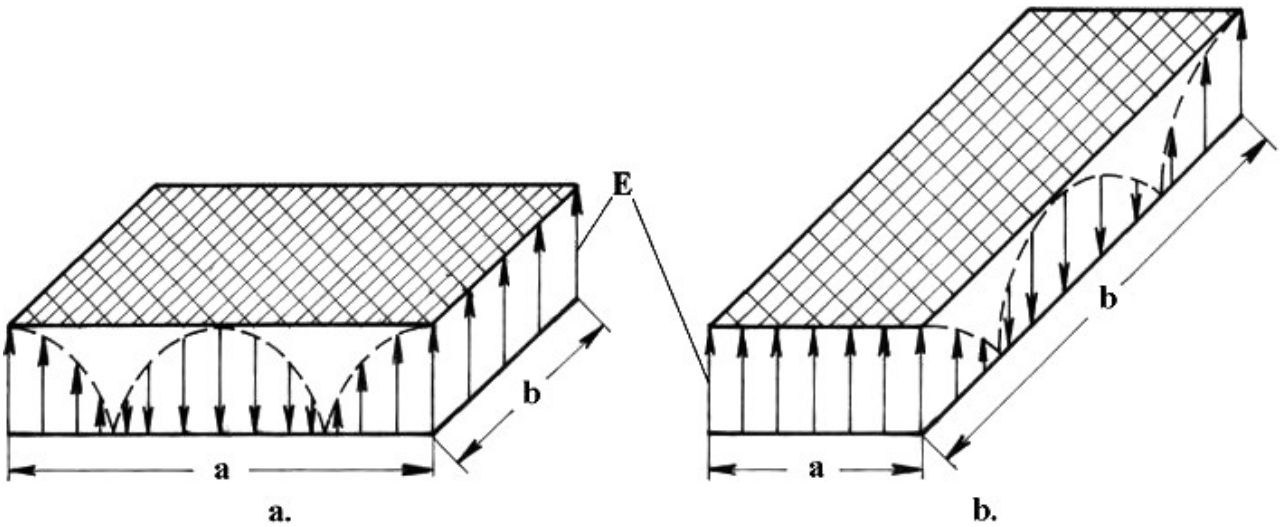



**Fig. 5.27. Moduri superioare de oscilație în cavități microstrip dreptunghiulare: a - $\mathbf{TM^z_{200}}$ ; b - $\mathbf{TM^z_{020}}$**

În cavitățile microstrip dreptunghiulare pot fi excitate şi moduri superioare: dacă se ia $m = 2$, modul corespunzător este $TM^z_{200}$ (situația este realizabilă dacă $a > 2b$); dacă se ia $n = 2$, modul corespunzător este $TM^z_{020}$ (în acest caz avem $b > 2a$). Modurile superioare $TM^z_{200}$ şi $TM^z_{020}$ sunt arătate în Fig. 5.27, iar frecvențele de rezonanță corespunzătoare au expresiile

$$f_{r,200} = \frac{c_0}{a\varepsilon_r^{1/2}},\quad f_{r,020} = \frac{c_0}{b\varepsilon_r^{1/2}} \qquad (5.7.17)$$

**2°. Cavități rezonante microstrip circulare**

Structura supusă analizei este arătată în Fig. 5.28. Având în vedere că grosimea *h* a substratului dielectric este foarte mică în aport cu $\lambda_0$, modurile uzuale de oscilație sunt de tipul $TM^z$. Ecuația Helmholtz generală pentru componenta $E_z\left(\rho,\phi,z\right)$ este de tipul (5.7.4) în care operatorul Laplace are expresia generală (5.3.2). Variația după *z* este dată de expresia (5.7.7); punând condiții Neumann pe pereții metalici de capăt $dZ_E\left(z\right)/dz = 0$ la $z = 0$ şi $z = h$ se obține $C_2 = 0$ şi $k_z = p\pi/h$. Variațiile după $\phi$ şi $\rho$ sunt descrise de ecuațiile (vezi (5.3.7) şi (5.3.8))

$$\frac{d^2\Psi_E\left(\phi\right)}{d\phi^2} + n^2\Psi_E\left(\phi\right) = 0 \qquad (5.7.18)$$

$$\rho^2\frac{d^2R_E\left(\rho\right)}{d\rho^2} + \rho\frac{dR_E\left(\rho\right)}{d\rho} + \left(\rho^2k_\lambda^2 - n^2\right)R_E\left(\rho\right) = 0 \qquad (5.7.19)$$

unde $k_\lambda$ este numărul de undă transversal. Soluțiile sunt

$$\Psi_E(\phi) = \Psi_0 \cos n\phi \tag{5.7.20}$$

$$R_E(\rho) = B_0 J_n(k_\lambda \rho) \tag{5.7.21}$$

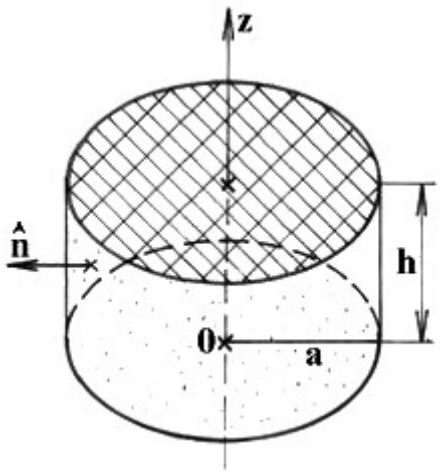



**Fig. 5.28. Cavitate rezonantă microstrip de formă cilindrică**

Expresia componentei electrice $E_z(\rho,\phi,z)$ este

$$E_z(\rho,\phi,z) = E_0 J_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \cos(p\pi z/h) \tag{5.7.22}$$

Componentele magnetice transversale $H_\rho(\rho,\phi,z)$ şi $H_\phi(\rho,\phi,z)$ sunt de forma (5.3.29), (5.3.30)

$$H_\rho(\rho,\phi,z) = \frac{-j\omega_r \varepsilon_1}{k_\lambda^2}\frac{n}{\rho} E_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \cos(p\pi z/h) \tag{5.7.23}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z) = \frac{-j\omega_r \varepsilon_1}{k_\lambda} E_0 J_n'(k_\lambda \rho)\cos n\phi \cos(p\pi z/h) \tag{5.7.24}$$

Anularea componentei $H_\phi(\rho,\phi,z)$ la $\rho = a$ impune

$$J_n'(\rho_{nm}') = 0; \quad \rho_{nm}' = k_\lambda a \tag{5.7.25}$$

unde $\rho_{nm}'$ reprezintă rădăcinile derivatei funcției Bessel; conform tabelului 2.1 avem: $n = 0,1,2,...;\ m = 1,2,3...$

Numărul de undă de rezonanță este

$$k_r^2 = k_{nmp}^2 = \left(\frac{\rho_{nm}'}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2 = \omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_1 \tag{5.7.26}$$

iar frecvența de rezonanță are expresia generală

$$f_{r,nmp} = \frac{1}{2\pi(\mu\varepsilon_1)^{1/2}}\left[\left(\frac{\rho_{nm}'}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{h}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.7.27}$$

Deoarece $h < 0{,}05\lambda_0$ componentele de câmp rămân constante pe direcția *z*, astfel în ultima relație se va lua $p = 0$, rezultând

$$f_{r,nm0} = \frac{c_0}{2\pi\varepsilon_r^{1/2}}\left(\frac{\rho_{nm}'}{a}\right) \tag{5.7.28}$$

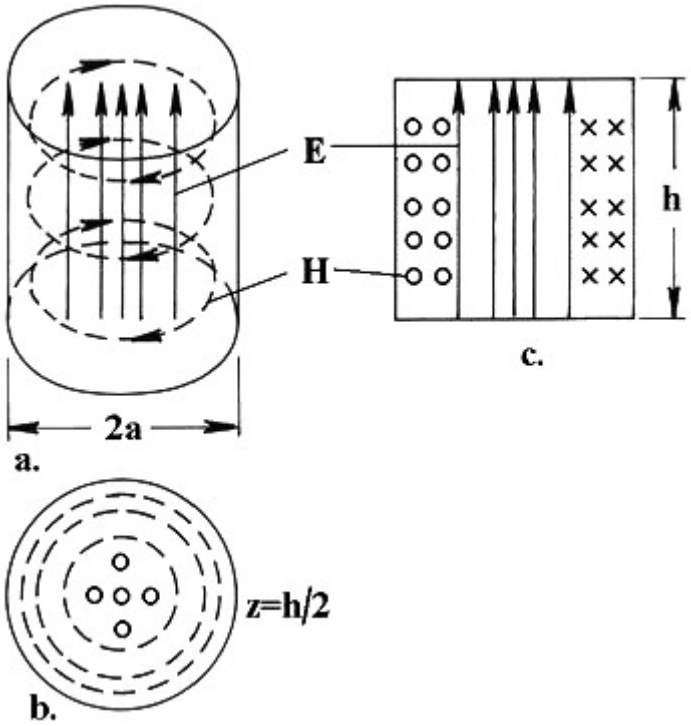



**Fig. 5.29. Configurația câmpului electromagnetic pentru modul $\mathbf{TM}_{010}^{z}$ în cavitatea microstrip cilindrică: a – vedere de ansamblu; b – secțiune transversală; c – secțiune longitudinală**

Conform tabelului 2.1 valoarea minimă a rădăcinii $\rho'_{nm}$ este $\rho'_{11} = 1{,}841$, astfel modul dominant este $TM^{z}_{110}$; următoarele moduri în ordine crescătoare a frecvenței de rezonanță vor fi $TM^{z}_{210}, TM^{z}_{010}, TM^{z}_{310}$. Configurația câmpului pentru modul $TM^{z}_{010}$ este arătată în Fig. 5.29 şi conține numai două componente: variația în plan transversal a componentei $E_z$ este determinată de $J_0(\rho'_{01}\,\rho/a)$ iar variația componentei $H_\phi$ este determinată de $J'_0(\rho'_{01}\,\rho/a)$.

*Observații*. La proiectarea structurilor practice trebuie ținut seama de efectul de *scăpări* ale câmpului electromagnetic pe pereții de margine. Proiectarea constă, de regulă, în determinarea dimensiunilor peticului superior, atunci când se dă permitivitatea $\varepsilon_r$ şi grosimea $h$ a substratului dielectric; efectele de scăpări se iau în considerare prin permitivitatea efectivă $\varepsilon_{ref}$ şi modificarea dimensiunilor peticului. Pentru $\varepsilon_{ref}$ se adoptă aproximația simplă [9]

$$\varepsilon_{ref} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}\left[1 + 12\frac{h}{a}\right]^{-1/2} \tag{5.7.29}$$

(se admite $b \cong a$). Modificarea dimensiunilor geometrice ale peticului conduce la adoptarea unor dimensiuni echivalente. În cazul cavităților dreptunghiulare avem $a_{ec} = a + 2\Delta a,\ b_{ec} = b + 2\Delta b$; $\Delta a$ şi $\Delta b$ se determină prin expresii relativ complicate. De exemplu pentru $\Delta a$ (considerând $a > b$) în [9] se dă expresia

$$\Delta a = 0{,}412h\frac{(\varepsilon_{ref} + 0{,}3)(b/h + 0{,}264)}{(\varepsilon_{ref} - 0{,}258)(b/h + 0{,}8)} \tag{5.7.30}$$

În cazul cavităților cu petic circular avem

$$a_{ec} = a\left\{1 + \frac{2h}{\pi a \varepsilon_r}\left[\ln\left(\frac{\pi a}{2h}\right) + 1{,}773\right]\right\}^{1/2}; \tag{5.7.31}$$

astfel în expresiile frecvențelor de rezonanță (5.7.12) şi (5.7.27) se vor utiliza mărimile $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r\,ef}$, $a = a_{ec}$ şi $b = b_{ec}$.

**3°. Factor de calitate**

Sunt utile câteva considerații referitoare la factorul de calitate al cavităților microstrip, avându-se în vedere natura lor *deschisă* (pereți laterali magnetici) şi prezența substratului dielectric. Factorul de calitate se defineşte prin expresia generală

$$\frac{1}{Q_T} = \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_{em}} + \frac{1}{Q_{us}} \tag{5.7.32}$$

unde factorii de calitate parțiali au semnificațiile: $Q_d$ este determinat de pierderile în substratul dielectric, $Q_c$ este determinat de pierderile în pereții metalici, $Q_{em}$ este determinat de pierderile de emisie electromagnetică prin pereții laterali, $Q_{us}$ este datorat undelor de suprafață. La cavitățile microstrip propriu-zise factorii $Q_{em}$ şi $Q_{us}$ pot fi neglijați într-o primă aproximație $(Q_{em} >> 1,\ Q_{us} >> 1)$; la cavitățile utilizate ca elemente radiante (antene) $Q_{em}$ şi $Q_{us}$ au valori finite şi afectează valoarea factorului total $Q_T$.

Ne oprim asupra factorilor $Q_d$ şi $Q_c$. Pierderile în substratul dielectric pot fi determinate din relația (5.4.15)

$$P_d = \frac{\omega_r \varepsilon''}{2} \int_V \left|\vec{E}\right|^2 dV = \frac{\omega_r \varepsilon'' h}{2} \int_S \left|\vec{E}_z\right|^2 ds \tag{5.7.33}$$

unde *S* este aria transversală. În mod echivalent se poate scrie

$$P_d = \frac{\sigma_d}{2} \int_V \left|\vec{E}\right|^2 dV = \frac{\sigma_d\, h}{2} \int_S \left|\vec{E}_z\right|^2 ds \tag{5.7.34}$$

unde $\sigma_d$ este conductivitatea substratului dielectric.

Utilizând (5.7.33) şi

$$W = \frac{\varepsilon'}{2} \int_V \left|\vec{E}\right|^2 dV = \frac{\varepsilon' h}{2} \int_S \left|\vec{E}_z\right|^2 ds \tag{5.7.35}$$

se obține expresia (5.4.17) $Q_d = 1/\tan\delta_E$, unde $\tan\delta_E = \varepsilon''/\varepsilon'$; utilizând (5.7.34) se obține

$$Q_d = \frac{\omega_r \varepsilon'}{\sigma_d} = \frac{\omega_r \varepsilon_0 \varepsilon_r'}{\sigma_d} \tag{5.7.36}$$

Egalând ultima expresie cu (5.4.17) se obține o relație uzuală pentru conductivitatea dielectricului

$$\sigma_d = \omega_r \varepsilon_0 \varepsilon_r' \tan\delta_E = \omega_r \varepsilon_0 \varepsilon_r'' \tag{5.7.37}$$

Pierderile în cei doi pereți metalici se determină după relația generală (5.4.9), pe care o particularizăm

$$P_c = 2\frac{R_S}{2} \int_S \left|\vec{H}\right|^2 ds \tag{5.7.38}$$

Utilizând pentru *W* o expresie de forma (5.4.12) avem

$$W = \frac{\mu' h}{2} \int_S \left|\vec{H}\right|^2 ds \tag{5.7.39}$$

astfel se obține

$$Q_c = \frac{\omega_r \mu' h}{2R_S} = h\left(\frac{\mu_0 \omega_r \sigma_c}{2}\right)^{1/2} \tag{5.7.40}$$

în care s-a pus $\mu' = \mu_0$, $R_S = 1/\delta_s \sigma_c$ iar $\sigma_c$ este conductivitatea pereților metalici.

Trebuie subliniat că factorul de calitate rezultant, definit aici ca

$$Q_T = \frac{Q_c Q_d}{Q_c + Q_d} \tag{5.7.41}$$

obținut în aproximația de cavitate rezonantă închisă este afectat de erori importante: a fost neglijată radiația pe pereții laterali şi existența undelor de suprafață; în (5.7.36) trebuie luată valoarea $\varepsilon_{ref}$, iar pentru calculul pierderilor $P_c$ (5.7.38) este necesar să se țină seama de distribuții specifice ale curenților $J_{sf}$ în pereții metalici.

## 5.8 PROBLEME DE NORMARE ALE COMPONENTELOR DE CÂMP ELECTROMAGNETIC ÎN GHIDURI ŞI CAVITĂȚI

În această secțiune se prezintă succint probleme referitoare la condițiile de normare ale componentelor de câmp în ghidul de undă şi cavități rezonante în raport cu puterea transmisă sau înmagazinată. Secțiunea este plasată la sfârşitul capitolului 5, cu scopul de a putea aborda toate structurile de propagare ghidată studiate în capitolele 2, 3 şi 4, precum şi sistemele rezonante din capitolul de față.

### 5.8.1 Probleme de normare în ghiduri metalice

**1°. Ghiduri de secțiune dreptunghiulară**

Dacă se admite că în ghid sunt prezente concomitent ambele moduri de propagare, $TM_{mn}$ şi $TE_{mn}$, atunci expresiile componentelor de câmp obținute în secțiunea 2.3 din Cap. 2 pot fi generalizate pentru ghiduri fără pierderi, după cum urmează

$$E_{0z}(x,y) = E_0 \sin k_x x \sin k_y y$$
$$H_{0z}(x,y) = H_0 \cos k_x x \cos k_y y$$
$$E_{0x}(x,y) = \left( \frac{-j\beta_g k_x}{k_\lambda^2} E_0 + \frac{j\omega\mu_0 k_y}{k_\lambda^2} H_0 \right) \cos k_x x \sin k_y y$$
$$E_{0y}(x,y) = \left( \frac{-j\beta_g k_y}{k_\lambda^2} E_0 - \frac{j\omega\mu_0 k_x}{k_\lambda^2} H_0 \right) \sin k_x x \cos k_y y \tag{5.8.1}$$
$$H_{0x}(x,y) = \left( \frac{j\omega\varepsilon_0 k_y}{k_\lambda^2} E_0 + \frac{j\beta_g k_x}{k_\lambda^2} H_0 \right) \sin k_x x \cos k_y y$$
$$H_{0y}(x,y) = \left( \frac{-j\omega\varepsilon_0 k_x}{k_\lambda^2} E_0 + \frac{j\beta_g k_y}{k_\lambda^2} H_0 \right) \cos k_x x \sin k_y y$$

Expresiile complete ale componentelor includ şi factorii $exp[-j\beta_g z]$ şi $exp[j\omega t]$. Mărimile $E_0 (= A_1 B_1)$ şi $H_0 (= C_2 D_2)$ constituie constante arbitrare care urmează să fie precizate prin procedura de normare. Dacă $H_0 = 0$ rezultă $H_{0z} = 0$ iar modul este numit transversal magnetic, notat $TM_{mn}$ (undă $E_{mn}$) unde *m* şi *n* se determină din condiții la limită de tipul (2.3.11), (2.3.12) utilizând şi ecuația caracteristică (2.2.36) $k_\lambda^2 = k^2 - \beta_g^2$ unde $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$; dacă $E_0 = 0$ rezultă $E_{0z} = 0$ iar modul este numit transversal electric, notat $TE_{mn}$ (undă $H_{mn}$). Trebuie subliniat că

constanta de fază $\beta_g = \beta_{mn}$ este aceiaşi pentru ambele tipuri de moduri prin urmare ea nu este suficientă pentru a identifica un mod, care uzual este caracterizat printr-o configuraţie particulară (spaţială) de câmp; fiecare din aceste configuraţii constituie un *mod normal* pentru ghidul considerat.

Mărimile $E_0$ şi $H_0$ din relaţiile (5.8.1) au fost introduse intr-o manieră arbitrară; de asemenea, aceste mărimi apar la pătrat în expresiile puterii transmise prin ghiduri, aşa cum rezultă din relaţiile prezentate în secţiunea 2.5 (relaţiile (2.5.10), (2.5.11) şi următoarele). În realitate mărimile $E_0$ şi $H_0$ reprezintă intensităţi de câmp şi trebuie să exprime corect dimensiunile acestor câmpuri: $E_0\ (V/m)$, $H_0\ (A/m)$; în aceste condiţii puterea transmisă $P_z$ trebuie exprimată în $W/m^2$, adică să reprezinte o densitate de putere. Relaţiile dintre intensităţile de câmp şi puterea transmisă pot fi stabilite prin luarea în considerare a relaţiilor (5.8.1) şi a expresiei puterii pentru un mod specificat.

Considerăm întâi *modul TM* (*undă E*). Puterea transmisă prin ghid are expresia generală (2.5.5); având în vedere că puterea este transmisă numai de componentele transversale ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, vectorul Poynting are expresia (2.5.6) pe care o detaliem sub forma

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{0T} \times \vec{H}^*_{0T}\right) = \frac{1}{2}\hat{k}\left(E_{0x}H_{0y} - E_{0y}H_{0x}\right) = \hat{k}S_z \tag{5.8.2}$$

În cazul modului $TM$, expresia finală a mărimii $S_z$ se obţine prin introducerea valorilor corespunzătoare din (5.8.1) adică $H_{0z} = 0$ şi $H_0 = 0$. Se obţine

$$S_z = \frac{-1}{2}\left[\frac{\omega\beta_g\varepsilon_0 k_x^2}{k_\lambda^4}E_0^2\cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + \frac{\omega\beta_g\varepsilon_0 k_y^2}{k_\lambda^4}E_0^2\sin^2 k_x x\cos^2 k_y y\right] \tag{5.8.3}$$

Acum puterea totală transmisă se obţine prin integrarea pe întreaga arie

$$P_{zE} = \frac{1}{2}\int_{S_0}\left|\vec{E}_{0T} \times \vec{H}^*_{0T}\right| ds = \frac{\omega\beta_g\varepsilon_0}{k_\lambda^2}E_0^2\frac{ab}{8} \tag{5.8.4}$$

în care s-a ţinut seama de relaţia $k_x^2 + k_y^2 = k_\lambda^2$ şi $S_0 = ab$.

Pentru modurile $TE_{mn}$ în (5.8.1) se ia $E_{0z} = 0$ şi $E_0 = 0$; procedând similar ca mai sus pentru $S_z$ se obţine

$$S_z = \frac{-1}{2}\left[\frac{\omega\beta_g\mu_0 k_y^2}{k_\lambda^4}H_0^2\cos^2 k_x x \sin^2 k_y y + \frac{\omega\mu_0\beta_g k_x^2}{k_\lambda^4}H_0^2\sin^2 k_x x\cos^2 k_y y\right] \tag{5.8.5}$$

Puterea transmisă are expresia

$$P_{zH} = \frac{1}{2}\frac{\omega\beta_g\mu_0}{k_\lambda^2}H_0^2\frac{ab}{8} \tag{5.8.6}$$

Trebuie precizat că dacă ghidul este umplut cu un mediu caracterizat prin parametrii electromagnetici $\varepsilon$ şi $\mu$, atunci în expresiile (5.8.4) şi (5.8.6), la numărător, se introduc mărimile $\varepsilon_r$, respectiv $\mu_r$.

Procedura de normare urmăreşte determinarea mărimilor $E_0$ şi $H_0$ în funcţie de puterea aplicată şi transportată prin ghid şi dimensiunile transversale ale ghidului. Există mai multe proceduri de normare în funcţie de definirea unităţii de putere; cea mai convenabilă procedură constă în alegerea unităţii de putere ca *watt pe metru pătrat*, adică în cazul de faţă se va lua o densitate de putere $P_n = P_z/S_0 = P_z/ab\ \left(W/m^2\right)$. Ţinând cont de (5.8.4) şi (5.8.6) se obţine

$$E_0 = \frac{2\sqrt{2}k_\lambda}{\left(\omega\varepsilon_0\beta_g\right)^{1/2}} P_{nE}^{1/2} \tag{5.8.7}$$

$$H_0 = \frac{2\sqrt{2}k_\lambda}{\left(\omega\mu_0\beta_g\right)^{1/2}} P_{nH}^{1/2} \tag{5.8.8}$$

Valorile normate ale componentelor de câmp se pot scrie:

*a) Moduri TM* $\left(H_{0z} = 0,\ H_0 = 0\right)$

$$E_{0z}(x,y) = E_{znE}\ \sin k_x x \sin k_y y \tag{5.8.9}$$

$$E_{0x}(x,y) = E_{xnE}\ \cos k_x x \sin k_y y \tag{5.8.10}$$

$$E_{0y}(x,y) = E_{ynE}\ \sin k_x x \cos k_y y \tag{5.8.11}$$

$$H_{0x}(x,y) = H_{xnE}\ \sin k_x x \cos k_y y \tag{5.8.12}$$

$$H_{0y}(x,y) = H_{ynE}\ \cos k_x x \sin k_y y \tag{5.8.13}$$

în care amplitudinile normate au expresiile (ținând cont de (5.8.7))

$$E_{znE} = E_{0n} = \frac{2\sqrt{2}\lambda_0}{\lambda_{cr}\left(1-\lambda_0^2/\lambda_{cr}^2\right)^{1/2}} \left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2}$$

$$E_{xnE} = \frac{-j\sqrt{2}k_x\lambda_{cr}}{\pi} \left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2}$$

$$E_{ynE} = \frac{-j\sqrt{2}k_y\lambda_{cr}}{\pi} \left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2} \tag{5.8.14}$$

$$H_{xnE} = \frac{j\sqrt{2}k_y\lambda_{cr}}{\pi} \left(\frac{P_{nE}}{Z_{gE}}\right)^{1/2}$$

$$H_{ynE} = \frac{-j\sqrt{2}k_x\lambda_{cr}}{\pi} \left(\frac{P_{nE}}{Z_{gE}}\right)^{1/2}$$

Se observă uşor că mărimea $\left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2}$ are dimensiunea $\left[V/m\right]$ iar $\left(P_{nE}/Z_{gE}\right)^{1/2}$ are dimensiunea $\left[A/m\right]$.

*b) Moduri TE* $\left(E_{0z} = 0,\ E_0 = 0\right)$

$$H_{0z}(x,y) = H_{znH}\ \cos k_x x \cos k_y y \tag{5.8.15}$$

$$H_{0x}(x,y) = H_{xnH}\ \sin k_x x \cos k_y y \tag{5.8.16}$$

$$H_{0y}(x,y) = H_{ynH}\ \cos k_x x \sin k_y y \tag{5.8.17}$$

$$E_{0x}(x,y) = E_{xnH}\ \cos k_x x \sin k_y y \tag{5.8.18}$$

$$E_{0y}(x,y) = E_{ynH}\ \sin k_x x \cos k_y y \tag{5.8.19}$$

în care amplitudinile normate au expresiile (ținând cont de (5.8.8))

$$H_{znH} = H_{0n} = \frac{2\sqrt{2}\lambda_0}{\lambda_{cr}\left(1-\lambda_0^2/\lambda_{cr}^2\right)^{1/2}}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}$$

$$H_{xnH} = \frac{j\sqrt{2}k_x\lambda_{cr}}{\pi}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}$$

$$H_{ynH} = \frac{j\sqrt{2}k_y\lambda_{cr}}{\pi}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2} \qquad (5.8.20)$$

$$E_{xnH} = \frac{j\sqrt{2}k_y\lambda_{cr}}{\pi}\left(Z_{gH}P_{nH}\right)^{1/2}$$

$$E_{ynH} = \frac{-j\sqrt{2}k_x\lambda_{cr}}{\pi}\left(Z_{gH}P_{nH}\right)^{1/2}$$

Se observă că mărimea $\left(P_{nH}/Z_{gH}\right)^{1/2}$ are dimensiunea $[A/m]$ iar $\left(Z_{gH}P_{nH}\right)^{1/2}$ are dimensiunea $[V/m]$.

**2°. Ghiduri de secțiune circulară**

Se consideră ghiduri fără pierderi în care pot exista ambele moduri de propagare $TE_{nm}$ şi $TM_{nm}$; expresiile componentelor longitudinale şi transversale au fost obținute în secțiunea 2.4 din Cap. 2 pe care le retranscriem

*a) Moduri* $TE_{nm}$ (unde $H_{nm}$)

$$H_{0z}(\rho,\phi) = H_0 J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi$$

$$H_{0\rho}(\rho,\phi) = \frac{-j\beta_g}{k_\lambda}H_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi$$

$$H_{0\phi}(\rho,\phi) = \frac{j\beta_g}{k_\lambda^2\rho}nH_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi \qquad (5.8.21)$$

$$E_{0\rho}(\rho,\phi) = \frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda^2\rho}nH_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi$$

$$E_{0\phi}(\rho,\phi) = \frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda}H_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi$$

unde $k_\lambda = \rho'_{nm}/a$ iar $\rho'_{nm}$ reprezintă rădăcinile derivatei funcției Bessel.

*b) Moduri* $TM_{nm}$ (unde $E_{nm}$)

$$E_{0z}(\rho,\phi) = E_0 J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi$$

$$E_{0\rho}(\rho,\phi) = \frac{-j\beta_g}{k_\lambda}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi$$

$$E_{0\phi}(\rho,\phi) = \frac{j\beta_g}{k_\lambda^2\rho}nE_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi \qquad (5.8.22)$$

$$H_{0\rho}(\rho,\phi) = \frac{-j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda^2\rho}nE_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi$$

$$H_{0\phi}(\rho,\phi) = \frac{-j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi$$

unde $k_\lambda = \rho_{nm}/a$ iar $\rho_{nm}$ reprezintă rădăcinile funcției Bessel.
Expresiile complete ale componentelor (5.8.21) şi (5.8.22) includ factorii $exp\left[-j\beta_g z\right]$, $exp\left[j\omega t\right]$.

Pentru a găsi valorile normate ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ este necesară determinarea puterii transportate în cazul celor două moduri. În acest scop se utilizează expresia generală (2.5.6), pe care o scriem sub forma

$$P_z = \frac{1}{2} Re \int_{\rho=0}^{a} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\vec{E}_{0T}(\rho,\phi) \times \vec{H}^*_{0T}(\rho,\phi)\right] \cdot \hat{k} \rho \, d\rho \, d\phi \tag{5.8.23}$$

Ținând cont de faptul că la ghidul circular componentele transversale sunt $E_{0\rho}$, $E_{0\phi}$, $H_{0\rho}$ şi $H_{0\phi}$ expresia lui $S_z$ este

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2}\left(\vec{E}_{0T} \times \vec{H}^*_{0T}\right) = \frac{1}{2}\hat{k}\left(E_{0\rho} H^*_{0\phi} - E_{0\phi} H^*_{0\rho}\right) = \hat{k} S_z \tag{5.8.24}$$

Considerăm modul $TE_{nm}$ pentru care $S_z$ devine

$$\vec{S}_z = \frac{1}{2} \frac{\omega \mu_0 \beta_g}{k_\lambda^2} |H_0|^2 \left[ \frac{n^2}{k_\lambda^2 \rho^2} J_n^2(k_\lambda \rho) sin^2 \, n\phi + J_n'^2(k_\lambda \rho) cos^2 \, n\phi \right] \tag{5.8.25}$$

Introducem această expresie în (5.8.23) şi efectuăm integrarea în raport cu $\phi$; observând că

$$\int_0^{2\pi} sin^2 \, n\phi \, d\phi = \pi, \; \int_0^{2\pi} cos^2 \, n\phi \, d\phi = \pi$$

se obține

$$P_{zH} = \frac{\omega \mu_0 \beta_g \pi}{2k_\lambda^2} |H_0|^2 \int_0^a \left[ \frac{n^2}{k_\lambda^2 \rho^2} J_n^2(k_\lambda \rho) + J_n'^2(k_\lambda \rho) \right] \rho \, d\rho \tag{5.8.26}$$

Având în vedere relația de recurență (AII, (II.2.9)) $J_n'(k_\lambda \rho) = J_{n-1}(k_\lambda \rho) - (n/k_\lambda \rho) J_n(k_\lambda \rho)$, după efectuarea integralei se obține [12]

$$P_{zH} = \frac{\omega \mu_0 \beta_g \pi a^2}{4k_\lambda^2} |H_0|^2 \left[ J_n'^2(k_\lambda a) + \frac{2}{k_\lambda a} J_n(k_\lambda a) J_n'(k_\lambda a) + \left(1 - \frac{n^2}{k_\lambda^2 a^2}\right) J_n^2(k_\lambda a) \right] \tag{5.8.27}$$

Se pune condiția la limită (2.4.24) $J_n'(k_\lambda a) = 0$ iar rădăcinile se notează $k_\lambda a = \rho'_{nm}$; expresia puterii devine

$$P_{zH} = \frac{\omega \mu_0 \beta_g \pi}{4\rho'^2_{nm}} |H_0|^2 a^4 \left[ 1 - \frac{n^2}{\rho'^2_{nm}} J_n^2(\rho'_{nm}) \right] \tag{5.8.28}$$

Procedând similar pentru modul $TM_{nm}$ se obține

$$P_{zE} = \frac{\omega \varepsilon_0 \beta_g \pi}{4\rho_{nm}^2} |E_0|^2 a^4 J_n'^2(\rho_{nm}) \tag{5.8.29}$$

unde $\rho_{nm} = k_\lambda a$ reprezintă rădăcinile funcției $J_n(k_\lambda a) = 0$.

La fel ca şi în cazul ghidurilor dreptunghiulare procedura de normare urmăreşte determinarea mărimilor $E_0$ şi $H_0$ în funcție de puterea transportată pe unitate de arie (densitate de putere), astfel încât $E_0$ să fie exprimat în $V/m$ iar $H_0$ în $A/m$. Densitatea de putere se defineşte ca $P_n = P_z/S_0 = P_z/\pi a^2$; astfel utilizând (5.8.28), (5.8.29) se poate scrie:

- moduri $TE_{nm}$

$$H_0 = \frac{2\rho'_{nm}}{a\left(\omega\mu_0\beta_g\right)^{1/2}\left[1-\left(n^2/\rho'^2_{nm}\right)J_n^2\left(\rho'_{nm}\right)\right]^{1/2}}P_{nH}^{1/2}; \tag{5.8.30}$$

- moduri $TM_{nm}$

$$E_0 = \frac{2\rho_{nm}}{a\left(\omega\varepsilon_0\beta_g\right)^{1/2}J'_n\left(\rho_{nm}\right)}P_{nE}^{1/2} \tag{5.8.31}$$

În cazul particular când $n=0$, în loc de *2* la numărător se va pune $\sqrt{2}$ iar în (5.8.30) dispare al doilea termen din paranteza numitorului. Valorile normate ale componentelor de câmp pentru modurile $TE_{nm}$ se scriu

$$H_{0z}(\rho,\phi) = H_{znH}J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{5.8.32}$$

$$H_{0\rho}(\rho,\phi) = H_{\rho nH}J'_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{5.8.33}$$

$$H_{0\phi}(\rho,\phi) = H_{\phi nH}\frac{J_n(k_\lambda\rho)}{\rho}\sin n\phi \tag{5.8.34}$$

$$E_{0\rho}(\rho,\phi) = E_{\rho nH}\frac{J_n(k_\lambda\rho)}{\rho}\sin n\phi \tag{5.8.35}$$

$$E_{0\phi}(\rho,\phi) = E_{\phi nH}J'_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{5.8.36}$$

în care amplitudinile normate au expresiile (ţinând cont de (5.8.30))

$$\begin{aligned}
H_{znH} &= \frac{2\rho'_{nm}}{\beta_g aA^{1/2}}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}\\
H_{\rho nH} &= \frac{-j2\rho'_{nm}}{k_\lambda aA^{1/2}}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}\\
H_{\phi nH} &= \frac{j2n\rho'_{nm}}{k_\lambda^2 aA^{1/2}}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}\\
E_{\rho nH} &= \frac{j2n\rho'_{nm}}{k_\lambda^2 aA^{1/2}}\left(Z_{gH}P_{nH}\right)^{1/2}\\
E_{\phi nH} &= \frac{j2\rho'_{nm}}{k_\lambda aA^{1/2}}\left(Z_{gH}P_{nH}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.8.37}$$

unde s-a notat $A = \left[1-\left(n^2/\rho'^2_{nm}\right)J_n^2\left(\rho'_{nm}\right)\right]$.

Valorile normate ale componentelor de câmp pentru modurile $TM_{nm}$ se determină în mod similar

$$E_{0z}(\rho,\phi) = E_{znE}J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{5.8.38}$$

$$E_{0\rho}(\rho,\phi) = E_{\rho nE}J'_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{5.8.39}$$

$$E_{0\phi}(\rho,\phi) = E_{\phi nE}\left(J_n(k_\lambda\rho)/\rho\right)\sin n\phi \tag{5.8.40}$$

$$H_{0\rho}(\rho,\phi)=H_{\rho nE}\left(J_n(k_\lambda\rho)/\rho\right)\sin n\phi \tag{5.8.41}$$

$$H_{0\phi}(\rho,\phi)=H_{\phi nE}J'_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{5.8.42}$$

în care amplitudinile normate au expresiile (ținând cont de (5.8.31))

$$\begin{aligned}
E_{znE}&=\frac{2\rho_{nm}}{\beta_g aJ'_n(\rho_{nm})}\left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2}\\
E_{\rho nE}&=\frac{-j2\rho_{nm}}{k_\lambda aJ'_n(\rho_{nm})}\left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2}\\
E_{\phi nE}&=\frac{j2n\rho_{nm}}{k_\lambda^2 aJ'_n(\rho_{nm})}\left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2}\\
H_{\rho nE}&=\frac{-j2n\rho_{nm}}{k_\lambda^2 aJ'_n(\rho_{nm})}\left(\frac{P_{nE}}{Z_{gE}}\right)^{1/2}\\
H_{\phi nE}&=\frac{-j2\rho_{nm}}{k_\lambda aJ'_n(\rho_{nm})}\left(\frac{P_{nE}}{Z_{gE}}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.8.43}$$

### 5.8.2 Probleme de normare în unele structuri particulare de propagare ghidată.

**1°. Ghiduri metalice coaxiale**

*a) Modul fundamental TEM*. În acest caz componentele de câmp sunt date de relațiile (3.2.25) şi (3.2.27)

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{0T}(\rho,\phi)&=\vec{E}_{0\rho}(\rho,\phi)=\hat{\rho}\frac{U_0}{\rho\ln(b/a)}\\
\vec{H}_{0T}(\rho,\phi)&=\vec{H}_{0\rho}(\rho,\phi)=\hat{\phi}\frac{U_0}{Z_0\rho\ln(b/a)}
\end{aligned} \tag{5.8.44}$$

unde $Z_0=(\mu/\varepsilon)^{1/2}$ este impedanța de undă a mediului dintre conductoare; puterea aplicată şi transmisă este

$$P_z=\frac{1}{2}\int_{S_0}\left|\vec{E}_{0\rho}\times\vec{H}^*_{0\phi}\right|\cdot d\vec{s}=\frac{1}{2}\int_{\rho=a}^{b}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\frac{U_0^2}{Z_0^2\rho^2\ln^2(b/a)}\right]\rho\,d\rho\,d\phi \tag{5.8.45}$$

Efectuând integrarea întâi după $\phi$ rezultă factorul $2\pi$, astfel ultima relație se poate pune sub forma

$$P_z=\frac{\pi U_0^2}{Z_0\ln^2(b/a)}\int_{\rho=a}^{b}\frac{1}{\rho}d\rho=\frac{\pi U_0^2}{Z_0\ln(b/a)} \tag{5.8.46}$$

Definind $P_n=P_z/S_0$ unde $S_0=\pi\left(b^2-a^2\right)$ obținem

$$P_n=\frac{U_0^2}{\left(b^2-a^2\right)Z_0\ln(b/a)} \tag{5.8.47}$$

de unde rezultă

$$U_0=\left[\left(b^2-a^2\right)Z_0\ln(b/a)\right]^{1/2}P_n^{1/2} \tag{5.8.48}$$

Expresiile (5.8.44) se pot scrie sub forma

$$E_{0\rho}(\rho,\phi)=E_{\rho n}\frac{1}{\rho};\quad H_{0\phi}(\rho,\phi)=H_{\phi n}\frac{1}{\rho} \tag{5.8.49}$$

în care s-a notat

$$E_{\rho n}=\frac{\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{ln^{1/2}(b/a)}(Z_0P_n)^{1/2};\ H_{\phi n}=\frac{\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{ln^{1/2}(b/a)}\left(\frac{P_n}{Z_0}\right)^{1/2} \tag{5.8.50}$$

*b) Moduri superioare*. În aplicațiile uzuale modurile superioare în ghidurile coaxiale sunt foarte rar utilizate. Aceste moduri pot fi excitate accidental datorită unor fenomene parazite; ele pot să perturbe funcționarea normală, astfel este necesară cunoaşterea unor relații de bază referitoare la valorile normate ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ şi a puterii $P_n$.

*Moduri* $TE_{nm}$. Ca exemplu considerăm modurile $TE_{nm}$ tratate în secțiunea 3.2 din Cap.3; facem uz de relațiile obținute în acea secțiune precum şi cele prezentate în referința [12].

Componentele de câmp au expresiile

$$\begin{aligned}
H_{0z}(\rho,\phi)&=H_0C_n(k_\lambda\rho)cos\,n\phi\\
H_{0\rho}(\rho,\phi)&=\frac{-j\beta_g}{k_\lambda}H_0C_n'(k_\lambda\rho)cos\,n\phi\\
H_{0\phi}(\rho,\phi)&=\frac{j\beta_g n}{k_\lambda^2\rho}H_0C_n(k_\lambda\rho)sin\,n\phi\\
E_{0\rho}(\rho,\phi)&=\frac{j\omega\mu_0 n}{k_\lambda^2\rho}H_0C_n(k_\lambda\rho)sin\,n\phi\\
E_{0\phi}(\rho,\phi)&=\frac{j\omega\mu_0}{k_\lambda}H_0C_n'(k_\lambda\rho)cos\,n\phi
\end{aligned} \tag{5.8.51}$$

în care s-a notat

$$H_0=\frac{\Psi_0A_1}{N_n'(\rho_{nm}')};\ C_n(k_\lambda\rho)=J_n(k_\lambda\rho)N_n'(k_\lambda a)-J_n'(k_\lambda a)N_n(k_\lambda\rho) \tag{5.8.52}$$

iar $J_n$ şi $N_n$ sunt funcții Bessel, respectiv Neumann.

Puterea transmisă se calculează după o relație similară cu (5.8.28), obținându-se [12]

$$P_{zH}=\frac{\omega\mu_0\beta_g\pi|H_0|^2}{4k_\lambda^2}\left[a^2\left(1-\frac{n^2}{k_\lambda^2a^2}\right)C_n^2(k_\lambda a)-b^2\left(1-\frac{n^2}{k_\lambda^2b^2}\right)C_n(k_\lambda b)\right] \tag{5.8.53}$$

Definind densitatea de putere ca $P_{nH}=P_{zH}/S_0$, unde $S_0=\pi\left(b^2-a^2\right)$, se poate scrie

$$H_0=\frac{2k_\lambda\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{\left(\omega\mu_0\beta_g\right)^{1/2}}\frac{1}{\left[a^2-\left(n^2/k_\lambda^2\right)C_n^2(k_\lambda a)-b^2+\left(n^2/k_\lambda^2\right)C_n^2(k_\lambda b)\right]^{1/2}}P_{nH}^{1/2} \tag{5.8.54}$$

Valorile normate ale componentelor de câmp pentru modurile superioare $TE_{nm}$ sunt

$$H_{0z}(\rho,\phi)=H_{znH}C_n(k_\lambda\rho)cos\,n\phi \tag{5.8.55}$$

$$H_{0\rho}(\rho,\phi)=H_{\rho nH}C_n'(k_\lambda\rho)cos\,n\phi \tag{5.8.56}$$

$$H_{0\phi}(\rho,\phi)=H_{\phi nH}\left[C_n(k_\lambda\rho)/\rho\right]sin\,n\phi \tag{5.8.57}$$

$$E_{0\rho}(\rho,\phi) = E_{\rho nH}\left[C_n(k_\lambda\rho)/\rho\right]\sin n\phi \tag{5.8.58}$$

$$E_{0\phi}(\rho,\phi) = E_{\phi nH}C_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi \tag{5.8.59}$$

în care amplitudinile normate au expresiile (ținând cont de (5.8.54))

$$\begin{aligned}
H_{znH} &= \frac{2k_\lambda\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{\beta_g A^{1/2}}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}\\
H_{\rho nH} &= \frac{-j2\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{A^{1/2}}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}\\
H_{\phi nH} &= \frac{j2n\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{k_\lambda A^{1/2}}\left(\frac{P_{nH}}{Z_{gH}}\right)^{1/2}\\
E_{\rho nH} &= \frac{j2n\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{k_\lambda A^{1/2}}\left(Z_{gH}P_{nH}\right)^{1/2}\\
E_{\phi nH} &= \frac{j2\left(b^2-a^2\right)^{1/2}}{A^{1/2}}\left(Z_{gH}P_{nH}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.8.60}$$

în care s-a notat: $Z_{gH} = \left(\omega\mu_0/\beta_g\right)^{1/2}$ ; $A = \left[a^2 - \left(n^2/k_\lambda^2\right)C_n^2(k_\lambda a) - b^2 + \left(n^2/k_\lambda^2\right)C_n^2(k_\lambda b)\right]$.

**2°. Ghiduri cu plăci metalice paralele**

Ne oprim asupra modurilor $TM_n$ întrucât modul $TM_0$ este identic cu modul de interes transversal electromagnetic *TEM*. Expresiile componentelor de câmp sunt obținute în secțiunea 3.3 din Cap. 3, pe care le retranscriem (s-a ținut cont că $(\partial/\partial x) = 0$)

$$\begin{aligned}
E_{0z}(x,y) &= E_0 \sin k_y y\\
E_{0y}(x,y) &= \frac{-j\beta_g}{k_\lambda}E_0\cos k_y y\\
H_{0x}(x,y) &= \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_\lambda}E_0\cos k_y y
\end{aligned} \tag{5.8.61}$$

unde $k_\lambda = k_y = n\pi/d$ . Expresia puterii transmise prin astfel de ghiduri este (3.3.33)

$$P_{zE} = \frac{\omega\varepsilon_0 wd}{4k_\lambda^2}\left|E_0\right|^2\beta_g \tag{5.8.62}$$

Densitatea de putere $\left(W/m^2\right)$ se obține prin raportarea mărimii $P_{zE}$ la suprafața transversală $S_0 = wd$ .

$$P_{nE} = \frac{P_{zE}}{S_0} = \frac{\omega\varepsilon_0\beta_g\left|E_0\right|^2}{4k_\lambda^2} \tag{5.8.63}$$

din care scoatem

$$E_0 = \frac{2k_\lambda}{\beta_g}\left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2} \tag{5.8.64}$$

dacă $n = 0$ rezultă modul *TEM* iar în ultima relație la numărător în loc de *2* se va pune $\sqrt{2}$ .

Valorile normate ale componentelor de câmp se scriu

$$E_{0z}(x,y) = E_{znE}\sin k_y y \tag{5.8.65}$$

$$E_{0y}(x,y) = E_{ynE}\cos k_y y \tag{5.8.66}$$

$$H_{0x}(x,y) = H_{xnE}\cos k_y y \tag{5.8.67}$$

în care

$$E_{znE} = \frac{2k_\lambda}{\beta_g}\left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2};\ E_{ynE} = -j2\left(Z_{gE}P_{nE}\right)^{1/2};\quad H_{xnE} = j2\left(P_{nE}/Z_{gE}\right)^{1/2} \tag{5.8.68}$$

### 5.8.3 Probleme de normare în cavități rezonante.

**1°. Cavități metalice paralelipipedice**

Expresiile componentelor de câmp sunt obținute în secțiunea 5.2

*a) Moduri* $TM_{mnp}$

$$E_z(x,y,z) = E_0 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{-k_x k_z}{k_\lambda^2} E_0 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{-k_y k_z}{k_\lambda^2} E_0 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z \tag{5.8.69}$$

$$H_x(x,y,z) = \frac{j\omega_r \varepsilon_0 k_y}{k_\lambda^2} E_0 \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{j\omega_r \varepsilon_0 k_x}{k_\lambda^2} E_0 \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z$$

unde $k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$, $k_z = p\pi/c$ şi $m=1,2,3,\ldots$, $n=1,2,3,\ldots$, $p=0,1,2,\ldots$

*b) Moduri* $TE_{mnp}$

$$H_z(x,y,z) = H_0 \cos k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

$$H_x(x,y,z) = \frac{-k_x k_z}{k_\lambda^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \cos k_z z$$

$$H_y(x,y,z) = \frac{-k_y k_z}{k_\lambda^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \cos k_z z \tag{5.8.70}$$

$$E_x(x,y,z) = \frac{j\omega_r \mu_0 k_y}{k_\lambda^2} H_0 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z$$

$$E_y(x,y,z) = \frac{-j\omega_r \mu_0 k_x}{k_\lambda^2} H_0 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z$$

unde mărimile *m, n, p* pot lua valorile $m = 0,1,2,\ldots, n = 0,1,2,\ldots, p = 1,2,3,\ldots$; însă *m* şi *n* nu pot fi concomitent zero.

În general modurile descrise de (5.8.69) şi (5.8.70) se numesc *moduri normale*; ele pot fi excitate şi concomitent fie în mod intenționat, fie în mod accidental ca urmare a imperfecțiunilor sistemelor de cuplaj sau a neuniformităților din interiorul cavității.

Normarea factorilor $E_0$ şi $H_0$ necesită determinarea energiei electromagnetice reactive totale, înmagazinată în cavitate. Ținem cont de teorema Poynting (relațiile de definiție (1.4.35), (1.4.36)); se poate scrie

$$W = \frac{1}{4}\int_{V_c}\left[\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2 + \mu_0\left|\vec{H}\right|^2\right]dV \tag{5.8.71}$$

unde $V_c$ este volumul cavității; mărimile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ includ toate componentele corespunzătoare unui mod de oscilație.

Ne referim întâi la modurile $TM_{mnp}$, pentru care avem

$$W_E = \frac{1}{4}\int_{V_c} \varepsilon_0 E_0^2 \left[ S_x^2 S_y^2 C_z^2 + \frac{k_x^2 k_z^2}{k_\lambda^4} C_x^2 S_y^2 S_z^2 + \frac{k_y^2 k_z^2}{k_\lambda^4} S_x^2 C_y^2 S_z^2 + \right. \\ \left. + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 k_y^2}{k_\lambda^4} S_x^2 C_y^2 C_z^2 + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 k_x^2}{k_\lambda^4} C_x^2 S_y^2 C_z^2 \right] dxdydz \tag{5.8.72}$$

în care pentru simplitate s-a notat [12]: $S_x = sin(k_x x)$, $C_x = cos(k_x x)$ etc.; ținând cont de relații de forma

$$\int_0^a S_x^2 dx = a/2, \ \int_0^a C_x^2 dx = a/2, \ \int_0^b S_y^2 dy = b/2 \ , \ \text{etc.}$$

în final se obține

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V_c}{4}\left[\frac{1}{8} + \frac{m^2 p^2 \pi^4}{8k_\lambda^4 a^2 c^2} + \frac{n^2 p^2 \pi^4}{8k_\lambda^4 b^2 c^2} + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0}{8k_\lambda^4}\left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)\right] = \\ = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V_c}{32k_\lambda^4}\left[k_\lambda^4 + \frac{m^2 p^2 \pi^4}{a^2 c^2} + \frac{n^2 p^2 \pi^4}{b^2 c^2} + \omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right] \tag{5.8.73}$$

unde $V_c = abc$.

Ținând cont de notația $k_\lambda^2 = k_x^2 + k_y^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ şi de relațiile

$$k_r^2 = k_{mnp}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 4\pi^2 / \lambda_r^2$$

$$(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/c)^2 = 4 f_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tag{5.8.74}$$

se ajunge la expresia

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V_c}{4\lambda_r^2\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]} \tag{5.8.75}$$

Procedând similar pentru modurile $TE_{mnp}$ se obține

$$W_H = \frac{\mu_0 H_0^2 V_c}{4\lambda_r^2\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]} \tag{5.8.76}$$

Atât $W_E$ (5.8.75) cât şi $W_H$ (5.8.76) reprezintă suma energiilor înmagazinate în câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ şi se măsoară în *Joule*; dacă una dintre mărimile *m, n, p* este zero, atunci ultimele două expresii se multiplică cu *2*.

Densitățile de energie pentru cele două moduri se vor scrie

$$W_{nE} = \frac{W_E}{V_c} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4\lambda_r^2\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]} \tag{5.8.77}$$

$$W_{nH} = \frac{W_H}{V_c} = \frac{\mu_0 H_0^2}{4\lambda_r^2\left[(m/a)^2 + (n/b)^2\right]} \tag{5.8.78}$$

Mărimile normate $E_0$ şi $H_0$ sunt

$$E_0 = \frac{2\lambda_r}{\varepsilon_0^{1/2}}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2} W_{nE}^{1/2} \tag{5.8.79}$$

$$H_0 = \frac{2\lambda_r}{\mu_0^{1/2}}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2} W_{nH}^{1/2} \tag{5.8.80}$$

Dacă mărimile electromagnetice se exprimă în unități SI ($W$ în *joule*; $a$, $b$, $c$, $\lambda_r$ în $m$; $V_c$ în $m^3$; $\varepsilon_0 = 1/36\pi\times 10^9\ F/m$, $\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\ H/m$), atunci unitățile de măsurare pentru $E_0$ și $H_0$ sunt $(V/m)$, respectiv $(A/m)$.

Valorile normate ale componentelor de câmp pentru *modurile* $TM_{mnp}$ sunt:

$$E_z(x,y,z) = E_{znE}\,sin(k_x x)sin(k_y y)cos(k_z z) \tag{5.8.81}$$

$$E_x(x,y,z) = E_{xnE}\,cos(k_x x)sin(k_y y)sin(k_z z) \tag{5.8.82}$$

$$E_y(x,y,z) = E_{ynE}\,sin(k_x x)cos(k_y y)sin(k_z z) \tag{5.8.83}$$

$$H_x(x,y,z) = H_{xnE}\,sin(k_x x)cos(k_y y)cos(k_z z) \tag{5.8.84}$$

$$H_y(x,y,z) = H_{ynE}\,cos(k_x x)sin(k_y y)cos(k_z z) \tag{5.8.85}$$

în care

$$\begin{aligned} E_{znE} &= E_0 = \frac{2\lambda_r k_\lambda}{\pi}\left(\frac{W_{nE}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \\ E_{xnE} &= -\frac{2k_x k_z \lambda_r}{\pi k_\lambda}\left(\frac{W_{nE}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \\ E_{ynE} &= -\frac{2k_y k_z \lambda_r}{\pi k_\lambda}\left(\frac{W_{nE}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \\ H_{xnE} &= \frac{j4k_y}{k_\lambda}\left(\frac{W_{nE}}{\mu_0}\right)^{1/2} \\ H_{ynE} &= \frac{j4k_x}{k_\lambda}\left(\frac{W_{nE}}{\mu_0}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{5.8.86}$$

Este ușor de observat că expresia $[W_{nE}/\varepsilon_0]^{1/2}$ are dimensiunile $V/m$, iar $[W_{nE}/\mu_0]^{1/2}$ are dimensiunile $A/m$.

Valorile normate ale componentelor de câmp pentru *modurile* $TE_{mnp}$ sunt

$$H_z(x,y,z) = H_{znH}\,cos(k_x x)cos(k_y y)sin(k_z z) \tag{5.8.87}$$

$$H_x(x,y,z) = H_{xnH}\,sin(k_x x)cos(k_y y)cos(k_z z) \tag{5.8.88}$$

$$H_y(x,y,z) = H_{ynH}\,cos(k_x x)sin(k_y y)cos(k_z z) \tag{5.8.89}$$

$$E_x(x,y,z) = E_{xnH}\,cos(k_x x)sin(k_y y)sin(k_z z) \tag{5.8.90}$$

$$E_y(x,y,z) = E_{ynH}\,sin(k_x x)cos(k_y y)sin(k_z z) \tag{5.8.91}$$

în care

$$
\begin{aligned}
H_{znH} &= H_0 = \frac{2k_\lambda \lambda_r}{\pi}\left(\frac{W_{nH}}{\mu_0}\right)^{1/2} \\
H_{xnH} &= \frac{-2k_x k_z \lambda_r}{\pi k_\lambda}\left(\frac{W_{nH}}{\mu_0}\right)^{1/2} \\
H_{ynH} &= \frac{-2k_y k_z \lambda_r}{\pi k_\lambda}\left(\frac{W_{nH}}{\mu_0}\right)^{1/2} \\
E_{xnH} &= \frac{j4k_y}{k_\lambda}\left(\frac{W_{nH}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \\
E_{ynH} &= \frac{-j4k_x}{k_\lambda}\left(\frac{W_{nH}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{5.8.92}
$$

unde $\left[W_{nH}/\mu_0\right]^{1/2}$ are dimensiunile $A/m$, iar $\left[W_{nH}/\varepsilon_0\right]^{1/2}$ are dimensiunile $V/m$.

**2°. Cavități metalice cilindrice**

Expresiile componentelor de câmp sunt obținute în secțiunea 5.3:

*a) Moduri* $TM_{nmp}$

$$
\begin{aligned}
E_z(\rho,\phi,z) &= E_0 J_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \cos k_z z \\
E_\rho(\rho,\phi,z) &= -(k_z/k_\lambda)E_0 J_n'(k_\lambda \rho)\cos n\phi \sin k_z z \\
E_\phi(\rho,\phi,z) &= \left(k_z n/k_\lambda^2 \rho\right)E_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \sin k_z z \\
H_\rho(\rho,\phi,z) &= \frac{-j\omega_r \varepsilon_0}{k_\lambda^2}\frac{n}{\rho}E_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \cos k_z z \\
H_\phi(\rho,\phi,z) &= \frac{-j\omega_r \varepsilon_0}{k_\lambda}E_0 J_n'(k_\lambda \rho)\cos n\phi \cos k_z z
\end{aligned}
\tag{5.8.93}
$$

*b) Moduri* $TE_{nmp}$

$$
\begin{aligned}
H_z(\rho,\phi,z) &= H_0 J_n(k_\lambda \rho)\cos n\phi \sin k_z z \\
H_\rho(\rho,\phi,z) &= (k_z/k_\lambda)H_0 J_n'(k_\lambda \rho)\cos n\phi \cos k_z z \\
H_\phi(\rho,\phi,z) &= -\frac{k_z n}{k_\lambda^2 \rho}H_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \cos k_z z \\
E_\rho(\rho,\phi,z) &= \frac{j\omega_r \mu_0 n}{k_\lambda^2 \rho}H_0 J_n(k_\lambda \rho)\sin n\phi \sin k_z z \\
E_\phi(\rho,\phi,z) &= \frac{j\omega_r \mu_0}{k_\lambda}H_0 J_n'(k_\lambda \rho)\cos n\phi \sin k_z z
\end{aligned}
\tag{5.8.94}
$$

Pentru normarea factorilor $E_0$ şi $H_0$ se calculează energia reactivă înmagazinată în cavitate. Expresia generală a acestei energii este dată de (5.8.71); pentru *modul* $TM_{nmp}$ avem

$$
\begin{aligned}
W_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\int_{V_c}\Bigg[ & J_n^2 C_\phi^2 C_z^2 + \frac{k_z^2}{k_\lambda^2}J_n'^2 C_\phi^2 S_z^2 + \frac{n^2 k_z^2}{k_\lambda^4 \rho^2}J_n^2 S_\phi^2 S_z^2 + \\
& + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 n^2}{k_\lambda^4 \rho^2}J_n^2 S_\phi^2 C_z^2 + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0}{k_\lambda^2}J_n'^2 C_\phi^2 C_z^2 \Bigg] dV
\end{aligned}
\tag{5.8.95}
$$

În această relație argumentul funcțiilor Bessel este $(k_\lambda \rho)$; funcțiile trigonometrice sunt notate $C_\phi = \cos n\phi,\ C_z = \cos k_z z,\ S_\phi = \sin n\phi$ etc.; numărul de undă transversal este $k_\lambda = \rho_{nm}/a$, numărul de undă total (de rezonanță) este dat de (5.3.33) iar mărimile $\lambda_r$ şi $\omega_r$ au expresiile (5.3.34), (5.3.35). Elementul de volum este $dV = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$, astfel după efectuare integrării după $\phi, \rho$ şi $z$ se obține

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \pi a^2 c}{8} J_n'^2(\rho_{nm}) \left[ 1 + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 + k_z^2}{k_\lambda^2} \right] \tag{5.8.96}$$

în care s-a considerat $J_n(k_\lambda a) = 0$.

Întrucât $k_\lambda^2 = k_r^2 - k_z^2 = \omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0 - p^2 \pi^2 / c^2$ şi $\pi a^2 c = V_c$, din ultima relație rezultă

$$W_E = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V_c}{4} J_n'^2(\rho_{nm}) \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_0}{k_\lambda^2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 V_c J_n'^2(\rho_{nm})}{4\left(1 - p^2 \lambda_r^2 / 4c^2\right)} \tag{5.8.97}$$

Efectuând calcule similare pentru modurile $TE_{nmp}$ se obține [12]

$$W_H = \frac{\mu_0 H_0^2 V_c J_n^2(\rho'_{nm})}{4} \frac{1 - n^2/\rho'^2_{nm}}{\left(1 - p^2 \lambda_r^2 / 4c^2\right)} \tag{5.8.98}$$

Ultimele două relații se multiplică cu *2* dacă *n* sau *p* sunt zero. Densitățile de energie se definesc ca $W_{nE} = W_E / V_c$ şi $W_{nH} = W_H / V_c$, astfel se poate scrie

$$E_0 = \frac{2\left(1 - p^2 \lambda_r^2 / 4c^2\right)^{1/2}}{\varepsilon_0^{1/2} J_n'(\rho_{nm})} (W_{nE})^{1/2} \tag{5.8.99}$$

$$H_0 = \frac{2\left(1 - p^2 \lambda_r^2 / 4c^2\right)^{1/2}}{\mu_0^{1/2} \left(1 - n^2/\rho'^2_{nm}\right)^{1/2} J_n(\rho'_{nm})} (W_{nH})^{1/2} \tag{5.8.100}$$

Valorile normate ale componentelor de câmp pentru *modurile* $TM_{nmp}$ se scriu

$$E_z(\rho, \phi, z) = E_{znE} J_n(k_\lambda \rho) \cos n\phi \cos k_z z \tag{5.8.101}$$

$$E_\rho(\rho, \phi, z) = E_{\rho nE} J_n'(k_\lambda \rho) \cos n\phi \sin k_z z \tag{5.8.102}$$

$$E_\phi(\rho, \phi, z) = E_{\phi nE} \left(J_n(k_\lambda \rho)/\rho\right) \sin n\phi \sin k_z z \tag{5.8.103}$$

$$H_\rho(\rho, \phi, z) = H_{\rho nE} \left(J_n(k_\lambda \rho)/\rho\right) \sin n\phi \cos k_z z \tag{5.8.104}$$

$$H_\phi(\rho, \phi, z) = H_{\phi nE} J_n'(k_\lambda \rho) \cos n\phi \cos k_z z \tag{5.8.105}$$

în care

$$E_{znE} = E_0 = \frac{2\left(1 - p^2 \lambda_r^2 / 4c^2\right)^{1/2}}{J_n'(\rho_{nm})} \left( \frac{W_{nE}}{\varepsilon_0} \right)^{1/2}$$

$$E_{\rho nE} = -\frac{k_z}{k_\lambda} \frac{2\left(1 - p^2 \lambda_r^2 / 4c^2\right)^{1/2}}{J_n'(\rho_{nm})} \left( \frac{W_{nE}}{\varepsilon_0} \right)^{1/2}$$

$$E_{\phi nE} = \frac{k_z n}{k_\lambda^2} \frac{2\left(1 - p^2 \lambda_r^2 / 4c^2\right)^{1/2}}{J_n(\rho'_{nm})} \left( \frac{W_{nE}}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \tag{5.8.106}$$

$$H_{\rho nE}=\frac{-j4\pi n}{\lambda_r k_\lambda^2}\frac{\left(1-p^2\lambda_r^2/4c^2\right)^{1/2}}{J_n\left(\rho'_{nm}\right)}\left(\frac{W_{nE}}{\mu_0}\right)^{1/2}$$

$$H_{\phi nE}=\frac{-j4\pi}{\lambda_r k_\lambda}\frac{\left(1-p^2\lambda_r^2/4c^2\right)^{1/2}}{J'_n\left(\rho_{nm}\right)}\left(\frac{W_{nE}}{\mu_0}\right)^{1/2}$$

Procedând similar pentru *modurile* $TE_{nmp}$ avem

$$H_z(\rho,\phi,z)=H_{znH}J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi\sin k_z z \tag{5.8.107}$$

$$H_\rho(\rho,\phi,z)=H_{\rho nH}J'_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi\cos k_z z \tag{5.8.108}$$

$$H_\phi(\rho,\phi,z)=H_{\phi nH}\left(J_n(k_\lambda\rho)/\rho\right)\sin n\phi\cos k_z z \tag{5.8.109}$$

$$E_\rho(\rho,\phi,z)=E_{\rho nH}\left(J_n(k_\lambda\rho)/\rho\right)\sin n\phi\sin k_z z \tag{5.8.110}$$

$$E_\phi(\rho,\phi,z)=E_{\phi nH}J'_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi\sin k_z z \tag{5.8.111}$$

în care

$$\begin{aligned}
H_{znH}&=H_0=\frac{2\left(1-p^2\lambda_r^2/4c^2\right)^{1/2}}{\left(1-n^2/\rho'^2_{nm}\right)^{1/2}J_n\left(\rho'_{nm}\right)}\left(\frac{W_{nH}}{\mu_0}\right)^{1/2}\\
H_{\rho nH}&=\frac{k_z}{k_\lambda}\frac{2\left(1-p^2\lambda_r^2/4c^2\right)^{1/2}}{\left(1-n^2/\rho_{nm}^2\right)^{1/2}J'_n\left(\rho_{nm}\right)}\left(\frac{W_{nH}}{\mu_0}\right)^{1/2}\\
H_{\phi nH}&=-\frac{k_z n}{k_\lambda^2}\frac{2\left(1-p^2\lambda_r^2/4c^2\right)^{1/2}}{\left(1-n^2/\rho'^2_{nm}\right)^{1/2}J_n\left(\rho'_{nm}\right)}\left(\frac{W_{nH}}{\mu_0}\right)^{1/2}\\
E_{\rho nH}&=\frac{j4\pi n}{\lambda_r k_\lambda^2}\frac{2\left(1-p^2\lambda_r^2/4c^2\right)^{1/2}}{\left(1-n^2/\rho'^2_{nm}\right)^{1/2}J_n\left(\rho'_{nm}\right)}\left(\frac{W_{nH}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}\\
E_{\phi nH}&=\frac{j4\pi n}{k_\lambda\lambda_r}\frac{2\left(1-p^2\lambda_r^2/4c^2\right)^{1/2}}{\left(1-n^2/\rho_{nm}^2\right)^{1/2}J'_n\left(\rho_{nm}\right)}\left(\frac{W_{nH}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{5.8.112}$$

**3°. Cavități rezonante microstrip**

Ne referim întâi la cavitățile microstrip dreptunghiulare; în cazul modurilor uzuale $TM^z$ şi $p=0$ (câmpurile nu variază pe direcția $z$) expresiile componentelor sunt date de (5.7.13) – (5.7.15). Energia reactivă înmagazinată are expresia generală (5.8.71), unde în loc de $\varepsilon_0$ se va pune $\varepsilon_1$ (permitivitatea substratului dielectric). Avem

$$\begin{aligned}
W_E=\frac{\varepsilon_1 E_0^2}{4}\int_{V_c}\Bigg[&\cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)+\frac{\omega_r^2\varepsilon_1\mu_0}{k_\lambda^4}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)+\\
&+\frac{\omega_r^2\varepsilon_1\mu_0}{k_\lambda^4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\Bigg]dxdydz
\end{aligned} \tag{5.8.113}$$

Efectuând integrarea în limitele $x=0,a,\ y=0,b,\ z=0,h$ se obține

$$W_E=\frac{\varepsilon_1 E_0^2 V_c}{16k_\lambda^2}\left(k_\lambda^2+\omega_r^2\varepsilon_1\mu_0\right) \tag{5.8.114}$$

unde $V_c = abh$. Definind densitatea de energie reactivă ca $W_{nE} = W_E / V_c$ se poate scrie

$$W_{nE} = \frac{\varepsilon_1 E_0^2}{16 k_\lambda^2}\left(k_\lambda^2 + \omega_r^2 \varepsilon_1 \mu_0\right) \tag{5.8.115}$$

din care scoatem

$$E_0 = \frac{4k_\lambda}{\varepsilon_1^{1/2}\left(k_\lambda^2 + \omega_r^2 \varepsilon_1 \mu_0\right)^{1/2}} W_{nE}^{1/2} \tag{5.8.116}$$

Valorile normate ale componentelor de câmp sunt

$$E_z(x,y) = E_{znE} \cos k_x x \cos k_y y \tag{5.8.117}$$

$$H_x(x,y) = H_{xnE} \cos k_x x \sin k_y y \tag{5.8.118}$$

$$H_y(x,y) = H_{ynE} \sin k_x x \cos k_y y \tag{5.8.119}$$

în care

$$\begin{aligned} E_{znE} = E_0 &= \frac{4k_\lambda}{\left(k_\lambda^2 + \omega_r^2 \varepsilon_1 \mu_0\right)^{1/2} \varepsilon_r^{1/2}}\left(\frac{W_{nE}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \\ H_{xnE} &= \frac{-j8\pi n \varepsilon_r^{1/2}}{\lambda_r k_\lambda b\left(k_\lambda^2 + \omega_r^2 \varepsilon_1 \mu_0\right)^{1/2}}\left(\frac{W_{nE}}{\mu_0}\right)^{1/2} \\ H_{ynE} &= \frac{j8\pi m \varepsilon_r^{1/2}}{\lambda_r k_\lambda a\left(k_\lambda^2 + \omega_r^2 \varepsilon_1 \mu_0\right)^{1/2}}\left(\frac{W_{nE}}{\mu_0}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{5.8.120}$$

În cazul particular $TM^z_{100}$ $(m=1,\ n=0,\ p=0)$ rezultă $k_r = k_\lambda = k_x = \pi/a$ şi pot exista numai componentele $E_z$ şi $H_y$; densitatea de energie devine $W_{nE} = \varepsilon_1 E_0^2/4$ iar $E_{znE}$ şi $H_{ynE}$ sunt $E_0 = \left(2/\varepsilon_r^{1/2}\right)\left(W_{nE}/\varepsilon_0\right)^{1/2}$, $H_{ynE} = j2\left(W_{nE}/\mu_0\right)^{1/2}$.

Pentru cavitățile microstrip circulare în care sunt excitate modurile uzuale $TM^z$, expresiile componentelor de câmp sunt (5.7.22) – (5.7.24); în cazul particular cu $p=0$ şi $n=0$ (configurația de câmp este independentă de $\phi$) aceste relații se simplifică

$$\begin{aligned} E_z(\rho,\phi) &= E_0 J_0(k_\lambda \rho) \\ H_\phi(\rho,\phi) &= \frac{-j\omega_r \varepsilon_1}{k_\lambda} E_0 J_0'(k_\lambda \rho) \end{aligned} \tag{5.8.121}$$

Energia reactivă înmagazinată pentru acest caz particular este

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{\varepsilon_1 E_0^2}{4}\int_{V_c}\left[J_0^2(k_\lambda\rho) + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_1}{k_\lambda^2} J_0'^2(k_\lambda \rho)\right]\rho\, d\rho\, d\phi\, dz = \\ &= \frac{2\pi h \varepsilon_1 E_0^2}{4}\int_0^a\left[J_0^2(k_\lambda\rho) + \frac{\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_1}{k_\lambda^2} J_0'^2(k_\lambda \rho)\right]\rho\, d\rho \end{aligned} \tag{5.8.122}$$

Vom ține seama de condiția la limită $H_\phi(\rho = a,\ \phi) = 0$; rezultă $J_n'(k_\lambda a) = 0$; astfel după efectuarea integrării se obține

$$W_E = \frac{\varepsilon_1 E_0^2}{4} V_c\left[J_0^2(\rho'_{0m}) + J_1^2(\rho'_{0m})\left(1 - \frac{1}{\rho'^2_{0m}}\right)\right] \tag{5.8.123}$$

în care s-au utilizat egalitățile $\rho'_{0m} = k_\lambda a$, $\omega_r^2 \mu_0 \varepsilon_1 = k_\lambda^2 = (\rho'_{0m}/a)$ şi $V_c = \pi a^2 h$.
Densitatea de energie va fi

$$W_{nE} = \frac{\varepsilon_1 E_0^2}{4}\left[J_0^2(\rho'_{0m}) + \left(1 - \frac{1}{\rho'^2_{0m}}\right) J_1^2(\rho'_{0m})\right] \tag{5.8.124}$$

iar $E_{znE}$ şi $H_{\phi nE}$ au expresiile

$$E_{znE} = E_0 = \frac{2}{\varepsilon_r^{1/2}\left[J_0^2(\rho'_{0m}) + \left(1 - \frac{1}{\rho'^2_{0m}}\right) J_1^2(\rho'_{0m})\right]^{1/2}} \left(\frac{W_{nE}}{\varepsilon_0}\right)^{1/2}$$

$$H_{\phi nE} = \frac{-j4\pi\varepsilon_0^{1/2}}{\lambda_r k_\lambda \left[J_0^2(\rho'_{0m}) + \left(1 - \frac{1}{\rho'^2_{0m}}\right) J_1^2(\rho'_{0m})\right]^{1/2}} \left(\frac{W_{nE}}{\mu_0}\right)^{1/2} \tag{5.8.125}$$

## 5.9. PROPRIETĂȚI DE ORTOGONALITATE ALE MODURILOR

### 5.9.1. Ghiduri de undă metalice fără pierderi

Proprietățile de ortogonalitate ale modurilor care se propagă în ghiduri pot fi deosebit de utile la rezolvarea unor probleme de excitare a ghidurilor şi cavităților rezonante; sub formă elementară aceste proprietăți pot fi stabilite luând în considerare puterea transportată prin ghiduri, fapt ce presupune integrarea vectorului Poynting pe întreaga arie transversală.

**1°. Ghiduri rectangulare**

Ne referim întâi la modurile $TM\ (E)$ în ghidurile rectangulare. Considerăm două moduri $TM$ caracterizate prin numerele de undă $(m,n)$, respectiv $(p,q)$, astfel putem nota $TM_{mn} = E_{mn} = E^i$ şi $TM_{pq} = E_{pq} = E^j$; se admite că mărimile $\beta_g$ şi $k_\lambda$ ale celor două moduri sunt identice. Expresia generală a vectorului Poynting este dată de (5.8.2) iar puterea transmisă prin ghid rezultă din (5.8.4). Vom lua componentele de câmp electric de la modul $E^i$ iar componentele de câmp magnetic de la modul $E^j$. Produsul $\vec{S}_z \cdot d\vec{s}$ se detaliază sub forma

$$\vec{S}_z \cdot d\vec{s} = \left(E^i_{0x} H^j_{0y} - E^i_{0y} H^j_{0x}\right) ds \tag{5.9.1}$$

Ținând cont de expresiile nenormate ale componentelor de câmp (5.8.1) se pot scrie relațiile

$$E^i_{0x} H^j_{0y} = \frac{-j\beta_{gi} k_{xi}}{k^2_{mn}} \frac{-j\omega\varepsilon_0 k_{xj}}{k^2_{pq}} E_{0i} E_{0j} \cos k_{xi} x \sin k_{yi} y \cos k_{xj} x \sin k_{yj} y \tag{5.9.2}$$

$$E^i_{0y} H^j_{0x} = \frac{-j\beta_{gi} k_{yi}}{k^2_{mn}} \frac{-j\omega\varepsilon_0 k_{yj}}{k^2_{pq}} E_{0i} E_{0j} \sin k_{xi} x \cos k_{yi} y \sin k_{xj} x \cos k_{yj} y \tag{5.9.3}$$

unde: $k^2_{mn} = k^2_{xi} + k^2_{yi}$; $k^2_{pq} = k^2_{xj} + k^2_{yj}$; $k_{xi} = m\pi/a$, $k_{yi} = n\pi/b$, $k_{xj} = p\pi/a$, $k_{yj} = q\pi/b$.
Introducem ultimele două relații în (5.9.1) şi vom observa că în procesul de integrare pe suprafața transversală intervin integrale de forma

$$I_{a1} = \int_{x=0}^{a} [\cos(m\pi x/a)\cos(p\pi x/a)]dx; \quad I_{a2} = \int_{x=0}^{a} [\sin(m\pi x/a)\sin(p\pi x/a)]dx \tag{5.9.4}$$

$$I_{b1}=\int_{y=0}^{b}\left[\sin(n\pi y/b)\sin(q\pi y/b)\right]dy;\quad I_{b2}=\int_{y=0}^{b}\left[\cos(n\pi y/b)\cos(q\pi y/b)\right]dy \tag{5.9.5}$$

Ca urmare a proprietăților de ortogonalitate ale funcțiilor trigonometrice, integralele de forma (5.9.4) se anulează dacă $p\neq m$, iar integralele de tipul (5.9.5) se anulează dacă $q\neq n$. Astfel produsul acestor integrale se anulează fapt ce atestă că componentele de câmp ale modurilor $TM_{mn}$ şi $TM_{pq}$, cu $p\neq m$ şi $q\neq n$, sunt ortogonale; puterea este transportată prin ghid numai de către componentele aceluiaşi mod.

În mod similar se pot demonstra proprietățile de ortogonalitate ale modurilor $TE_{mn}=H_{mn}=H^{i}$ şi $TE_{pq}=H_{pq}=H^{j}$ dacă $p\neq m$ şi $q\neq n$. De asemenea, urmărind raționamentul de mai sus este uşor de demonstrat că două moduri de acelaşi ordin, unul $E_{mn}$ iar celălalt $H_{mn}$ sunt ortogonale. Ne referim la setul de relații (5.8.1): modul $E_{mn}$ se obține făcând $H_0=0,\ H_{0z}=0$; modul $H_{mn}$ se obține făcând $E_0=0,\ E_{0z}=0$; ambele moduri au aceleaşi valori $\beta$ şi $k_\lambda$. Făcând produse de forma (5.9.2), (5.9.3) şi efectuăm integrarea pe aria transversală

$$\int_{S_0}\frac{\beta^2\pi^2 mn}{k_\lambda^4}E_0H_0\cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dxdy \tag{5.9.6}$$

$$\int_{S_0}\frac{\beta^2\pi^2 mn}{k_\lambda^4}E_0H_0\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dxdy \tag{5.9.7}$$

Ambele integrale au aceiaşi valoare $\beta^2\pi^2 mnE_0H_0\left(ab/4k_\lambda^4\right)$; ținând cont de relația de definiție (5.9.1) rezultă că puterea transmisă prin ghid este zero, adică modurile $E_{mn}$ şi $H_{mn}$ sunt ortogonale unul față de altul. Se poate trage concluzia că într-un ghid metalic rectangular un mod dat este ortogonal față de toate modurile din ghidul respectiv.

**2°. Ghiduri circulare**

Considerăm întâi două moduri *TM* diferite $E_{nm}=E^{i}$ şi $E_{qp}=E^{j}$. Luăm componentele de câmp electric de la modul $E^{i}$ iar componentele de câmp magnetic de la modul $E^{j}$ şi calculăm puterea transmisă de aceste componente conform relațiilor de definiție (5.8.23), (5.8.24); mărimea $S_z$ are expresia

$$S_z=E_{0\rho}^{i}H_{0\phi}^{j}-E_{0\phi}^{i}H_{0\rho}^{j} \tag{5.9.8}$$

Ținând cont de relațiile (5.8.22) pentru modulul vectorului Poynting avem

$$\begin{aligned}S_z=&\frac{-j\beta_{gi}}{k_{\lambda i}}\frac{-j\omega\varepsilon_0}{k_{\lambda j}}E_{0i}E_{0j}J_n'(k_{\lambda i}\rho)J_q'(k_{\lambda j}\rho)\cos n\phi\cos q\phi-\\&-\frac{j\beta_{gi}n}{k_{\lambda i}^2\rho}\frac{-j\omega\varepsilon_0 q}{k_{\lambda j}^2\rho}E_{0i}E_{0j}J_n(k_{\lambda i}\rho)J_q(k_{\lambda j}\rho)\sin n\phi\sin q\phi\end{aligned} \tag{5.9.9}$$

În general sunt necesare câteva discuții asupra procedurii de integrare după $\phi$ şi după $\rho$. La integrarea după unghiul $\phi$ $(\phi=0\div 2\pi)$ ambii termeni se anulează ca urmare a ortogonalității funcțiilor trigonometrice, fapt ce atestă ortogonalitatea modurilor $E^{i}$ şi $E^{j}$. Presupunem acum că avem $q=n$, prin urmare avem modurile $E_{nm}$ şi $E_{np}$; efectuând integrarea după $\phi$ rezultă

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 n\phi\,d\phi=\int_0^{2\pi}\sin^2 n\phi\,d\phi=\pi \tag{5.9.10}$$

Scoțând în factor toate mărimile posibile (după ce s-a realizat integrarea după $\phi$) rămâne de efectuat integrarea după $\rho$ $(\rho = 0 \div a)$; din (5.9.9) se poate scrie integrala

$$\int_{\rho=0}^{a}\left[J_n'(k_{\lambda i}\rho)J_n'(k_{\lambda j}\rho)+\left(n^2/k_{\lambda i}k_{\lambda j}\rho^2\right)J_n(k_{\lambda i}\rho)J_n(k_{\lambda j}\rho)\right]\rho\,d\rho \tag{5.9.11}$$

care trebuie evaluată pentru $k_{\lambda i} \neq k_{\lambda j}$. Utilizând relațiile de derivare ale funcțiilor Bessel se ajunge la integrala nedefinită [12]

$$I_N = \frac{k_{\lambda j}\rho J_n'(k_{\lambda i}\rho)J_n(k_{\lambda j}\rho)-k_{\lambda i}\rho J_n(k_{\lambda i}\rho)J_n'(k_{\lambda j}\rho)}{k_{\lambda j}^2-k_{\lambda i}^2} \tag{5.9.12}$$

care se anulează atât pentru $\rho = 0$ cât şi pentru $\rho = a$, deoarece în cazul modurilor *TM* avem $J_n(k_{\lambda i}a) = 0,\ J_n(k_{\lambda j}a) = 0$; acest fapt atestă ortogonalitatea modurilor $E_{nm}$ şi $E_{np}$.

În mod similar se poate demonstra ortogonalitatea componentelor transversale pentru modurile $TE_{nm}$ şi $TE_{qp}$.

Un anume interes prezintă situația în care componentele de câmp electric se iau de la modul $TM_{nm}$ $\left(E^i = E_{nm}\right)$ iar componentele de câmp magnetic se iau de la modul $TE_{qp}$ $\left(H^j = H_{qp}\right)$. Scriem expresia lui $S_z$ conform relației (5.9.8)

$$\begin{aligned} S_z = &\frac{-j\beta_{gi}}{k_{\lambda i}}\,\frac{-j\beta_{gj}q}{k_{\lambda j}^2\rho}E_{0i}H_{0j}J_n'(k_{\lambda i}\rho)J_q(k_{\lambda j}\rho)\cos n\phi\sin q\phi - \\ &-\frac{j\beta_{gi}n}{k_{\lambda i}^2\rho}\,\frac{-j\beta_{gj}}{k_{\lambda j}}E_{0i}H_{0j}J_n(k_{\lambda i}\rho)J_q'(k_{\lambda j}\rho)\sin n\phi\cos q\phi \end{aligned} \tag{5.9.13}$$

Dacă se admite $q \neq n$ integrala după $\phi$ se anulează, prin urmare modurile sunt ortogonale. În cazul particular când $q = n$ este necesară evaluarea integralei de forma

$$I_\rho = \frac{n}{k_{\lambda i}k_{\lambda j}}\int_{\rho=0}^{a}\left[k_{\lambda i}J_n'(k_{\lambda i}\rho)J_n(k_{\lambda j}\rho)+k_{\lambda j}J_n(k_{\lambda i}\rho)J_n'(k_{\lambda j}\rho)\right]d\rho \tag{5.9.14}$$

Integrala nedefinită este [12]

$$I_N = \frac{n}{k_{\lambda i}k_{\lambda j}}J_n(k_{\lambda i}\rho)J_n(k_{\lambda j}\rho) \tag{5.9.15}$$

care se anulează după cum urmează: la $\rho = 0$ avem $J_n(0) = 0$ cu excepția $n = 0$, dar în acest caz $I_N$ este anulată de factorul *n*; la $\rho = a$ avem $J_n(k_{\lambda j}a) = 0$ (moduri $TE_{qp}$). Se poate trage concluzia că în ghidul circular toate modurile sunt ortogonale unul față de altul.

### 5.9.2. Generalizarea proprietăților de ortogonalitate

Proprietățile de ortogonalitate ale modurilor care se propagă în ghidurile de undă metalice pot fi generalizate prin utilizarea identităților Green [13].

**1°. Relații generale**

*a) Moduri TE.* Componentele de câmp ale modului $TE$ $(H)$ pot fi deduse cu ajutorul vectorului Hertz magnetic $\vec{\Pi}_h = \hat{k}\Pi_h$ prin intermediul relațiilor de definiție date în Cap. 1 $\left(\vec{E} = -j\omega\mu_0\nabla\times\vec{\Pi}_h;\ \vec{H} = \nabla\times\nabla\times\vec{\Pi}_h\right)$ iar $\vec{\Pi}_h$ satisface ecuația generală de propagare (1.2.68) cu $J_{ms} = 0$ şi $\vec{M} = 0$, $\nabla^2\vec{\Pi}_h + k_0\vec{\Pi}_h = 0$ pentru care se caută soluții de forma

$$\vec{\Pi}_h = \hat{k}\Psi_h(x,y)e^{-\gamma z} \tag{5.9.16}$$

unde $(x,y)$ reprezintă coordonatele transversale iar $z$ este coordonata longitudinală. Funcția $\Psi_h$ satisface ecuația Helmholtz bidimensională

$$\nabla_T^2\Psi_h + k_\lambda^2\Psi_h = 0 \tag{5.9.17}$$

unde: $k_\lambda^2 = \gamma^2 + k_0^2 = \gamma^2 + \omega^2\mu_0\varepsilon_0$ iar valorile admise pentru $k_\lambda$ şi $\gamma$ depind de condițiile la limită; funcțiile proprii $\Psi_h$ generează modurile *H*. Componentele de câmp derivă din $\Psi_h$ conform relațiilor

$$H_z = -\nabla_T^2\Psi_h e^{-\gamma z} = k_\lambda^2\Psi_h e^{-\gamma z} \tag{5.9.18}$$

$$\vec{H}_T = -\gamma\nabla_T\Psi_h e^{-\gamma z} \tag{5.9.19}$$

$$\vec{E}_T = -\overline{\overline{Z}}_h\cdot\vec{H}_T = Z_h\hat{k}\times\vec{H}_T \tag{5.9.20}$$

unde

$$\overline{\overline{Z}}_h = \underline{Z}_h\left(\hat{i}\hat{j} - \hat{j}\hat{i}\right) \tag{5.9.21}$$

reprezintă impedanța de undă diadică (anexa A.IV) iar $\underline{Z}_h = j\omega\mu_0/\gamma = (jk_0/\gamma)Z_0$ şi $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$; $\hat{i},\hat{j}$ sunt versorii transversali iar $\hat{k}$ este versorul longitudinal.

*b) Moduri TM*. Componentele de câmp ale modurilor *TM* $(E)$ pot fi deduse cu ajutorul vectorului Hertz electric $\vec{\Pi}_e = \hat{k}\Pi_e$ care satisface ecuația de propagare (1.2.58) cu $\vec{J}_s = 0$, adică $\nabla^2\vec{\Pi}_e + k_0\vec{\Pi}_e = 0$; relațiile de definiție sunt $\vec{H} = -j\omega\varepsilon_0\nabla\times\vec{\Pi}_e$, $\vec{E} = \nabla\times\nabla\times\vec{\Pi}_e$; procedând similar ca pentru modurile TE notăm

$$\vec{\Pi}_e = \hat{k}\Psi_e(x,y)e^{-\gamma z} \tag{5.9.22}$$

unde funcția $\Psi_e$ satisface ecuația Helmholtz bidimensională

$$\nabla_T^2\Psi_e + k_\lambda^2\Psi_e = 0 \tag{5.9.23}$$

Componentele de câmp se obțin cu ajutorul funcțiilor proprii $\Psi_e$ conform relațiilor

$$E_z = -\nabla_T^2\Psi_e e^{-\gamma z} = k_\lambda^2\Psi_e e^{-\gamma z} \tag{5.9.24}$$

$$\vec{E}_T = -\gamma\nabla_T\Psi_e e^{-\gamma z} \tag{5.9.25}$$

$$\vec{H}_T = -\overline{\overline{Y}}_e\cdot\vec{E}_T = -Y_e\hat{k}\times\vec{E}_T \tag{5.9.26}$$

unde

$$\overline{\overline{Y}}_e = \underline{Y}_e\left(\hat{j}\hat{i} - \hat{i}\hat{j}\right) \tag{5.9.27}$$

reprezintă admitanța de undă diadică iar $\underline{Y}_e = jk_0Y_0/\gamma$ şi $Y_0 = (\varepsilon_0/\mu_0)^{1/2}$.

**2°. Componente axiale**

Considerăm ghiduri metalice cu pereți ideali în care se pot propaga atât moduri transversal magnetice $TM_{mn} = E_{mn} = E^i$, $TM_{pq} = E_{pq} = E^j$ cât şi moduri transversal electrice $TE_{mn} = H_{mn} = H^i$, $TE_{pq} = H_{pq} = H^j$; modurile $E^i$ şi $H^i$ au constanta de propagare $\gamma_i$ iar modurile $E^j$ şi $H^j$ au constanta de propagare $\gamma_j$. Notăm cu $\Psi_i$ şi $\Psi_j$ soluțiile pentru cele două categorii de moduri: fie $\left(E^i,E^j\right)$, fie $\left(H^i,H^j\right)$; multiplicăm cu $\Psi_j$ ecuația Helmholtz care satisface pe $\Psi_i$, rezultă

$$\Psi_j \nabla_T^2 \Psi_i + \left(k_0^2 + \gamma_i^2\right)\Psi_i \Psi_j = 0\,; \tag{5.9.28}$$

în mod similar, multiplicând cu $\Psi_i$ ecuația care satisface pe $\Psi_j$ se obține

$$\Psi_i \nabla_T^2 \Psi_j + \left(k_0^2 + \gamma_j^2\right)\Psi_j \Psi_i = 0 \tag{5.9.29}$$

Facem diferența acestor două ecuații şi substituim în forma bidimensională a celei de a doua identități Green (AIII, (III.1.14))

$$\left(\gamma_i^2 - \gamma_j^2\right)\int_S \Psi_i \Psi_j ds = \int_S \left(\Psi_i \nabla_T^2 \Psi_j - \Psi_j \nabla_T^2 \Psi_i\right) ds = \oint_C \left(\Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} - \Psi_j \frac{\partial \Psi_i}{\partial n}\right) dl \tag{5.9.30}$$

in care: *S* este aria transversală a ghidului; *C* reprezintă conturul ghidului. Pentru modurile *TM* componenta de câmp electric longitudinală $E_z$ se anulează pe pereții laterali, prin urmare se anulează şi mărimile $\Psi_i$ şi $\Psi_j$, aşa cum rezultă din (5.9.24); pentru modurile *TE* pe pereții laterali ai ghidului se anulează derivata lui $H_z$ în raport cu normala deci se vor anula şi mărimile $\partial \Psi_i / \partial n$ şi $\partial \Psi_j / \partial n$. Prin urmare, indiferent de mod integrala de contur din (5.9.30) se anulează; admițând $\gamma_i \neq \gamma_j$ pentru cele două categorii de moduri se obține

$$\int_S \Psi_i \Psi_j ds = 0\,, \quad i \neq j \tag{5.9.31}$$

astfel componentele axiale ale câmpului pentru două moduri diferite *i* şi *j*, sunt ortogonale.

**3°. Componente transversale**

În general, componentele transversale ale câmpului electric pentru două moduri *E* diferite ($E^i$ şi $E^j$) sau două moduri *H* diferite ($H^i$ şi $H^j$), sau pentru un mod $E^i$ şi un mod $H^j$ sunt mutual ortogonale. Aceiaşi afirmație este valabilă şi pentru componentele transversale ale câmpului magnetic.

Considerăm întâi cazul componentelor transversale ale câmpului electric pentru două moduri *E* diferite ($E^i$ şi $E^j$); componentele transversale ale câmpului electric ale celor două moduri sunt ortogonale, deoarece integrala de suprafață

$$I_E = \int_S \nabla_T \Psi_i \cdot \nabla_T \Psi_j ds \tag{5.9.32}$$

se anulează; aici $\Psi_i$ şi $\Psi_j$ reprezintă funcții proprii diferite cu ajutorul cărora se obțin componentele modurilor $E^i$ şi $E^j$ (5.9.24) ÷ (5.9.27). Utilizând prima identitate Green sub formă bidimensională (AIII, (III. 1.13)), integrala de suprafață (5.9.32) devine

$$\int_S \nabla_T \Psi_i \cdot \nabla_T \Psi_j ds = -\int_S \Psi_i \nabla_T^2 \Psi_j ds + \oint_C \Psi_i \frac{\partial \Psi_j}{\partial n} dl \tag{5.9.33}$$

Integrala de contur se anulează deoarece $\Psi_i = 0$ pe pereții laterali: dacă se face înlocuirea $\nabla_T^2 \Psi_j = -k_\lambda^2 \Psi_j$ şi ținând cont că $\Psi_i$ şi $\Psi_j$ sunt ortogonale integrala de suprafață din membrul drept se anulează, astfel integrala de suprafață (5.9.32) se anulează, fapt ce demonstrează ortogonalitatea componentelor electrice transversale.

În cazul a două moduri TE diferite ($H^i$ şi $H^j$) componentele transversale ale câmpului electric se anulează întrucât integrala

$$I_H = \int_S \left(\hat{k} \times \nabla_T \Psi_i\right) \cdot \left(\hat{k} \times \nabla_T \Psi_j\right) ds \tag{5.9.34}$$

se anulează. Mărimile $\Psi_i$ şi $\Psi_j$ sunt funcții proprii care generează moduri *H* diferite; componentele transversale se definesc din relațiile (5.9.19), (5.9.20). Utilizând câteva dezvoltări vectoriale se

poate arăta că integrandul din (5.9.34) este identic cu integrandul din (5.9.32); într-adevăr se poate scrie succesiv

$$\left(\hat{k}\times\nabla_T\Psi_i\right)\cdot\left(\hat{k}\times\nabla_T\Psi_j\right)=\hat{k}\cdot\left[\nabla_T\Psi_i\times\left(\hat{k}\times\nabla_T\Psi_j\right)\right]=\hat{k}\cdot\left[\left(\nabla_T\Psi_i\cdot\nabla_T\Psi_j\right)\hat{k}-\left(\nabla_T\Psi_i\cdot\hat{k}\right)\nabla_T\Psi_j\right] \quad (5.9.35)$$

Ultimul termen devine egal cu $\left(\nabla_T\Psi_i\cdot\nabla_T\Psi_j\right)$ deoarece $\nabla_T\Psi_i\cdot\hat{k}=0$ (cei doi vectori sunt perpendiculari) şi aplicând prima identitate Green se ajunge la o relaţie similară cu (5.9.33); având în vedere că pentru modurile $H$ mărimile $\Psi_i$ şi $\Psi_j$ sunt ortogonale iar termenii $\partial\Psi_i/\partial n$ se anulează pe pereţii laterali, rezultă că integralele de tip (5.9.34) se anulează.

Este utilă o scurtă discuţie asupra componentelor electrice transversale, una aparţinând modului $H^i$, cealaltă modului $E^j$; notăm prin $\Psi_{hi}$ şi $\Psi_{ej}$ funcţiile proprii corespunzătoare celor două categorii de moduri. Pentru a demonstra ortogonalitatea componentelor electrice transversale este suficient să verificăm că integrala de suprafaţă

$$\int_S\left(\hat{k}\times\nabla_T\Psi_{hi}\right)\cdot\nabla_T\Psi_{ej}\,ds \quad (5.9.36)$$

se anulează. În acest scop vom arăta că integrandul se poate înlocui prin expresia $-\nabla_T\cdot\left(\hat{k}\Psi_{hi}\times\nabla_T\Psi_{ej}\right)$; într-adevăr dacă facem dezvoltarea acestei expresii avem

$$\nabla_T\cdot\left(\hat{k}\Psi_{hi}\times\nabla_T\Psi_{ej}\right)=\left(\nabla_T\times\hat{k}\Psi_{hi}\right)\cdot\nabla_T\Psi_{ej}-\hat{k}\Psi_{hi}\cdot\nabla_T\times\nabla_T\Psi_{ej}=-\left(\hat{k}\times\nabla_T\Psi_{hi}\right)\cdot\nabla_T\Psi_{ej} \quad (5.9.37)$$

în care s-a considerat $\nabla_T\times\nabla_T\Psi_{ej}=0$ şi $\nabla_T\times\hat{k}\Psi_{hi}=-\hat{k}\times\nabla_T\Psi_{hi}$. Introducem în (5.9.36) şi utilizând teorema Stokes (care reprezintă un caz particular al teoremei rotorului) rezultă

$$-\int_S\nabla_T\cdot\left(\hat{k}\Psi_{hi}\times\nabla_T\Psi_{ej}\right)ds=\oint_C\hat{k}\times\nabla_T\Psi_{ej}\cdot\hat{n}\,\Psi_{hi}\,dl \quad (5.9.38)$$

unde $\hat{n}$ este versorul normalei pe peretele ghidului, îndreptată spre interior. Referindu-ne la integrala de contur constatăm că ea se anulează deoarece termenul $\nabla_T\Psi_{ej}$ este proporţional cu câmpul electric transversal şi are numai componente normale pe pereţii ghidului; drept urmare termenul $\hat{k}\times\nabla_T\Psi_{ej}$ (un vector proporţional cu câmpul magnetic transversal) este tangenţial la pereţi iar produsul scalar cu $\hat{n}$ se anulează. În final integrandul din integrala de contur se anulează fapt ce validează afirmaţia că componentele transversale ale câmpului pentru modurile $H^i$ şi $E^j$ sunt ortogonale.

Proprietăţile de ortogonalitate sunt deosebit de utile în practică deoarece ele permit ca orice câmp arbitrar să fie dezvoltat într-o serie de moduri *E* şi *H*. Totodată trebuie subliniat că relaţiile de ortogonalitate prezentate mai sus nu mai sunt valabile în cazul ghidurilor cu pierderi; în aceste ghiduri condiţiile la limită pe pereţi $\Psi_e=0$ şi $\partial\Psi_h/\partial n=0$ nu sunt satisfăcute. Relaţii generale de ortogonalitate în cazul ghidurilor cu pierderi pot fi obţinute prin aplicarea teoremei de reciprocitate Lorentz şi a principiului de echivalenţă Love; o prezentare succintă a acestor relaţii este dată în Anexa III .

## Bibliografie Capitolul 5.


1. D.M. Pozar „Microwave Engineering”, Addison-Wesley, N.Y., (1990, reprinted 1993)
2. A.F. Harvey „Microwave Engineering”, Academic Press, London-N.Y., (1963)
3. A.M. Kuguşev, N.S. Golubeva – „Osnovy radioelektroniki” (l. rusă), Energia, Moscova, (1969)
4. G. Rulea „Bazele teoretice şi experimentale ale tehnicii microundelor”, Edit. Ştiințifică şi Enciclopedică, (1989)
5. D.K. Cheng „Field and Wave Electromagnetics”, Addison-Wesley, N.Y., (1989)
6. M. Month, Margaret Dienes (editors) „ Physics of Particle Accelerators” in „AIP-Conference Proceedings” 153, vol 2, N.Y. (1987)
7. J.C. Slater „Microwave electronics”, Dover Publications, Inc, N.Y., (1969)
8. T.C. Edwards „Foundations of Microstrip Circuit Design”, John Wiley and Sons, N.Y., Toronto, (1981)
9. C. Balanis „Antenna Theory”, second edition, John Wiley and Sons, N.Y., (1997)
10. T. Itoh „Analysis of microstrip resonator”, IEEE Trans. MTT, vol MTT-22, pg. 456, (1974)
11. Y.T. Lo, D. Solomon, W.F. Richards „Theory and Experiment of Microstrip Antennas” in „Microstip Antenna Design”, K.C. Gupta, A. Benalla (editors), Artech House, (1988)
12. R.A. Waldron „Theory of guided electromagnetic waves”, Van Nostrand, London, (1969)
13. R.E. Collin „Field Theory of Guided Waves”, sec. edition, Oxford University Press, (1991)
14. G. Dôme „RF Systems. Waveguides and Cavities” in AIP Conference Proceedings, vol 2, editors M. Month, M. Dienes, pg 1296, N.Y. (1987)

# CAPITOLUL 6

# SISTEME RADIANTE ÎN DOMENIUL MICROUNDELOR

## 6.1. CONSIDERENTE FIZICE INTRODUCTIVE

Prin termenul de antene se înțeleg „dispozitive (sisteme) pentru emisia şi recepția undelor radio"; prin urmare antena constituie o structura de tranziție între sursele de emisie şi spațiul liber, sau între spațiul liber şi dispozitivele de recepție. În domeniul microundelor există o varietate foarte largă de antene. Enumerăm principalele tipuri: antene cu conductoare filiforme (dipol liniar, buclă, elice); antene cu apertură (fantă, segment de ghid, horn piramidal sau tronconic); aranjamente (rețele) de antene simple care conduc la creşterea performanțelor; antene cu suprafețe reflectante; antene cu lentile focalizatoare; antene microstrip.

*Mecanismul de radiație.* O problemă importantă care necesită explicații pertinente este cea referitoare la procesul fizic de realizare a radiației; adică care este mecanismul prin care câmpul electromagnetic generat de sursă şi ghidat spre antenă se „*detaşează*" pentru a forma o undă electromagnetică de spațiu liber. Considerăm un conductor liniar de secțiune $A_c$ în care există o densitate de sarcină electrică $q_v\left(C/m^3\right)$ şi admitem că sarcina se mişcă în lungul conductorului după axa $z$ cu viteza uniformă $v_z$; densitatea de curent $I_z\left(A/m^2\right)$ prin conductor este

$$I_z = q_v v_z; \tag{6.1.1}$$

dacă conductorul este foarte subțire (ideal de rază zero) curentul prin conductor poate fi reprezentat prin

$$I_z = q_l v_z \tag{6.1.2}$$

unde $q_l\left(C/m\right)$ este sarcina pe unitate de lungime. Dacă curentul este constant (câmpul electric aplicat conductorului este constant) atunci viteza $v_z$ este constanta şi conductorul nu radiază câmp electromagnetic în spațiul liber. Admitem acum ca curentul este variabil în timp, astfel se poate scrie

$$\frac{dI_z}{dt} = q_l \frac{dv_z}{dt} = q_l a_z; \tag{6.1.3}$$

dacă conductorul are lungimea $l$ ultima relație devine

$$l\frac{dI_z}{dt} = lq_l a_z \tag{6.1.4}$$

Această relație simplă poate fi privită ca relație fundamentală pentru radiația electromagnetică; ea afirmă că pentru a realiza radiația electromagnetică trebuie să existe un curent variabil în timp sau o sarcină accelerată (sau decelerată). Referindu-ne la tipul de mişcare al sarcinii se pot face următoarele precizări: a) admițând o mişcare cu viteza constantă radiația lipseşte în cazul conductoarelor liniare şi infinite; în schimb radiația are loc dacă conductorul este curbat, îndoit, discontinuu, de lungime finită sau terminat pe o impedanță; b) dacă sarcina are o mişcare oscilatorie în timp radiația este prezentă şi în cazul conductoarelor liniare.

Cea mai sugestivă explicație a mecanismului de radiație poate fi făcută referindu-ne la structura cu două conductoare din Fig. 6.1. Se poate considera că structura constă din două elemente: linia de transmisie alimentată de la un generator de înaltă frecvență (microunde) şi antena propriu-zisă formată din două conductoare curbate, cu deschiderea spre spațiul liber. Prin

conectarea generatorului, în linia de transmisie se propagă de la generator spre antenă un câmp electromagnetic ilustrat prin liniile de câmp electric, a căror densitate este proporţională cu intensitatea câmpului (vezi § 3.1.3, Fig. 3.5); propagarea continuă şi după planul $a - a$, adică în antena propriu-zisă (Fig. 6.1a). Liniile de câmp electric acţionează asupra sarcinilor libere din conductoare forţându-le să se deplaseze; această deplasare dă naştere unui curent, care la rândul său creează un câmp magnetic. În modelele bazate pe utilizarea liniilor de câmp electric şi magnetic se acceptă că liniile de câmp electric pleacă de pe sarcinile pozitive şi se termină pe sarcinile negative, sau pleacă de pe sarcinile pozitive şi se termină la infinit, sau vin de la infinit şi se termină pe sarcinile negative, sau formează bucle închise fără a începe sau termina pe vreo sarcină electrică. În schimb liniile de câmp magnetic totdeauna formează bucle închise care înconjoară curentul.

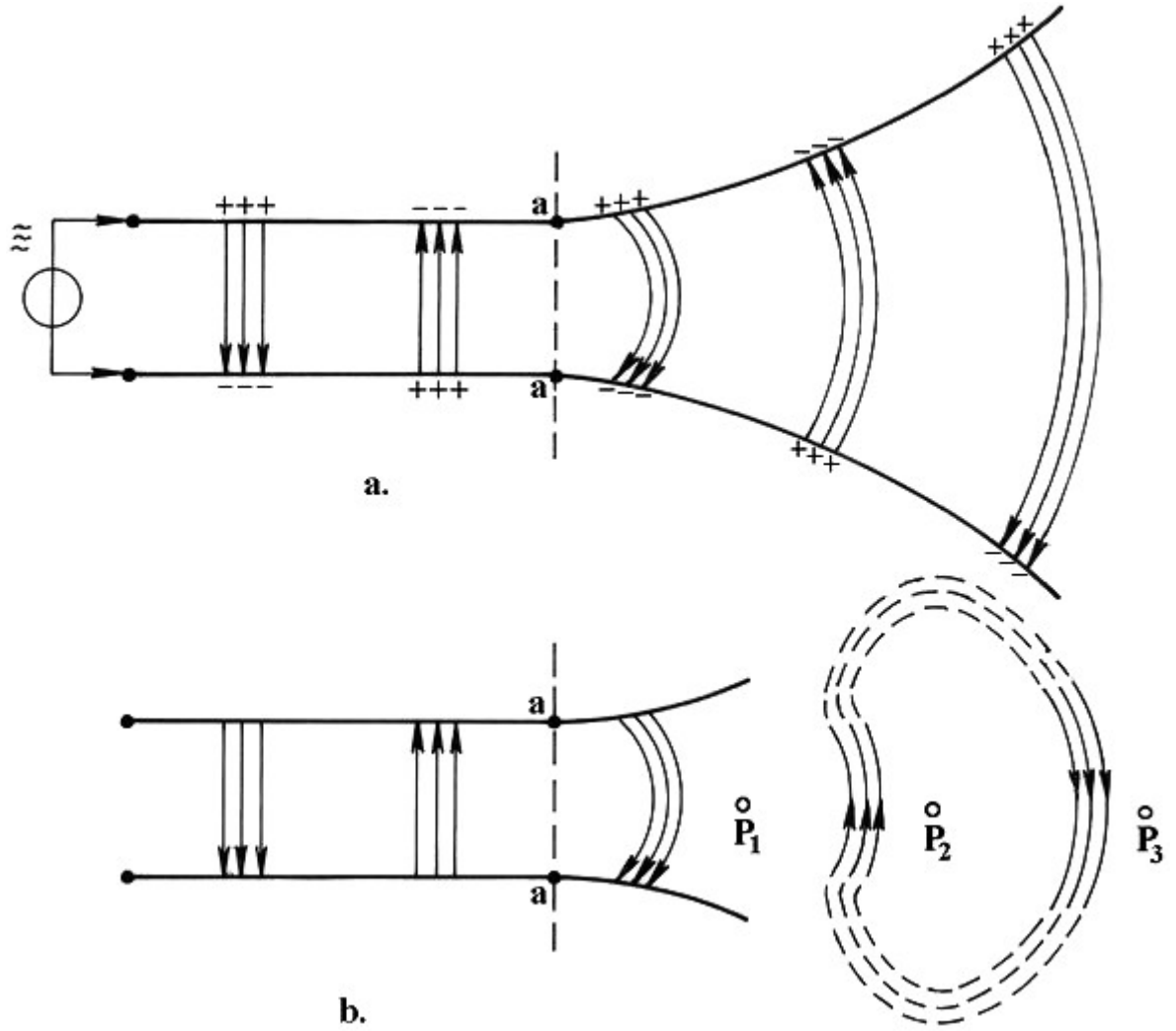



**Fig. 6.1 Model pentru explicarea mecanismului fizic de radiaţie a undelor electromagnetice: a – structură formată din linie de transmisie şi antenă; b – unde de câmp electromagnetic „desprinse" de antenă**

Dacă admitem că sursa de tensiune (a generatorului) variază sinusoidal atunci şi câmpul electric dintre conductoare variază sinusoidal. Crearea câmpurilor electric şi magnetic cu variaţie armonică în timp conduce la formarea undelor electromagnetice care se propagă în linia de transmisie; aceste unde intră în antena propriu-zisă, având asociate sarcini electrice şi curenţi pe conductoare. Admitem acum că se îndepărtează o parte din structura antenei (Fig. 6.1b); astfel se pot forma unde de spaţiu liber prin conectarea capetelor deschise ale liniilor de câmp electric. Aceste unde au un caracter periodic iar punctul de fază constantă $P_0$ se deplasează în spaţiu cu o viteză aproximativ egală cu viteza luminii; el parcurge distanţa $\lambda/2$ în timp de o jumătate de perioadă.

Considerentele de mai sus constituie un bun fundament de explicare a radiației electromagnetice de la un dipol electric liniar în $\lambda/2$. În acest scop ne referim la distribuția curentului într-o linie de transmisie cu două conductoare, care prin transformări geometrice succesive permite obținerea dipolului electric. Se consideră linia de transmisie bifilară fără pierderi (Fig. 6.2a) în care se presupune că atât diametrele cât şi distanța dintre conductoare sunt mult mai mici decât lungimea de undă. Mişcările sarcinilor dau naştere la unde progresive de curent de amplitudine $I_0/2$ în fiecare dintre conductoare; când unda de curent ajunge la capetele conductoarelor are loc reflexia totală adică faza se modifică cu $180°$ iar amplitudinea rămâne neschimbată.

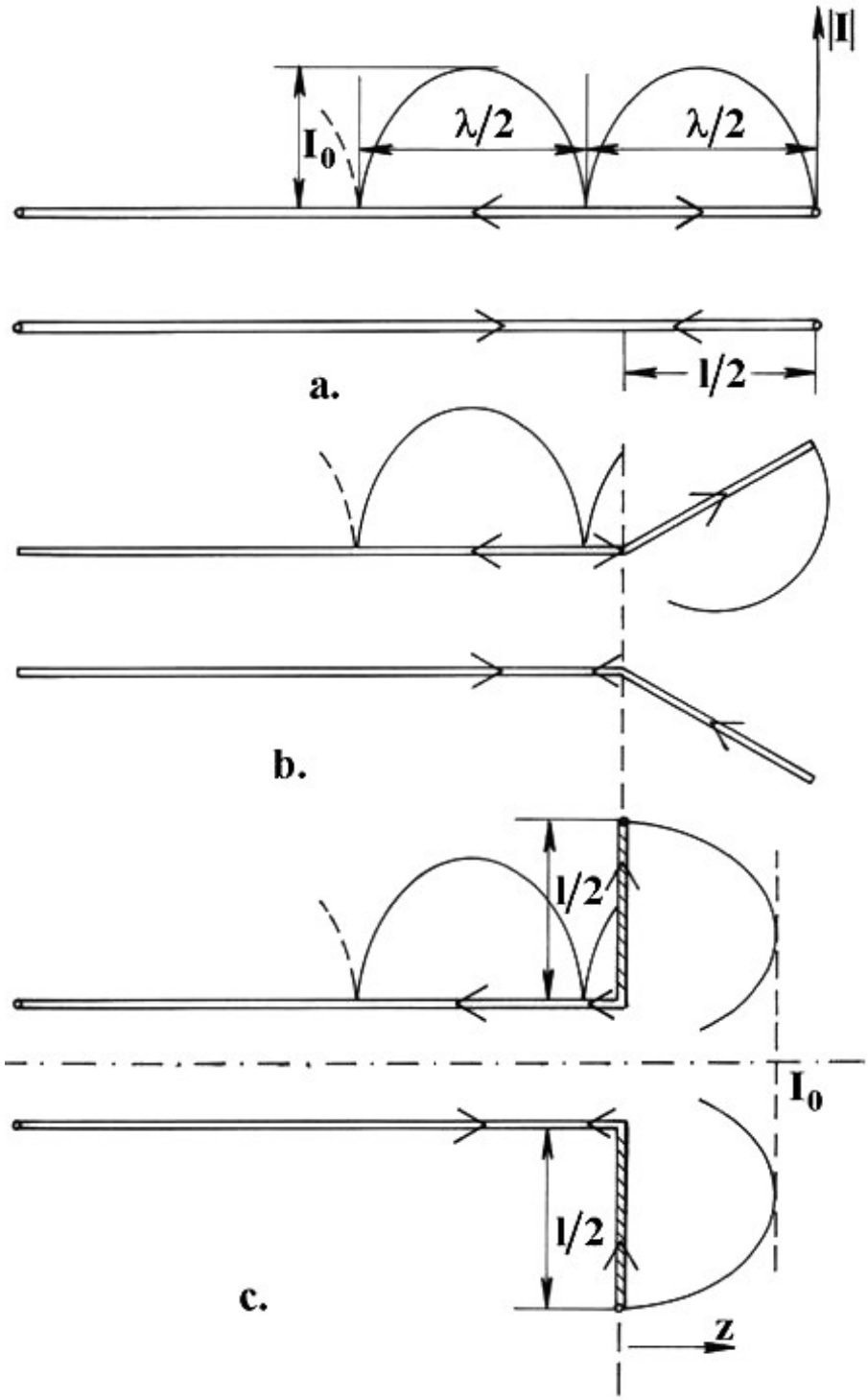



**Fig. 6.2 Principiul fizic de radiație a dipolului electric: a – unde staționare de curent în linia de transmisie în gol; b – îndepărtarea conductoarelor pe un segment de la capătul în gol al liniei; c – dipol liniar clasic conectat la linia de transmisie**

Unda reflectată se combină cu unda progresivă incidentă, astfel în fiecare conductor se formează unde staționare pure de formă sinusoidală (Fig. 6.2a); curentul din fiecare conductor suferă inversări de fază pentru jumătățile de ciclu învecinate. De la fiecare conductor (fir) individual are loc un proces de radiație deoarece curentul este variabil în timp iar conductoarele au lungime finită. Dacă linia este perfect simetrică, pe durata unei jumătăți de perioadă curentul dintr-un conductor este egal în amplitudine şi defazat cu *180°* față de curentul din celălalt conductor; având în vedere că $s << \lambda$ ($s$ este distanța dintre conductoare) câmpurile radiate de către fiecare din curenți se anulează reciproc, astfel linia de transmisie ideală nu radiază câmp electromagnetic. Dacă pe un segment de la capătul deschis al liniei se efectuează îndepărtarea conductoarelor (Fig. 6.2b) se poate admite că distribuția curenților în fiecare conductor rămâne aproximativ aceeaşi; însă ca urmare a îndepărtării conductoarelor câmpul radiat de către unul din curenți nu este total anulat de către câmpul celuilalt curent; astfel va avea loc o radiație netă a câmpului electromagnetic.

Îndepărtând segmentele de capăt la *90°* față de conductoarele liniei propriu-zise se ajunge la dipolul liniar clasic (Fig. 6.2c); ca urmare a faptului că curenții formează unde staționare, aceste structuri sunt numite antene cu undă staționară. Luând $l < \lambda$ (sau $l/2 < \lambda/2$) fazele curenților de undă staționară din fiecare braț al dipolului sunt aceleaşi pe întreaga lungime; de asemenea, curentul dintr-un braț are aceeaşi orientare spațială cu curentul din celălalt braț. Prin urmare câmpul radiat de un braț se adună cu câmpul radiat de celălalt braț (în cadrul analizei detaliate se ține seama de posibile faze diferite ale curenților pe diferite porțiuni ale brațelor). Admițând că lungimea $l$ a brațelor devine egală cu $\lambda/2$ se obține dipolul uzual, foarte răspândit la frecvențe înalte şi în domeniul microundelor; câmpurile radiate de către curenții din cele două brațe se adună total, crescând astfel eficiența de radiație.

*Metode de analiză.* Fiind dată marea diversitate a tipurilor de antene în practică se disting o multitudine de metode de analiză; pentru a obține soluții convergente care să țină seama de condițiile la limită, structura (antena) trebuie să fie descrisă, în general, de coordonatele curbilinii ortogonale; acest fapt limitează drastic numărul de antene care pot fi analizate prin această procedură. În practica curentă se caută alte metode, exacte sau aproximative. Actualmente două tipuri de metode sunt mai răspândite: metoda ecuațiilor integrale şi metoda bazată pe teoria geometrică a difracției.

Metoda ecuațiilor integrale (Integral Equations – IE) urmăreşte găsirea soluției sub forma unei integrale în care necunoscuta, de regulă densitatea curentului indus, este parte a integrandului; această metodă este foarte convenabilă pentru antene cu conductoare metalice filiforme, iar o eficiență ridicată a metodei survine în cazul structurilor cu lungime electrică mică (lungimea antenei este comparabilă cu lungimea de undă). Sunt cunoscute două variante ale metodei integrale: ecuații integrale pentru câmpul electric (Electric Field Integral Equations – EFIE) care se bazează pe condițiile la limită pentru câmpul electric tangențial total; ecuații integrale pentru câmpul magnetic (Magnetic Field Integral Equations – MFIE) care ia în considerare condițiile la limită referitoare la curentul electric indus pe o suprafață în funcție de câmpul magnetic incident. Primul obiectiv al metodelor integrale constă în formularea analitică completă a problemei, apoi poate fi utilizată o metodă numerică adecvată; în cazul de față foarte răspândită este metoda momentelor.

Teoria geometrică a difracției (Geomtrical Theory of Diffraction – GTD) constituie o extensie a opticii geometrice (Geometrical Optics – GO) în care s-a urmărit înlăturarea unor limitări ale opticii geometrice prin introducerea unui mecanism de difracție. Această metodă se aplică în special pentru sistemele cu dimensiuni relativ mari în comparație cu lungimea de undă (antene cu apertură, antene horn, antene cu suprafețe reflectante). În cazul unor structuri complicate care nu pot fi analizate separat prin una din metodele specificate mi sus, adesea se utilizează o combinație a lor; aceste combinații sunt denumite *metode hibride*.

## 6.2. RADIAȚIA DE LA SURSE ELEMENTARE

### 6.2.1. Radiația de la dipolul electric

O sursă elementară de radiație a câmpului electromagnetic este dipolul electric de lungime foarte mică, amplasat în originea sistemului de coordonate şi orientat după axa $z$ (Fig. 6.3).

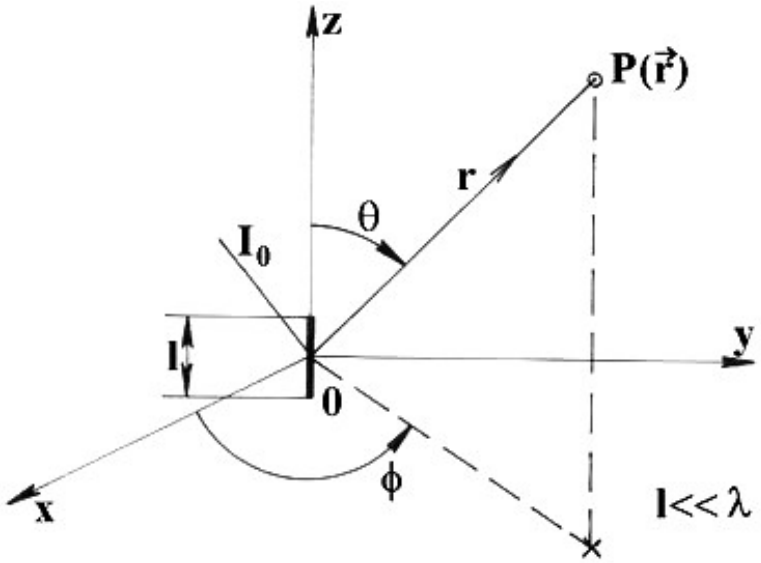



**Fig. 6.3 Radiația de la dipolul electric infinitesimal**

În funcție de raportul dintre lungimea dipolului şi lungimea de undă se disting trei cazuri: a) dipol infinitesimal, $l \le \lambda/50$, la care se presupune că curentul este constant pe întreaga lungime având valoarea $I_0$; b) dipol de lungime mică cu $\lambda/50 \le l \le \lambda/10$, la care curentul prezintă o variație triunghiulară în lungul lui $z$ (Fig. 6.4a), având valoarea maximă la mijloc (punctul de alimentare) şi valoarea zero la capete; c) dipol cu lungime finită unde $l$ are valori comparabile cu $\lambda$, $\lambda/2 \le l \le 4\lambda$; în acest ultim caz variația curentului în lungul dipolului are caracterul unei unde staționare (Fig. 6.4b) şi poate fi aproximată printr-o funcție sinusoidală. În scopul simplificării calculelor matematice se admite că diametrul conductoarelor este mult mai mic decât lungimea de undă, astfel curentul este concentrat în centrul conductorului.

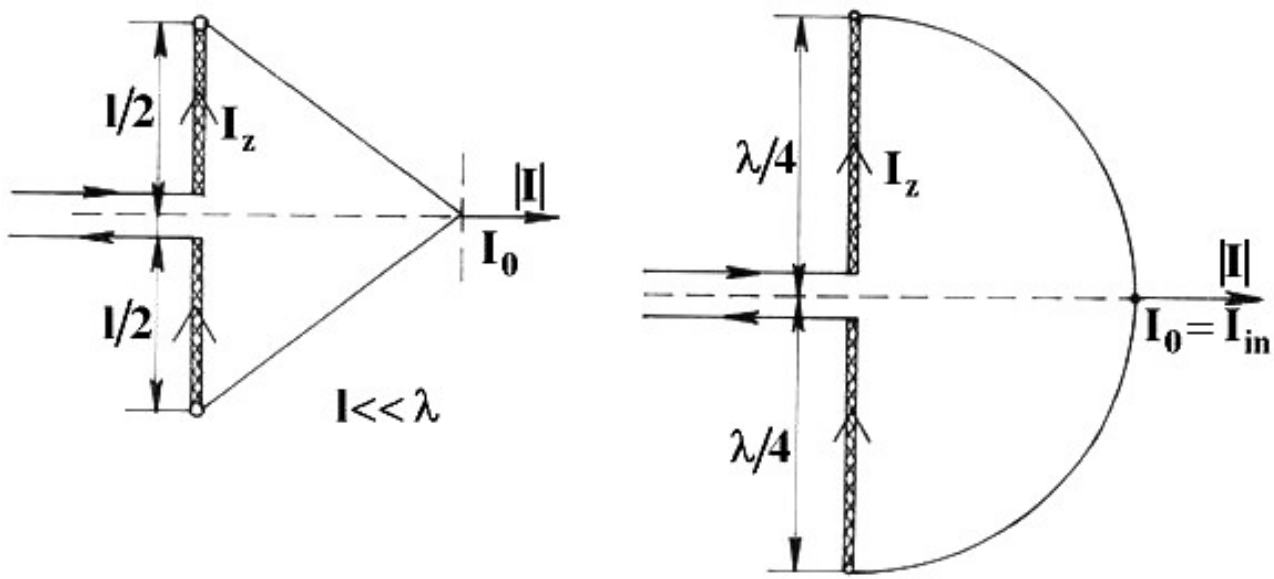



**Fig. 6.4 Variația curentului la dipolii electrici: a – dipol de lungime mică;**
**b – dipol de lungime comparabilă cu lungimea de undă (s-a considerat $l = \lambda/2$)**

În general pentru determinarea câmpului electromagnetic (vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$) într-un punct $P(\vec{r})$ din spaţiu este uzuală folosirea fie a potenţialelor vectoriale $\vec{A}(\vec{r})$ şi $\vec{A}_h(\vec{r})$ fie a vectorilor Hertz $\vec{\Pi}_e(\vec{r})$ şi $\vec{\Pi}_h(\vec{r})$, fie a funcţiilor Green adecvate pentru aceste potenţiale sau vectori. În cadrul studiului introductiv din această secţiune se va utiliza potenţialul vectorial (magnetic) $\vec{A}(\vec{r})$ (1.2.31); întrucât sursa (curentul) are componentă numai după $z$ (Fig. 6.3) şi potenţialul vectorial are numai componenta $\vec{A}_z$. Pentru a găsi expresia lui $\vec{A}_z(\vec{r})$ se utilizează ecuaţia Helmholtz neomogenă de tip (1.2.39) pe care o particularizăm la problema concretă din Fig. 6.3.

$$\nabla^2 A_z(\vec{r}) + k_0^2 A_z(\vec{r}) = -\mu_0 J_z \tag{6.2.1}$$

unde $k_0 = \omega(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$. Avem de rezolvat o problemă de emisie în spaţiul liber cu $r >> l$; se poate admite că în coordonate sferice $(r,\theta,\phi)$, $A_z$ depinde numai de distanţă şi nu variază cu direcţia, adică nu depinde de unghiurile $\theta$ şi $\phi$. Prin urmare operatorul Laplace în coordonate sferice (AI,(I.51)) depinde numai de $r$ şi (6.2.1) devine

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 d}{dr}\right) + k_0^2\right] A_z(r) = -\mu_0 J_z \tag{6.2.2}$$

Această ecuaţie este similară cu ecuaţia pentru funcţia Green scalară de spaţiu liber $G_0(r)$ (AIII, (III.3.3)); excepţie face numai forma termenului liber care aici poate fi scris ca $(-\mu_0 J_z)$ iar în (AIII, (III.3.3)) este simplu funcţia $\delta(r)$. Ţinând cont de expresia funcţiei Green $G_0(r)$ (AIII, (III.3.11))

$$G_0(r) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \tag{6.2.3}$$

soluţia ecuaţiei (6.2.2) se scrie sub forma (AIII, (III.3.31))

$$A_z(r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int_{V_0} J_z dV_0 \tag{6.2.4}$$

unde $V_0$ este volumul ce conţine sursa. Pentru evaluarea acestei integrale este necesară adoptarea unei legi de variaţie a curentului dipolului. Dacă curentul este concentrat în centrul conductorului integrala de volum se reduce la o integrală de linie pe lungimea dipolului; în cazul dipolului infinitesimal parcurs de curentul constant $I_0$ integrala ia forma

$$\int_{V_0} J_z dV_0 = \int_{-l/2}^{l/2} I_0 dl = I_0 l \tag{6.2.5}$$

unde mărimea $(lI_0)$ este numită adesea *moment al dipolului electric infinitesimal*. În cazul dipolului de lungime mică $(\lambda/50 \le l \le \lambda/10)$ curentul are variaţia triunghiulară din Fig. 6.4a, descrisă de relaţiile

$$I_z(z) = \begin{cases} I_0(1 - 2z/l), & 0 \le z \le l/2 \\ I_0(1 + 2z/l), & -l/2 \le z \le 0 \end{cases} \tag{6.2.6}$$

Integrala (6.2.5) se poate scrie

$$\int_{-l/2}^{0} I_0(1+2z/l)dz + \int_{0}^{l/2} I_0(1-2z/l)dz = \frac{I_0 l}{2} \tag{6.2.7}$$

Deşi dipolul infinitesimal constituie o idealizare, în continuare vom utiliza relația (6.2.5); trebuie observat totuşi că relația (6.2.7) diferă de (6.2.5) numai prin factorul $l/2$ ; dacă se consideră o lungime efectivă a dipolului $l_0 = l/2$, expresiile devin identice.

Expresia potențialului vectorial devine

$$A_z(r) = \frac{\mu_0 (lI_0)}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \tag{6.2.8}$$

$$\vec{A}_z(r) = \hat{k} A_z(r) = \hat{k} \frac{\mu_0 (lI_0)}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \tag{6.2.9}$$

Câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ se pot determina prin utilizarea expresiilor (1.2.41) şi (1.2.42)

$$\vec{H}(\vec{r}) = (1/\mu_0)\left(\nabla \times \vec{A}_z(\vec{r})\right) \tag{6.2.10}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{A}_z(\vec{r}) - \frac{j}{\omega \varepsilon_0 \mu_0} \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A}_z(\vec{r})\right) \tag{6.2.11}$$

Pe parcursul calculelor este necesară utilizarea transformărilor reciproce între coordonatele cartesiene şi cele sferice, care pot fi puse sub formă matriceală, aşa cum rezultă din (AI, (I.47))

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \tag{6.2.12}$$

Exprimând pe $\vec{A}_z(r)$ în coordonate sferice se obține

$$\vec{A}_z(r) = \hat{k} A_z(r) = \left(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta\right) A_z(r) = \vec{A}_r + \vec{A}_\theta \tag{6.2.13}$$

în care s-a notat

$$\vec{A}_r = \hat{r} A_z \cos\theta; \quad \vec{A}_\theta = -\hat{\theta} A_z \sin\theta \tag{6.2.14}$$

Conform (AI, (I.53)), în cazul nostru produsul vectorial $\nabla \times \vec{A}_z(r)$ devine

$$\nabla \times \vec{A}_z(r) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi} \tag{6.2.15}$$

astfel vectorul câmp magnetic capătă expresia

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{lI_0}{4\pi}\left(\frac{jk_0}{r} + \frac{1}{r^2}\right) e^{-jk_0 r} \sin\theta\, \hat{\phi} = H_\phi(r)\hat{\phi} \tag{6.2.16}$$

Câmpul electric $\vec{E}(\vec{r})$ poate fi calculat fie utilizând expresia potențialului $\vec{A}_z(r)$ (6.2.11), fie utilizând ecuația Maxwell pentru un mediu liniar fără surse (1.2.10)

$$\vec{E}(\vec{r}) = (1/j\omega\varepsilon)\left(\nabla \times \vec{H}(\vec{r})\right) \tag{6.2.17}$$

În cazul utilizării relației (6.2.11) este necesar să se calculeze $grad\, div\, \vec{A}_z(r)$ pe baza relațiilor (AI, (I.52), (I.50)). Deoarece avem deja calculată expresia lui $\vec{H}(\vec{r}) = \hat{\phi}\, H_\phi(r)$ (6.2.16), aici este convenabil să utilizăm relația (6.2.17); $rot\vec{H}(\vec{r})$ se calculează pe baza relației (AI, (I.53)).

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \hat{\phi} H_\phi = \hat{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_\phi \sin\theta\right)\right] + \hat{\theta}\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\phi\right)\right] \tag{6.2.18}$$

Efectuăm calculele şi ţinem cont de factorul $(1/j\omega\varepsilon)$; se obţine

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-j(lI_0)Z_0}{2\pi k_0}\left(\frac{jk_0}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)e^{-jk_0r}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{j(lI_0)Z_0}{4\pi k_0}\left(\frac{k_0^2}{r}-\frac{jk_0}{r^2}-\frac{1}{r^3}\right)e^{-jk_0r}\sin\theta\,\hat{\theta} \tag{6.2.19}$$

unde $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$; ultima relaţie poate fi scrisă într-o formă condensată

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}\,E_r(r) + \hat{\theta}\,E_\theta(r) \tag{6.2.20}$$

*Zone de emisie.* Din punctul de vedere al variaţiei cu distanţa ale componentelor de câmp $\vec{E}$ şi $\vec{H}$, spaţiul liber din jurul antenei este divizat uzual în trei zone: a) zona apropiată reactivă de câmp; b) zona de emisie apropiată (Fresnel); c) zona de emisie depărtată (Fraunhofer). Criteriile riguroase de divizare a spaţiului liber în aceste trei regiuni sunt discutate ulterior în § 6.4. Aici ne oprim asupra zonei de emisie Fraunhofer pentru care $|k_0 r| >> 1$; astfel termenii proporţionali cu ($r^{-2}$, $r^{-3}$) corespund zonelor apropiate (reactivă şi Fresnel) iar termenii proporţionali cu $r^{-1}$ corespund zonei depărtate de emisie (Fraunhofer). În zona depărtată are loc transport efectiv de putere de la antenă spre un punct situat la infinit; o antenă de dimensiuni finite radiază la infinit unde sferice care satisfac condiţia

$$Z_0\vec{H}(\vec{r}) = \hat{r}\times\vec{E}(\vec{r}) \tag{6.2.21}$$

relaţie caracteristică pentru unde sferice transversal electromagnetice (TEM) care se propagă de la antenă spre spaţiul liber. Din expresiile (6.2.16) şi (6.2.19) se reţin numai termenii proporţionali cu $r^{-1}$, obţinându-se

$$H_\phi = \frac{jk_0(lI_0)}{4\pi r}e^{-jk_0r}\sin\theta;\ \vec{H}_\phi = H_\phi\hat{\phi} \tag{6.2.22}$$

$$E_\theta = \frac{jZ_0k_0(lI_0)}{4\pi r}e^{-jk_0r}\sin\theta;\ \vec{E}_\theta = E_\theta\hat{\theta} \tag{6.2.23}$$

Pentru componentele $\vec{E}_\theta$ şi $\vec{H}_\phi$ de zonă depărtată condiţiile Sommerfeld de radiaţie la infinit iau forma [1] (vezi şi AIII, (III.38))

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\omega\hat{r}\times\mu\vec{H} + k_0\vec{E}\right] = 0 \tag{6.2.24}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left[k_0\hat{r}\times\vec{E} - \omega\mu\vec{H}\right] = 0 \tag{6.2.25}$$

$$\left|r\vec{E}\right| < K;\ \left|r\mu\vec{H}\right| < K \tag{6.2.26}$$

unde *K* este o constantă finită.

### 6.2.2. Radiaţia de la dipolul magnetic

Se consideră o buclă circulară de curent al cărei diametru este mult mai mic decât lungimea de undă (Fig.6.5a), fiind orientată într-un plan perpendicular pe $z$. Notând prin $S_0 = \pi a^2 = \pi d^2/4$ aria şi $I_0$ curentul care circulă prin buclă, se defineşte momentul de dipol magnetic

$$\vec{M}_z = S_0 I_0 \hat{k} \tag{6.2.27}$$

($\hat{k}$ este versorul coordonatei $z$). La rândul ei densitatea de curent magnetic $\vec{J}_{mz}$ este definită prin relația (1.1.56)

$$\vec{J}_{mz} = j\omega\mu_0\vec{M}_z \tag{6.2.28}$$

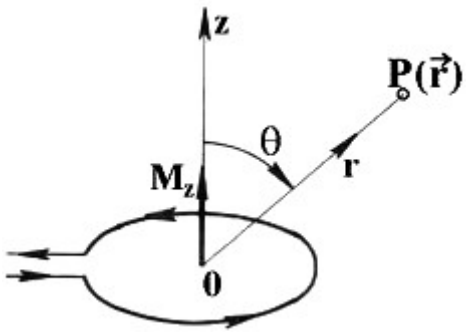



**Fig. 6.5 Radiația de la dipolul magnetic infinitesimal**

Pentru determinarea componentelor de câmp $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ în zona depărtată există două căi: utilizarea ecuației de propagare pentru potențialul vectorial electric $\vec{A}_h(\vec{r})$ (1.2.52) sau a ecuației de propagare pentru vectorul Hertz magnetic $\vec{\Pi}_h(\vec{r})$ (1.2.65). Aici vom utiliza potențialul vectorial $\vec{A}_h(\vec{r})$ definit prin relația (1.2.43); având în vedere că sursa $\vec{J}_m$ are componentă numai după axa $z$, şi potențialul vectorial $\vec{A}_h$ va avea componente numai după axa $z$, astfel ecuația de propagare ia forma

$$\nabla^2 A_{hz}(r) + k_0^2 A_{hz}(r) = -\varepsilon_0 J_{mz} \tag{6.2.29}$$

care este analogă cu (6.2.1). Întrucât se urmăreşte găsirea vectorilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ în spațiul liber cu $r >> a$ se utilizează sistemul de coordonate sferice; se admite că $A_{hz}(r)$ depinde numai de unghiurile $\theta$ şi $\phi$. Operatorul Laplace în coordonate sferice depinde numai de $r$, astfel (6.2.29) devine

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) + k_0^2\right] A_{hz}(r) = -\varepsilon_0 J_{mz} \tag{6.2.30}$$

care este total analogă cu (6.2.2), prin urmare soluția are forma (6.2.4)

$$A_{hz}(r) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\int_{V_0} I_{mz}\,dV_0 = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\left(j\omega\mu_0 S_0 I_0\right)\frac{e^{-jk_0 r}}{r} \tag{6.2.31}$$

$$\vec{A}_{hz}(r) = \hat{k}A_{hz}(r) = \frac{j\omega\mu_0\varepsilon_0}{4\pi}\left(S_0 I_0\right)\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\hat{k} \tag{6.2.32}$$

Componentele de câmp $\vec{E}_h$ şi $\vec{H}_h$ se obțin prin utilizarea relațiilor (1.2.54), (1.2.55)

$$\vec{E}_h(\vec{r}) = -(1/\varepsilon_0)\nabla\times\vec{A}_{hz}(\vec{r}) \tag{6.2.33}$$

$$\vec{H}_h(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}_{hz}(\vec{r}) - \frac{j}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}_{hz}(\vec{r})\right) \tag{6.2.34}$$

Procedând similar ca la dipolul electric se obține

$$\vec{E}_h(\vec{r}) = \frac{-j\omega\mu_0}{4\pi}\left(S_0 I_0\right)\left(\frac{jk_0}{r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-jk_0 r}\sin\theta\hat{\phi} \tag{6.2.35}$$

$$\vec{H}_h(\vec{r}) = \frac{(S_0 I_0)}{2\pi}\left(\frac{jk_0}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)e^{-jk_0 r}\cos\theta\,\hat{r} + \frac{(S_0 I_0)}{4\pi}\left(-\frac{k_0^2}{r} + \frac{jk_0}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\sin\theta\,\hat{\theta} \qquad (6.2.36)$$

Pentru zona Fraunhofer se reţin numai termenii proporţionali cu $r^{-1}$

$$E_{h\phi}(\vec{r}) = \frac{(S_0 I_0)k_0^2 Z_0}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\sin\theta; \qquad \vec{E}_{h\phi}(\vec{r}) = E_{h\phi}(\vec{r})\hat{\phi} \qquad (6.2.37)$$

$$H_{h\theta}(\vec{r}) = \frac{-(S_0 I_0)k_0^2}{4\pi}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\sin\theta; \quad \vec{H}_{h\theta}(\vec{r}) = H_{h\theta}(\vec{r})\hat{\theta} \qquad (6.2.38)$$

## 6.3. PARAMETRII FUNDAMENTALI AI ANTENELOR

Performanţele antenelor sunt adecvat descrise cu ajutorul unui set de parametrii şi definiţii. În această secţiune se prezintă pe scurt parametrii fundamentali, utilizându-se expresiile câmpurilor de zonă depărtată, obţinute pentru dipolul electric şi cel magnetic. Aceşti parametri sunt particularizaţi ulterior pentru tipuri mai complicate de antene, care au performanţe superioare.

### 6.3.1. Diagrame de radiaţie

Antenele practice nu radiază uniform în toate direcţiile din spaţiu; apare astfel necesitatea de a trasa diagrame pentru valori relative ale intensităţilor câmpului sau ale puterii radiate, ca funcţii de unghiurile $\theta$ şi $\phi$ pentru valori constante ale distanţei $r$. Suprafeţele rezultate descriu diagrame de radiaţie ale antenei: dacă pentru trasarea diagramei se utilizează intensitatea câmpului electric (sau magnetic) se obţin *diagrame de câmp*; dacă pentru trasarea diagramei se utilizează densitatea de putere se obţin *diagramele de putere*. În general, proprietăţile de radiaţie se referă la distribuţia spaţială (tridimensională) a energiei radiate sau a intensităţii câmpului ca funcţie de un punct de observaţie de rază constantă, situat în zona Fraunhofer. De regulă se utilizează diagrame bidimensionale care reprezintă curbe obţinute prin secţionarea suprafeţelor în plane adecvat selectate; cu ajutorul a câtorva diagrame bidimensionale (funcţie de $\theta$ pentru valori particulare ale lui $\phi$, sau funcţie de $\phi$ pentru valori particulare ale lui $\theta$) se pot construi diagramele tridimensionale (suprafeţele).

**1°. Diagrame de câmp.**

Considerăm dipolul electric (Fig. 6.3) pentru care câmpul electric în zona depărtată are componentă numai după direcţia $\theta$ (6.2.23). Valoarea relativă a intensităţii câmpului se obţine prin normare la valoarea maximă, care survine pentru $\theta = \pi/2$; astfel se poate scrie

$$f_E(\theta,\phi) = \frac{|E_\theta(\theta,\phi)|}{|E_\theta(\pi/2,\phi)|} = |\sin\theta| \qquad (6.3.1)$$

al cărei grafic pentru $\phi = 0$ este reprezentat în Fig. 6.6a; întrucât această diagramă bidimensională este independentă de $\phi$, diagrama tridimensională pentru dipolul electric va reprezenta o suprafaţă obţinută printr-o mişcare de revoluţie în jurul axei $z$ (Fig. 6.6b).

În cazul dipolului magnetic se operează cu câmpul $E_{h\phi}$ (6.2.37).

**2°. Diagrame de putere.**

Aceste diagrame se trasează pentru puterea radiată în zona depărtată; puterea transportată de undele electromagnetice se calculează cu ajutorul vectorului Poynting mediat (partea reală) definit în §1.4.2 prin relaţia (1.4.19). Puterea reală radiată de către antenă este

$$P_{rad} = \int_S \frac{1}{2} Re\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right] \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} \int_S Re\left[\vec{E} \times \vec{H}^*\right] \cdot \hat{n}\, ds \tag{6.3.2}$$

unde: $\hat{n}$ este versorul normalei la suprafață (aici se poate pune $\hat{n} = \hat{r}$ ); $ds = r^2 d\Omega = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ este elementul infinitezimal de arie ($d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ reprezintă elementul de unghi solid). Mai întâi observăm că vectorul Poynting mediat (real) în cazul dipolului electric, pentru zona depărtată, are expresia

$$\vec{S}_r(\theta,\phi) = P_{\square}(\theta,\phi) = \frac{1}{2} Re\left[\vec{E}_\theta \times \vec{H}_\phi^*\right] = \frac{1}{2} \frac{(lI_0)^2 k_0^2 Z_0}{(4\pi r)^2} \sin^2\theta\, \hat{r} \tag{6.3.3}$$

şi reprezintă puterea reală radiată pe unitate de arie ($W/m^2$), deci $P_{\square}(\theta,\phi)$ este o *densitate de putere*.

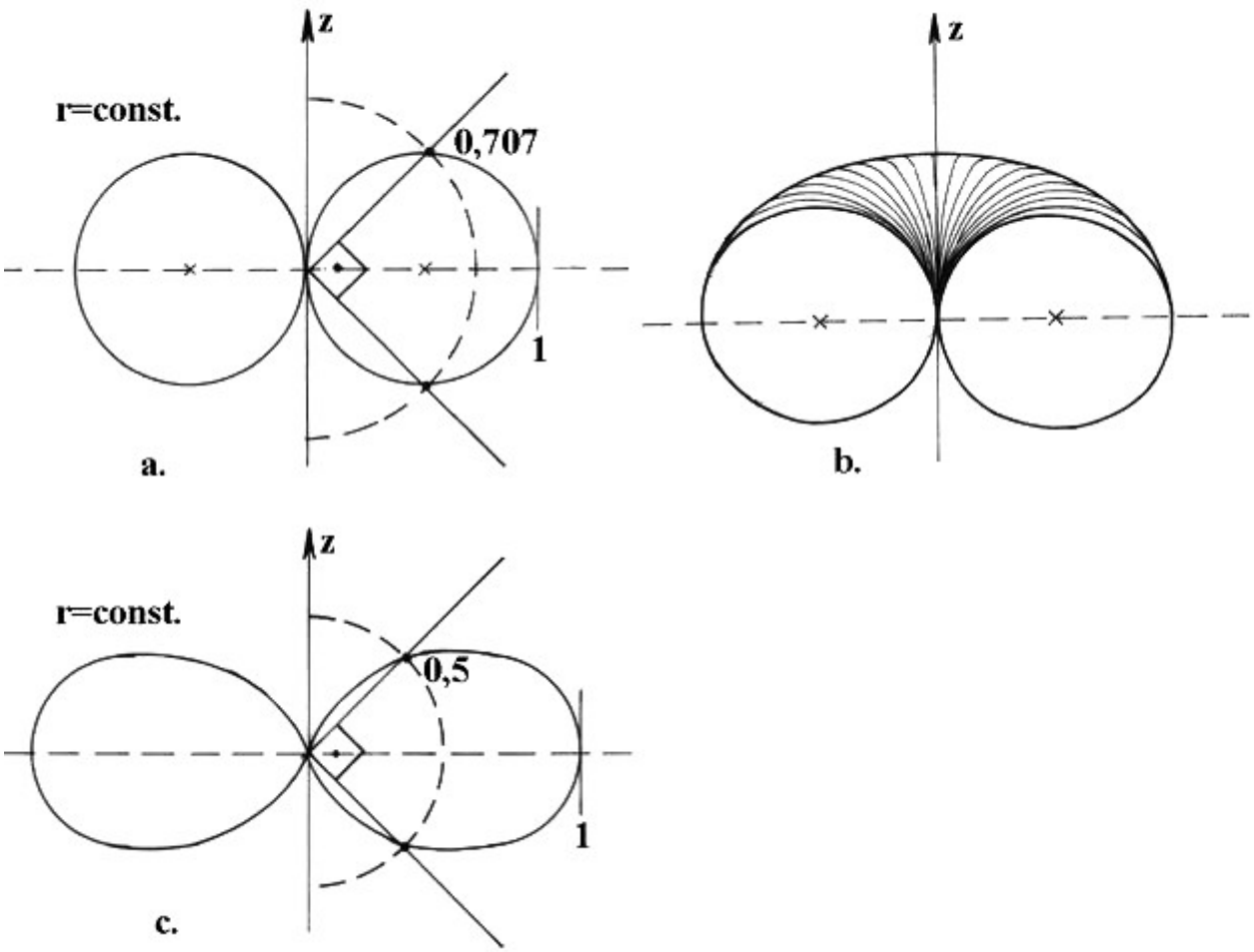



**Fig. 6.6 Diagrame de radiație: a – diagramă de câmp; b – diagramă spațială; c – diagramă de putere**

Sub formă generală diagrama de putere se defineşte prin raportul densității de putere (6.3.3) supra valoarea maximă care se obține pentru $\theta = \pi/2$ ; astfel se obține

$$f_P(\theta,\phi) = \frac{P_{\square}(\theta,\phi)}{P_{\square}(\pi/2,\phi)} = \sin^2\theta \tag{6.3.4}$$

al cărei grafic este reprezentat în Fig. 6.6c. Diagrama bidimensională este independentă de $\phi$, astfel diagrama tridimensională (suprafața) se obține printr-o mişcare de revoluție în jurul axei $z$ .

Diagramele de directivitate $f_E(\theta,\phi)$ şi $f_P(\theta,\phi)$ ale antenelor practice conţin de regulă un lob principal şi mai mulţi lobi secundari (minori) de amplitudine mai mică. Lobul principal este caracterizat prin specificarea deschiderii unghiulare între punctele unde densitatea de putere scade la jumătate faţă de valoarea maximă. În cazul concret al dipolului electric lărgimea lobului (fasciculului) din planul *E* (adică $\phi = 0$) când puterea scade cu 3*dB* este $\Delta\theta = 90°$ (Fig. 6.6c); de asemenea, din diagrama de câmp (Fig. 6.6a) rezultă că deschiderea unghiulară este tot de $\Delta\theta = 90°$ când intensitatea câmpului scade la $1/\sqrt{2}$ din valoarea maximă.

### 6.3.2. Directivitate

Antenele utilizate în practică sunt „directive" (neisotrope) adică concentrează puterea radiată pe o direcţie preferenţială; *directivitatea* antenelor reprezintă o măsură a proceselor de concentrare relativă a puterii emise pe o direcţie dată. Uzual, directivitatea se defineşte în raport cu un radiator isotrop ideal, care are o diagramă de radiaţie tridimensională sferică. Pentru o antenă (sursă) neisotropă directivitatea se defineşte ca raportul dintre *intensitatea de radiaţie* pe o direcţie specificată şi intensitatea de radiaţie a unei surse isotrope. Intensitatea de radiaţie pe o direcţie dată este definită ca puterea radiată de antenă în unitatea de unghi solid; intensitatea de radiaţie $P_\Omega(\theta,\phi)$ se obţine direct [5] prin multiplicarea densităţii de radiaţie $P_\square(\theta,\phi) = S_r(\theta,\phi)$ cu $r^2$

$$P_\Omega(\theta,\phi) = r^2 P_\square(\theta,\phi) \quad \text{[W/unitate de unghi solid]} \tag{6.3.5}$$

Puterea totală radiată de către antenă în zona depărtată se defineşte clasic prin relaţia

$$P_{rad} = \int_S P_\square(\theta,\phi)\cdot d\vec{s} \tag{6.3.6}$$

În cazul dipolului electric avem

$$P_{rad} = \frac{(lI_0)^2 k_0^2 Z_0}{32\pi^2}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} sin^2\,\theta d\theta d\phi = (lI_0)^2\,\frac{k_0^2 Z_0}{12\pi^2} \tag{6.3.7}$$

unde $P_{rad}$ se exprimă în *W*. Este evident că ţinând cont de (6.3.5) se poate scrie

$$P_{rad} = \int_\Omega P_\Omega(\theta,\phi)d\Omega = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} P_\Omega\, sin^2\,\theta d\theta d\phi \tag{6.3.8}$$

obţinându-se pentru dipolul electric un rezultat identic cu (6.3.7). Introducerea conceptului de intensitate de radiaţie ne permite o formulare matematică riguroasă a directivităţii

$$D(\theta,\phi) = \frac{Intensitatea\ de\ radiatie\ pe\ directia\ (\theta_0,\phi_0)}{Intensitatea\ de\ radiatie\ a\ radiatorului\ isotrop} \tag{6.3.9}$$

Intensitatea de radiaţie a unei surse isotrope $P_{0\Omega}$ se calculează uşor utilizând formula (6.3.8); pentru sursa isotropă atât $P_\square$ cât şi $P_\Omega$ sunt independente de $\theta$ şi $\phi$, astfel se poate scrie

$$P_{rad} = \int_\Omega P_{0\Omega}d\Omega = P_{0\Omega}\int_\Omega d\Omega = 4\pi P_{0\Omega} \tag{6.3.10}$$

din care scoatem

$$P_{0\Omega} = P_{rad}/4\pi \tag{6.3.11}$$

astfel (6.3.9) se poate formula matematic după cum urmează

$$D(\theta,\phi) = \frac{P_\Omega(\theta,\phi)}{P_{0\Omega}} = 4\pi\,\frac{P_\Omega(\theta,\phi)}{P_{rad}} \tag{6.3.12}$$

Ne referim la dipolul electric; ținând cont de expresia (6.3.3) a densității de putere $P_{\square}(\theta,\phi)$, de definiția (6.3.5) a intensității de radiație şi de puterea totală radiată (6.3.7) rezultă

$$D(\theta,\phi)=4\pi\frac{(lI_0)^2 k_0^2 Z_0 \sin^2\theta/32\pi}{k_0^2 Z_0 (lI_0)^2/12\pi}=\frac{3}{2}\sin^2\theta \tag{6.3.13}$$

Dacă direcția $(\theta_0,\phi_0)$ nu este specificată, atunci se ia direcția de intensitate maximă de radiație, care în cazul dipolul electric este $(\theta_0=\pi/2,\phi_0=0)$; rezultă o directivitate maximă

$$D_{max}=D_0=\frac{P_{\Omega max}}{P_{0\Omega}}=4\pi\frac{P_{\Omega max}}{P_{rad}}=1{,}5 \tag{6.3.14}$$

care este considerată nesatisfăcătoare în sisteme de radiocomunicații performante.

În cazul general al antenelor cu componente de polarizare ortogonale se pot defini *directivități parțiale*: directivitatea parțială a antenei pentru o polarizare dată şi pentru o direcție dată se defineşte ca raportul dintre intensitatea de radiație respectivă şi intensitatea de radiație totală pentru toate direcțiile. Directivitatea totală este suma directivităților parțiale pentru oricare două polarizări ortogonale. În cazul sistemului de coordonate sferice directivitatea totală maximă a antenei $D_0$, pentru componente ortogonale $\theta$ şi $\phi$, este

$$D_0=D_\theta+D_\phi \tag{6.3.15}$$

în care s-a notat

$$D_\theta=\frac{4\pi P_{\Omega\theta}}{(P_{rad})_\theta+(P_{rad})_\phi} \tag{6.3.16}$$

$$D_\phi=\frac{4\pi P_{\Omega\phi}}{(P_{rad})_\theta+(P_{rad})_\phi} \tag{6.3.17}$$

unde $P_{\Omega\theta}$ şi $P_{\Omega\phi}$ sunt intensitățile de radiație într-o direcție dată, datorate componentelor de câmp $\theta$, respectiv $\phi$; $(P_{rad})_\theta$ şi $(P_{rad})_\phi$ sunt puterile radiate în toate direcțiile datorate componentelor de câmp $\theta$, respectiv $\phi$.

*Generalizare.* În cazul surselor (antenelor) ale căror diagrame de radiație (pattern) sunt funcții de ambele coordonate sferice $(\theta,\phi)$ se pot defini expresii mai generale pentru directivitate. Admitem că intensitatea de radiație a unei astfel de antene este de forma

$$P_\Omega(\theta,\phi)=B_0F(\theta,\phi)=\frac{1}{2Z_0}\left[\left|E_\theta^o(\theta,\phi)\right|^2+\left|E_\phi^o(\theta,\phi)\right|^2\right] \tag{6.3.18}$$

unde $B_0$ este o constantă iar $E_\theta^o$ şi $E_\phi^o$ sunt componentele de câmp de zonă depărtată. Puterea totală radiată definită prin relația (6.3.8) este

$$P_{rad}=B_0\int_\Omega F(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi \tag{6.3.19}$$

astfel, ținând cont de (6.3.12), se poate scrie o expresie generală a directivității

$$D(\theta,\phi)=4\pi\frac{F(\theta,\phi)}{\int_0^\pi\int_0^{2\pi}F(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi} \tag{6.3.20}$$

Luând valoarea maximă a intensității de radiație

$$P_{\Omega max} = B_0 F(\theta,\phi)_{max} \tag{6.3.21}$$

se obține directivitatea maximă

$$D_{max} = D_0 = 4\pi \frac{F(\theta,\phi)_{max}}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi} \tag{6.3.22}$$

Ultima relație poate fi scrisă sub formă mai convenabilă în cazul unor antene de directivitate ridicată (fascicule înguste)

$$D_0 = \frac{4\pi}{\left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi\right] \Big/ F(\theta,\phi)_{max}} = \frac{4\pi}{\Omega_A} \tag{6.3.23}$$

unde $\Omega_A$ reprezintă unghiul solid al fasciculului (lobului) şi are expresia

$$\Omega_A = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi \tag{6.3.24}$$

cu

$$F_n(\theta,\phi) = F(\theta,\phi)/F(\theta,\phi)_{max} \tag{6.3.25}$$

Unghiul solid al fasciculului $\Omega_A$ este definit ca unghiul solid prin care va curge întreaga putere radiată de antenă, presupunând că intensitatea de radiație este constantă şi egală cu valoarea maximă $P_{\Omega max}$ pentru toate unghiurile cuprinse în $\Omega_A$.

### 6.3.3. Câştigul antenei

Câştigul reprezintă un parametru care descrie performanțele antenei mai complet decât directivitatea $D(\theta,\phi)$; câştigul notat $G(\theta,\phi)$ ține seama de mai mulți factori ce caracterizează *eficiența antenei* (directivitatea ia în considerare numai proprietățile directive). În general câştigul se defineşte ca raportul dintre intensitatea de radiație a antenei pe o direcție dată şi puterea totală aplicată la intrarea unei antene de referință, presupusă isotropă. Relația matematică este

$$G(\theta,\phi) = 4\pi \frac{P_\Omega(\theta,\phi)}{P_{in}} \tag{6.3.26}$$

unde $P_{in}$ reprezintă puterea totală aplicată la intrarea antenei. În Fig.6.7 este reprezentată o antenă clasică de tip horn piramidal, unde este specificată diferența dintre puterea radiată şi puterea aplicată antenei, astfel se poate scrie

$$P_{rad} = \eta_A P_{in} \tag{6.3.27}$$

unde $\eta_A$ reprezintă o eficiență globală a antenei. Expresia câştigului devine

$$G(\theta,\phi) = \eta_A \left[4\pi \frac{P_\Omega(\theta,\phi)}{P_{rad}}\right] = \eta_A D(\theta,\phi) \tag{6.3.28}$$

Valoarea maximă a câştigului este determinată de valoarea maximă a directivității

$$G(\theta,\phi)_{max} = G_0 = \eta_A D_0 \tag{6.3.29}$$

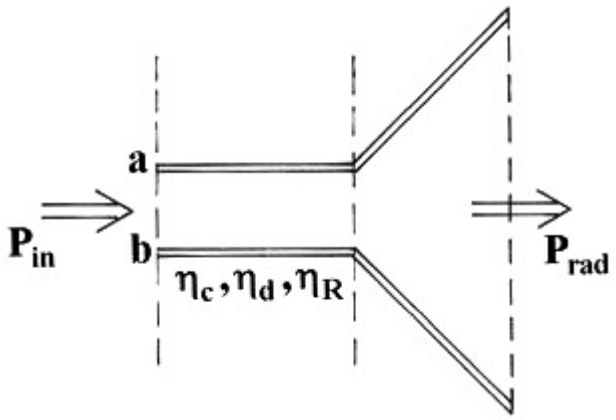



**Fig. 6.7 Schiță pentru evaluarea câștigului antenei**

Există mai multe elemente care pot influența valoarea eficienței $\eta_A$: pierderile în conductoare, pierderi dielectrice şi pierderi de reflexie; prin urmare se poate scrie

$$\eta_A = \eta_c \eta_d \eta_R \tag{6.3.30}$$

unde: $\eta_c$ ia în considerare pierderile în conductoare; $\eta_d$ ia în considerare pierderile dielectrice; $\eta_R = \left(1 - |\Gamma|^2\right)$ ia în considerare pierderile de reflexie cauzate de neadaptarea dintre linia de transmisie (alimentare) şi impedanța de intrarea a antenei; avem $\underline{\Gamma} = \left(\underline{Z}_A - Z_{c0}\right)/\left(\underline{Z}_A + Z_{c0}\right)$ unde $Z_{c0}$ este impedanța caracteristică a liniei de transmisie iar $\underline{Z}_A$ este impedanța de intrare a antenei. Unii autori includ în $\eta_A$ şi pierderile de polarizare $\eta_P$ care sunt discutate mai jos.

### 6.3.4. Impedanța de intrare a antenei

Prin impedanța de intrare a antenei se înțelege impedanța văzută la terminalele *a-b* (Fig. 6.8a), adică în punctul de conectare al liniei de alimentare. În general, impedanța văzută la terminalele *a-b* are o parte reală şi una imaginară

$$\underline{Z}_A = R_A + jX_A \tag{6.3.31}$$

Partea imaginară $X_A$ este datorată energiei reactive înmagazinată în spațiul din vecinătatea imediată a antenei (zona apropiată inductivă). Partea reală $R_A$ are două componente

$$R_A = R_{rad} + R_P \tag{6.3.32}$$

unde: $R_{rad}$ este numită rezistență de radiație şi caracterizează puterea radiată de antenă; $R_P$ include diferite mecanisme de pierderi (conducție, dielectrice); pierderi suplimentare pot surveni atunci când în apropierea antenei sunt plasate obiecte metalice, inclusiv planuri de masă. Rezistența $R_{rad}$ este definită ca o rezistență echivalentă care disipă o cantitate de putere egală cu puterea radiată, atunci când curentul prin această rezistență este egal cu curentul la terminalele de intrare ale antenei. Particularizăm pentru dipolul electric de lungime $l$ străbătut de curentul $I_0$. Puterea radiată se poate scrie sub forma

$$P_{rad} = R_{rad} |I_0|^2 / 2 \tag{6.3.33}$$

Ținând cont de (6.3.7) avem

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{|I_0|^2/2} = \frac{l^2 k_0^2 Z_0}{6\pi} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda_0}\right)^2 \Omega; \tag{6.3.34}$$

dacă $l = 0{,}01\lambda_0$ rezultă $R_{rad} \cong 0{,}08\Omega$, dacă $l = 0{,}25\lambda_0$ rezultă $R_{rad} \cong 50\Omega$. În cazul dipolului magnetic, ținând cont de expresiile (6.2.37) şi (6.2.38), puterea radiată în zona depărtată este

$$P_{rad} = \frac{\left(S_0 |I_0|\right)^2 Z_0 k_0^4}{12\pi} \tag{6.3.35}$$

astfel rezistența de radiație se scrie

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{|I_0|^2/2} = \frac{S_0^2 Z_0 k_0^4}{6\pi} = 20\pi^6 \left(\frac{d}{\lambda_0}\right)^4 \tag{6.3.36}$$

unde $d = 2a$ este diametrul buclei.

Se va observa că puterea radiată de dipolul electric este proporțională cu pătratul frecvenței, în timp ce puterea radiată de dipolul magnetic este proporțională cu frecvența la puterea a patra.

Referitor la bilanțul puterilor in sistemul generator – antenă de emisie (Fig. 6.8a) se pot face câteva considerente utile. Admițând că impedanța internă a generatorului este

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g \tag{6.3.37}$$

amplitudinea curentului absorbit de la generator va fi

$$I_g = \frac{V_g}{\left[\left(R_{rad} + R_P + R_g\right)^2 + \left(X_A + X_g\right)^2\right]^{1/2}} \tag{6.3.38}$$

Puterile radiată, disipată pe $R_P$ şi pe $R_g$ se definesc ca

$$P_{rad} = \frac{I_g^2 R_{rad}}{2}; \quad P_P = \frac{I_g^2 R_P}{2}; \quad P_g = \frac{I_g^2 R_g}{2} \tag{6.3.39}$$

Considerând cazul uzual de adaptare (transfer maxim de putere)

$$\begin{aligned} R_{rad} + R_P &= R_g \\ X_A &= -X_g \end{aligned} \tag{6.3.40}$$

avem

$$P_{rad} = \frac{V_g^2}{8}\left[\frac{R_{rad}}{\left(R_{rad} + R_P\right)^2}\right]; \quad P_P = \frac{V_g^2}{8}\left[\frac{R_P}{\left(R_{rad} + R_P\right)^2}\right]; \quad P_g = \frac{V_g^2}{8R_g} \tag{6.3.41}$$

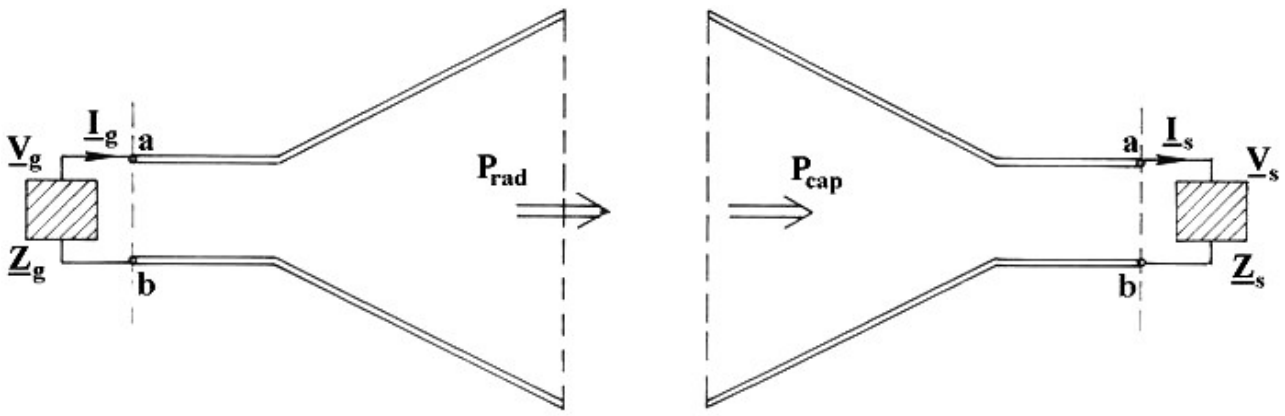



**Fig. 6.8 Definirea impedanței de intrare a antenei:**
**a – antenă în regim de emisie; b – antenă în regim de recepție**

Puterea furnizată de către generator în condiții de adaptare este

$$P_{sup} = \frac{V_g I_g^*}{2} = \frac{V_g^2}{4} \frac{1}{R_{rad} + R_P} \tag{6.3.42}$$

Se observă că din puterea furnizată de generator jumătate este disipată pe rezistența internă $R_g$ şi jumătate este transmisă spre antenă; din această ultimă jumătate o parte este radiată ($P_{rad}$) iar o parte este disipată sub formă de căldură pe rezistența de pierderi $R_P$.

Dacă antena este utilizată în regim de recepție (Fig. 6.8b) unda incidentă este captată de antenă şi induce tensiunea $V_s$ la bornele sarcinii $\underline{Z}_s = R_s + jX_s$. în condiții de adaptare avem

$$\begin{aligned} R_{rad} + R_P &= R_s \\ X_A &= -X_s \end{aligned} \tag{6.3.43}$$

iar bilanțul puterilor active este

$$P_s = \frac{V_s^2}{8R_s}; \quad P_{rad} = \frac{V_s^2}{8}\left[\frac{R_{rad}}{(R_{rad} + R_P)^2}\right]; \quad P_P = \frac{V_s^2}{8}\left[\frac{R_P}{(R_{rad} + R_P)^2}\right] \tag{6.3.44}$$

Puterea totală indusă (captată) în condiții de adaptare este

$$P_{cap} = \frac{V_s I_s^*}{2} = \frac{V_s^2}{4} \frac{1}{R_{rad} + R_P} \tag{6.3.45}$$

Sunt utile câteva observații: în condițiile de adaptare jumătate din puterea captată este furnizată sarcinii propriu-zise iar cealaltă jumătate ($P_{rad} + P_P$) este *împrăştiată* (radiată) ($P_{rad}$) şi disipată pe rezistența de pierderi ($P_P$); chiar dacă se presupune o antenă fără pierderi ($R_P = 0$) numai jumătate din puterea recepționată ajunge pe sarcină iar cealaltă jumătate este reradiată (împrăştiată); acest aspect este important când se urmăreşte determinarea *ariei efective* în cazul antenelor cu apertură de directivitate ridicată.

## 6.3.5. Polarizare

Polarizarea antenei pe o direcție dată este definită ca polarizarea undelor emise de către antenă pe direcția specificată (dacă direcția nu este specificată atunci se ia direcția de directivitate maximă). Polarizarea undelor emise este definită ca proprietatea undelor electromagnetice prin care este descrisă variația în timp a direcției şi magnitudinii vectorului câmp electric; polarizarea este ilustrată prin curba trasată de variația în timp a extremității (vârfului) vectorului $\vec{E}$ într-un punct fixat din spațiu, precum şi de sensul în care este trasată având ca referință sensul (direcția) de propagare. Întrucât proprietatea de polarizare este relevantă pentru punctele de zonă depărtată se poate admite că unda are caracter de undă plană. În cazul dipolului electric câmpul electric are componentă numai după direcția $\hat{\theta}$; la antenele mai complicate vectorul $\vec{E}$ poate avea componente după ambii versori $\hat{\theta}$ şi $\hat{\phi}$; variațiile în timp ale acestor componente se scriu

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_\theta(\vec{r},t) &= Re\left[E_1 e^{j(\omega t + \psi_1)}\right] = E_1 \cos(\omega t + \psi_1) \\ \mathscr{E}\phi(\vec{r},t) &= Re\left[E_2 e^{j(\omega t + \psi_2)}\right] = E_2 \cos(\omega t + \psi_2) \end{aligned} \tag{6.3.46}$$

Pentru a obține o ecuație care să descrie locul geometric al vârfului vectorului $\vec{E} = \vec{E}_\theta + \vec{E}_\phi$ este necesară eliminarea fazei variabile $\omega t$; o procedură posibilă este următoarea: se scriu rapoartele

$$\frac{\mathscr{E}_\phi}{E_2} = \cos A_\psi; \quad A_\psi = \omega t + \psi_2$$
$$\frac{\mathscr{E}_\theta}{E_1} = \cos\left(A_\psi + \Delta\psi\right) = \cos A_\psi \cos\Delta\psi - \sin A_\psi \sin\Delta\psi; \quad \Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 \tag{6.3.47}$$

Eliminând pe $A_\psi$ din ultimele două relații se obține

$$\left(\frac{\mathscr{E}_\theta}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{\mathscr{E}_\phi}{E_2}\right)^2 - 2\left(\frac{\mathscr{E}_\theta}{E_1}\right)\left(\frac{\mathscr{E}_\phi}{E_2}\right)\cos\Delta\psi = \sin^2\Delta\psi \tag{6.3.48}$$

care reprezintă ecuația unei elipse. Se disting trei tipuri de polarizare:

1°) Dacă diferența de fază între $\mathscr{E}_\theta$ şi $\mathscr{E}_\phi$ este

$$\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = \pm n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.3.49}$$

elipsa degenerează într-o dreaptă şi se obține o *polarizare liniară* (Fig. 6.9a). În punctul considerat (de observație) vectorul câmp electric este totdeauna orientat după o dreaptă în orice moment de timp; această situație are loc dacă: $\vec{E}$ posedă o singură componentă; $E_\theta$ şi $E_\phi$ sunt în fază sau au un defazaj de $\Delta\psi = \pm n\pi$ .

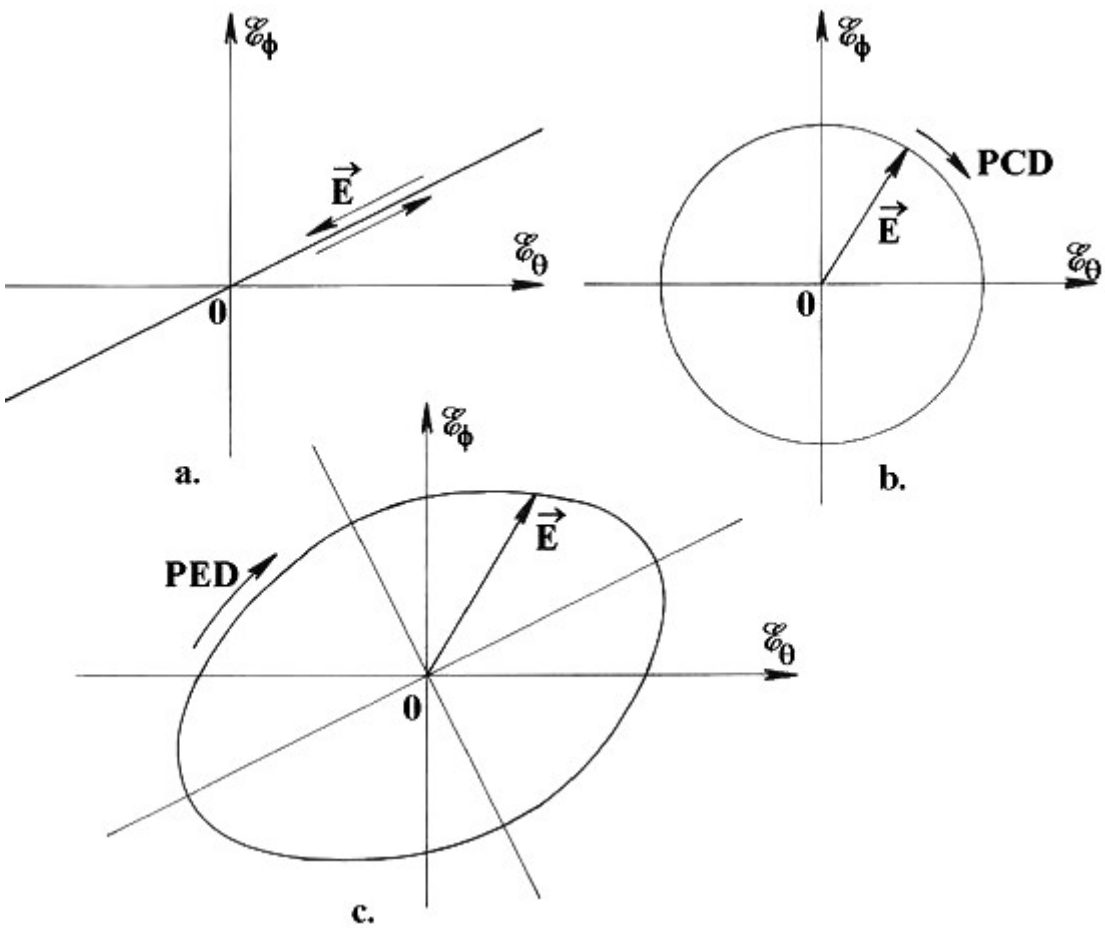



**Fig. 6.9 Polarizarea undelor electromagnetice emise: a – polarizare liniară; b – polarizare circulară dreapta; c – polarizarea eliptică dreapta**

2°) Dacă componentele de câmp sunt egale în amplitudine, $E_1 = E_2 = E_0$ $\left(\left|\mathscr{E}_\theta\right| = \left|\mathscr{E}_\phi\right|\right)$ iar diferența de fază este determinată de relațiile

$$\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2 = \begin{cases} +(1/2+2n)\pi, & n = 0,1,2,... \quad [PCD] \\ -(1/2+2n)\pi, & n = 0,1,2,... \quad [PCS] \end{cases} \tag{6.3.50}$$

atunci ecuația (6.3.48) se transformă într-o ecuație a cercului, obținându-se astfel *polarizarea circulară* (Fig. 6.9b). În funcție de semnul fazei avem: *polarizare circulară dreapta* (PCD) când vectorul $\vec{E}$ se roteşte în sensul acelor de ceasornic; *polarizare circulară stânga* (PCS) când vectorul $\vec{E}$ se roteşte contra acelor de ceasornic. Polarizările PCD şi PCS definesc sensul de rotație al vectorului $\vec{E}$ văzut de la sursă (antenă) spre un punct din zona depărtată.

3°) Polarizarea eliptică poate avea loc în două situații: a) amplitudinile $E_1$ şi $E_2$ sunt diferite adică $E_1 \neq E_2$ $\left(\left|\mathscr{E}_\theta\right| \neq \left|\mathscr{E}_\phi\right|\right)$ iar diferența de fază este determinată de relația (6.3.50); b) dacă diferența de fază satisface relația

$$\Delta\psi \neq \pm n\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} +[PED] \\ -[PES] \end{cases} \quad n = 0,1,2,... \tag{6.3.51}$$

polarizarea este eliptică indiferent de raportul amplitudinilor.

În general, la polarizarea eliptică curba trasată de vârful vectorului $\vec{E}$ reprezintă o elipsă înclinată (Fig. 6.9c); după sensul de rotire al vectorului $\vec{E}$ se disting: *polarizare eliptică dreapta* (PED) când sensul de rotire coincide cu cel al acelor de ceasornic; *polarizare eliptică stânga* (PES) când sensul de rotire este contra acelor ceasornicului.

Trebuie subliniat că undele polarizate au un caracter deterministic adică componentele de câmp sunt funcții definite de spațiu şi timp. Dacă $\mathscr{E}_\theta$ şi $\mathscr{E}_\phi$ sunt necorelate iar intensitățile de câmp reprezintă cantități aleatorii, unda este nepolarizată (lumina solară, unde electromagnetice recepționate din cosmos); în multe situații undele pot fi parțial polarizate.

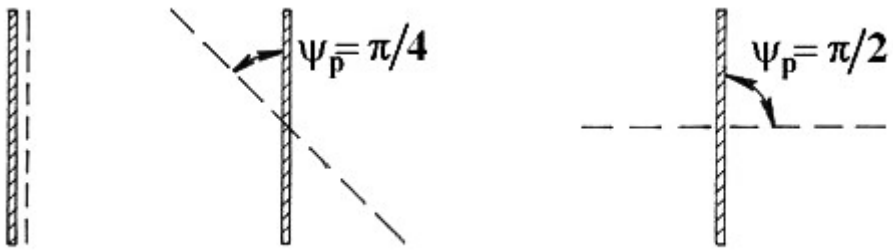



**Fig. 6.10 Legătura dintre polarizarea undelor incidente şi polarizarea antenei de recepție; $\Psi_P$ reprezintă unghiul spațial dintre dipolul de recepție şi cel de emisie: a - $\Psi_P = 0$, $n_P = 1$; b - $\Psi_P = \pi/4$, $n_P = 1/2$; c - $\Psi_P = \pi/2$, $n_P = 0$**

În procesele de emisie şi recepție a semnalelor este important de stabilit o legătură între polarizarea undelor incidente şi polarizarea antenei de recepție; în general, polarizarea antenelor de recepție nu coincide cu polarizarea undelor incidente, astfel va exista o neadaptare de polarizare care conduce la *pierderi de polarizare*. Aceste pierderi sunt caracterizate prin *factorul de pierderi de polarizare* ($FPP = \eta_P$) care poate fi definit după cum urmează: notăm prin $\vec{E}_i$ câmpul electric al undei incidente şi prin $\vec{E}_a$ câmpul electric polarizat al antenei de recepție

$$\vec{E}_i = \hat{p}_u E_i, \ \vec{E}_a = \hat{p}_a E_a \tag{6.3.52}$$

unde $\hat{p}_u$ este versorul de polarizare al undei iar $\hat{p}_a$ este versorul de polarizare al antenei în regim de emisie. Factorul de pierderi de polarizare se defineşte ca

$$FPP = \left|\hat{p}_u \cdot \hat{p}_a\right|^2 = \left|cos\,\psi_p\right|^2 \tag{6.3.53}$$

unde $\psi_p$ este unghiul dintre cei doi versori. Particularizăm pentru cazul antenelor dipol electric (Fig. 6.10): dacă unghiul spațial dintre dipolul de recepție şi cel de emisie este $\psi_p = 0$, avem $FPP = \eta_p = 1$; dacă unghiul $\psi_p$ este de $\pi/4$ rezultă $\eta_p = 1/2$; dacă $\psi_p = \pi/2$ rezultă $\eta_p = 0$.

### 6.3.6. Arii echivalente ale antenei

Antenele sunt dispozitive reciproce în sensul că ele pot funcționa atât în regim de emisie cât şi în regim de recepție. Există mai multe tipuri de arii echivalente; acestea sunt utilizate pentru a descrie caracteristicile de captare a puterii transportate de undele incidente pe antenă. Tipul de arie echivalentă foarte des utilizată este aria efectivă, care pentru o direcție dată este definită ca raportul dintre puterea disponibilă pe sarcina antenei de recepție şi densitatea de putere a undei plane incidente pe direcția specificată; se consideră că polarizarea undei incidente coincide cu cea a antenei. Dacă direcția nu este specificată atunci în mod implicit se consideră direcția de intensitate maximă de radiație. Relația matematică de definiție este

$$A_r = \frac{P_s}{P_{i\square}} = \frac{\left|I_s\right|^2 R_s/2}{P_{i\square}} \tag{6.3.54}$$

unde: $A_r$ este aria efectivă a antenei de recepție; $P_{i\square}$ este densitatea de putere a undei incidente (W/m$^2$); $P_s$ este puterea furnizată pe sarcină. Presupunând condiții de adaptare (6.3.43) aria efectivă devine

$$A_r = \frac{\left|V_s\right|^2}{8\,P_{i\square}}\left(\frac{1}{R_{rad}+R_P}\right) \tag{6.3.55}$$

După cum s-a arătat in §6.3.4 numai o fracțiune din puterea transportată de unda incidentă este transmisă sarcinii sub formă de putere activă (reală). O parte din puterea incidentă este reradiată (împrăştiată), proces caracterizat prin *aria de împrăştiere (scattering)* $A_s$, care în condiții de adaptare se poate defini ținând cont de (6.3.44)

$$A_s = \frac{\left|V_s\right|^2}{8\,P_{i\square}}\left(\frac{R_{rad}}{(R_{rad}+R_P)^2}\right) \tag{6.3.56}$$

În mod similar se defineşte o arie de pierderi $A_p$, având expresia

$$A_p = \frac{\left|V_s\right|^2}{8\,P_{i\square}}\left(\frac{R_P}{(R_{rad}+R_P)^2}\right) \tag{6.3.57}$$

De asemenea se defineşte si o arie de captură $A_{cap}$, care în condiții de adaptare are expresia (ținând cont de (6.3.45))

$$A_{cap} = \frac{\left|V_s\right|^2}{4\,P_{i\square}}\left(\frac{1}{R_{rad}+R_P}\right) \tag{6.3.58}$$

Se observă că aria de captură reprezintă suma celorlalte arii $A_{cap} = A_r + A_s + A_p$. Este utilă introducerea eficienței de apertură $\eta_{ap}$, care se defineşte ca raportul dintre aria efectivă maximă $A_{rmax}$ şi aria fizică (geometrică) $A_f$

$$\eta_{ap} = \frac{A_{r\,max}}{A_f} \tag{6.3.59}$$

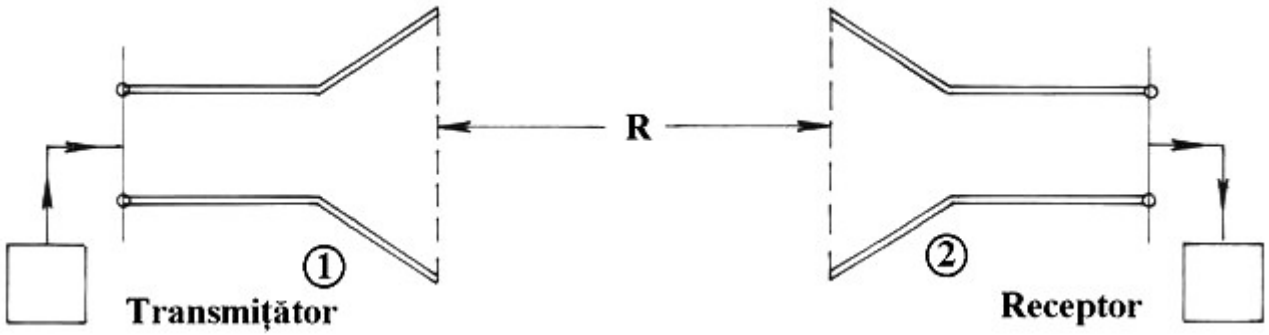



**Fig. 6.11 Aranjament al antenelor de emisie şi recepție pentru determinarea relației dintre aria efectivă maximă şi directivitatea maximă**

*Relații între aria efectivă maximă şi directivitatea maximă.* În aplicațiile practice adesea este utilă stabilirea unei relații simple între directivități şi ariile efective ale unui sistem de două antene, una de emisie, cealaltă de recepție, situate la distanța R (Fig.6.11). Ariile efective şi directivitățile celor două antene se notează: $A_t$, $D_t$ pentru antena de emisie şi $A_r$, $D_r$ pentru cea de recepție. Admitem întâi că antena 1 este în regim de radiație. Dacă această antenă ar fi isotropă, atunci ținând cont de definiția (6.3.5) şi relația (6.3.11), densitatea de putere radiată la distanța *R* este

$$P_{0\square} = \frac{P_{0\Omega}}{R^2} = \frac{P_{rad}}{4\pi R^2}; \tag{6.3.60}$$

dacă însă antena 1 are proprietăți directive atunci densitatea de putere devine

$$P_{1\square} = P_{0\square} D_t = \frac{P_{1rad} D_t}{4\pi R^2} \tag{6.3.61}$$

Puterea recepționată de antena 2 şi transmisă sarcinii va fi (6.3.54)

$$P_{2s} = A_r P_{1\square} = \frac{P_{1rad} D_t A_r}{4\pi R^2} \tag{6.3.62}$$

de unde se scoate

$$D_t A_r = \frac{P_{2s}}{P_{1rad}} \left(4\pi R^2\right) \tag{6.3.63}$$

Inversând rolul antenelor se poate scrie o relație similară

$$D_r A_t = \frac{P_{1s}}{P_{2rad}} \left(4\pi R^2\right) \tag{6.3.64}$$

Admițând că antenele 1 şi 2 sunt identice şi au sarcini egale în regim de recepție, avem $P_{1rad} = P_{2rad}$, $P_{1s} = P_{2s}$, prin urmare din ultimele două relații se scoate

$$\frac{D_t}{A_t} = \frac{D_r}{A_r} \tag{6.3.65}$$

Prin creşterea directivităților, în aceeaşi proporție cresc şi ariile efective; considerând valorile maxime ale directivităților $D_{0t}$ şi $D_{0r}$ se poate scrie

$$\frac{D_{0t}}{A_{0t}} = \frac{D_{0r}}{A_{0r}} \tag{6.3.66}$$

unde $A_{0t}$ şi $A_{0r}$ sunt *ariile efective maxime* ale celor două antene.

Rapoartele (6.3.65) şi (6.3.66) sunt adevărate pentru orice tip de antenă, astfel se poate scrie relaţia generală

$$\frac{D_0}{A_0} = C_A \tag{6.3.67}$$

unde $C_A$ reprezintă o constantă universală. În scopul determinării acestei constante ne referim la tipuri speciale de antene. Considerăm că antena 1 este isotropă deci $D_{0t} = 1$, iar antena 2 este un dipol electric; relaţia (6.3.66) devine

$$A_{0t} = \frac{A_{0r}}{D_{0r}} \tag{6.3.68}$$

Directivitatea maximă a dipolului electric de lungime mică este $D_{0r} = 3/2$. Pentru a calcula $A_{0r}$ presupunem că dipolul este fără pierderi, astfel în (6.3.55) se va pune $R_P = 0$, iar $R_{rad}$ are expresia (6.3.34). Admiţând că unda incidentă este o undă plană liniar polarizată în planul dipolului, densitatea de putere va fi $P_{i\square} = E^2 / 2Z_0$ iar tensiunea la bornele sarcinii va fi $V_s = El$ (s-a presupus $I_s$ constant); aria efectivă a dipolului este

$$A_{0r} = \frac{(El)^2}{8\left(E^2/2Z_0\right)\left(80\pi^2 l^2/\lambda_0^2\right)} = \frac{3\lambda_0^2}{8\pi} \tag{6.3.69}$$

Introducând în (6.3.38) se obţine aria efectivă maximă a unei surse (antene) isotrope

$$A_{0t} = \frac{3\lambda_0^2/8\pi}{3/2} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \tag{6.3.70}$$

prin urmare constanta universală are valoarea $C_A = 4\pi/\lambda_0^2$; în general aria efectivă maximă a unei antene este legată de directivitatea maximă prin relaţia

$$A_{0r} = A_{0t} D_{0r} = \left(\lambda_0^2/4\pi\right) D_{0r} \tag{6.3.71}$$

Adesea relaţia (6.3.66) se generalizează sub forma

$$\frac{G_{0t}}{A_{0t}} = \frac{G_{0r}}{A_{0r}} = C_A = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} \tag{6.3.72}$$

în care $G_{0t}$ şi $G_{0r}$ ţin seama de eficienţele antenelor.

Sunt utile precizări asupra ariei efective a dipolului electric; în general raportul (6.3.59) depinde substanţial de tipul de antenă. De exemplu, în cazul dipolului electric de lungime mică avem $A_{r\,max} = 3\lambda_0^2/8\pi = l w_e$, unde $w_e$ este lărgimea electrică (echivalentă) maximă a dipolului; luând $l = \lambda_0/50$ rezultă $w_e = 5{,}95\lambda_0$; dacă lărgimea fizică (adică diametrul) a dipolului este $w_t = \lambda_0/300$, atunci $w_e/w_t = 1785$.

### 6.3.7. Ecuaţia de transmisie Friis

Considerăm un sistem de două antene situate la distanţa *R* (Fig. 6.12); sub formă generală se poate admite că axele celor două antene nu coincid. Ecuaţia Friis stabileşte legătura între puterea recepţionată de o antenă şi puterea emisă de către cealaltă antenă, atunci când distanţa dintre ele este $R > 2D^2/\lambda_0$, unde *D* este dimensiunea geometrică maximă a oricăreia dintre antene.

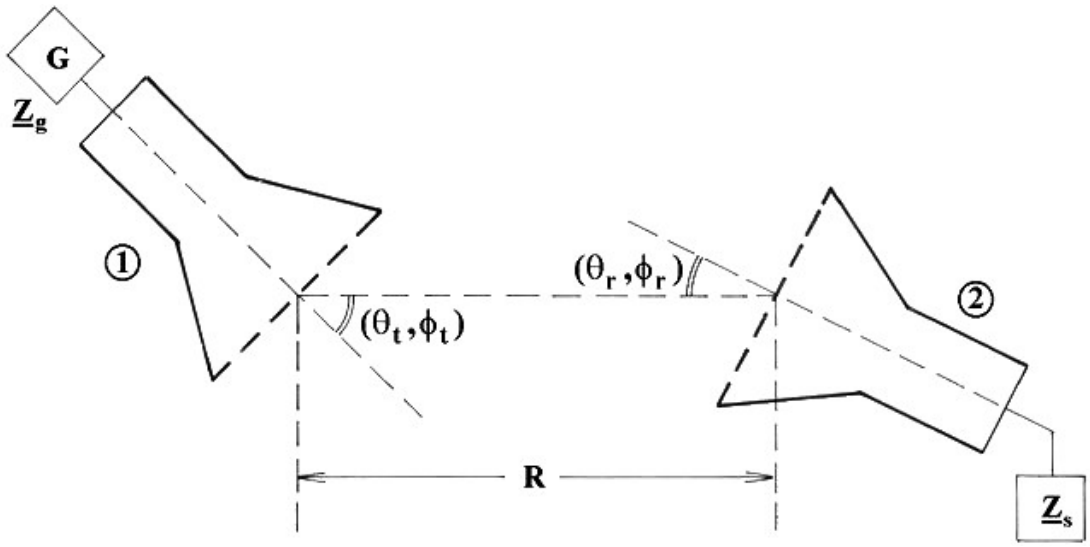



**Fig. 6.12 Aranjament de antene pentru stabilirea ecuației Friis**

Presupunem inițial că antena 1 este isotropă; dacă puterea aplicată la terminalele de intrare ale acestei antene este $P_t$, atunci densitatea de putere isotropă radiată la distanța *R* este dată de (6.3.60)

$$P_{0\square} = \frac{P_{rad}}{4\pi R^2} = \eta_{1A}\frac{P_t}{4\pi R^2} \tag{6.3.73}$$

în care $\eta_{1A}$ este eficiența globală a acestei antene. Dacă însă antena 1 este anisotropă, ultima relație se generalizează

$$P_{1\square} = P_{0\square}\, D_t = \eta_{1A}\frac{P_t D_t(\theta_t,\phi_t)}{4\pi R^2} = \frac{P_t G_t(\theta_t,\phi_t)}{4\pi R^2} \tag{6.3.74}$$

Având în vedere că aria efectivă a antenei 2 (de recepție) este

$$A_r = \eta_{2A} D_r(\theta_r,\phi_r)\left(\lambda_0^2/4\pi\right) \tag{6.3.75}$$

puterea captată de antena de recepție este

$$P_r = \eta_{2A} D_r(\theta_r,\phi_r)\left(\lambda_0^2/4\pi\right)P_{1\square} = \eta_{1A}\eta_{2A}\frac{\lambda_0^2 D_t(\theta_t,\phi_t)D_r(\theta_r,\phi_r)P_t}{(4\pi R)^2} \tag{6.3.76}$$

din care scoatem

$$\frac{P_r}{P_t} = \eta_{1A}\eta_{2A}\frac{\lambda_0^2 D_t(\theta_t,\phi_t)D_r(\theta_r,\phi_r)}{(4\pi R)^2} \tag{6.3.77}$$

Ultima relație presupune că antenele sunt adaptate (pe linia de alimentare, respectiv pe sarcină), iar factorul de polarizare este egal cu unitatea; dacă aceste condiții nu sunt realizate atunci se va ține seama de coeficienții de reflexie şi de neadaptările de polarizare. În cazul antenelor adaptate şi aliniate pentru directivități maxime la emisie şi la recepție, relația (6.3.77) devine

$$\frac{P_r}{P_t} = \left(\frac{\lambda_0}{4\pi R}\right)^2 G_{0t}G_{0r} \tag{6.3.78}$$

Ultimele două relații sunt numite *ecuațiile de transmisie Friis*, şi stabilesc legătura intre puterea furnizată pe sarcina antenei de recepție $(P_r = P_s)$ şi puterea aplicată pe antena de emisie $(P_t = P_{in})$; termenul $(\lambda_0/4\pi R)^2$ este numit *factor de pierderi de spațiu liber* şi ia în considerare pierderile datorate împrăştierii sferice a energiei de către antenă.

## 6.4. RADIAȚIA DE LA O DISTRIBUȚIE DE SURSE. ZONE DE RADIAȚIE

Câmpul electromagnetic radiat de către o distribuție arbitrară de surse (curenți) poate fi determinat aplicând principiul suprapunerii; distribuția de curenți la rândul ei poate fi privită ca o distribuție ponderată a unei surse echivalente de curent, astfel potențialul vectorial $\vec{A}$ va reprezenta suma liniară a contribuțiilor tuturor elementelor de curent. Se poate observa că antenele de dimensiuni relativ mari în comparație cu lungimea de undă pot fi privite ca distribuție de curenți (surse). În cazul unei distribuții volumice de curenți (Fig. 6.13) potențialul vectorial este definit printr-o relație de forma (AIII, (III.3.31)) pe care o particularizăm la situația din Fig. 6.13

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_s} \vec{J}(\vec{r}\,') \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dV' \tag{6.4.1}$$

unde $V_s$ este volumul ce include toate sursele din distribuție, iar $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$. Se observă că expresia (6.4.1) reprezintă o generalizare (prin integrare) a relației (6.2.4) valabilă pentru un singur element de curent. Câmpurile $\vec{H}(\vec{r})$ şi $\vec{E}(\vec{r})$ se determină utilizând relații de tipul (6.2.10), (6.2.11). Avem

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\int_{V_s} \vec{J}(\vec{r}\,') \times \nabla \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} dV' \tag{6.4.2}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon_0} \nabla \times \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \\ &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \int_{V_s} \nabla \times \left[ \vec{J}(\vec{r}\,') \times \nabla \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \right] dV' \end{aligned} \tag{6.4.3}$$

Dacă în ultima relație se dezvoltă dublul produs vectorial (AI, (I.22)) se obține

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \int_{V_s} \left[ \vec{J}(\vec{r}\,') k_0^2 \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} + \vec{J}(\vec{r}\,') \cdot \nabla\nabla \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R} \right] dV' \tag{6.4.4}$$

în care s-a ținut seama că $\vec{J}(\vec{r}\,')$ nu depinde de $\vec{r}$ iar termenul $\nabla^2 \left( e^{-jk_0 R} / 4\pi R \right)$ a fost înlocuit prin $\left[ -k_0^2 \left( e^{-jk_0 R} / 4\pi R \right) \right]$ deoarece acest ultim termen este o soluție a ecuației Helmholtz omogene pentru $R \neq 0$, deci (6.4.4) este valabilă numai în exteriorul volumului $V_s$ ce conține sursele.

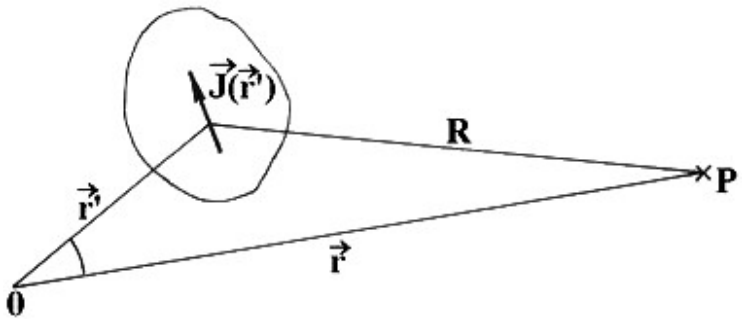



**Fig. 6.13 Distribuție volumică a surselor de curent**

*Zone de radiație.* Evaluarea integralelor (6.4.2) şi (6.4.4) sub formă generală constituie o problemă extrem de laborioasă; prin urmare, spațiul fizic de radiație se împarte de regulă în zone de radiație. În funcție de raportul dintre mărimile $r$, $r'$, $R$, $\lambda_0$ se disting trei zone de radiație; *grosso*

*modo* aceste zone se definesc după cum urmează: a) zona depărtată de radiație (Fraunhofer) pentru care subzistă relațiile $r' << r,\ \lambda_0 << r,\ k_0 r >> 1$; b) zona apropiată de radiație (Fresnel) pentru care se consideră, de asemenea, $r' << r,\ k_0 r >> 1$, însă mărimile $r,\ r',\ \lambda_0$ se găsesc într-un astfel de raport încât termenii ce conțin pe $r'^2$ trebuie luați în considerare la faza exponențialei; c) zona apropiată reactivă pentru care se consideră $k_0 r << 1$ şi unde câmpul de inducție este dominant față de câmpul radiat.

Detalieri asupra zonelor de radiație pot fi făcute prin evaluarea termenilor din dezvoltarea binomială a mărimii $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, anume

$$\begin{aligned} R &= \left[ r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' \right]^{1/2} = \left[ r^2 + \left( -2rr'\cos\psi + r'^2 \right) \right]^{1/2} \cong \\ &\cong r - r'\cos\psi + \frac{1}{r}\left( \frac{r'^2}{2}\sin^2\psi \right) + \frac{1}{r^2}\left( \frac{r'^3}{2}\cos\psi\sin^2\psi \right) + \ldots \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

unde $\psi$ este unghiul dintre $r$ şi $r'$.

**1°. Zona depărtată de radiație (Fraunhofer).** La determinarea câmpurilor $\vec{H}(\vec{r})$ şi $\vec{E}(\vec{r})$ se fac următoarele aproximări: pentru termenii de amplitudine se reține numai primul termen din dezvoltarea (6.4.5) iar pentru termenii de fază se reții primii doi termeni; astfel avem

$$\frac{1}{R}e^{-jk_0 R} \cong \frac{1}{r}e^{-jk_0(r-\hat{r}\cdot\vec{r}')} \cong \frac{1}{r}e^{-jk_0(r-r'\cos\psi)} \tag{6.4.6}$$

În expresiile câmpurilor $\vec{E}(\vec{r})$ şi $\vec{H}(\vec{r})$ intră termenul gradient din (6.4.6); efectuăm calculele şi reținem numai termenii proporționali cu $r^{-1}$

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\left\{ \frac{exp\left[ -jk_0(r - \hat{r}\cdot\vec{r}') \right]}{r} \right\} &= \left[ \hat{r}\left( \frac{-jk_0}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \hat{\psi}\frac{jk_0 r'\sin\psi}{r^2} \right] exp\left[ -jk_0(r - \hat{r}\cdot\vec{r}') \right] = \\ &= \hat{r}\frac{-jk_0}{r}e^{-jk_0 r}e^{jk_0\hat{r}\cdot\vec{r}'} \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

unde $\hat{\psi}$ este un versor îndreptat pe sensul de creştere a unghiului $\psi$. Introducând în (6.4.2) se obține

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{jk_0}{4\pi r}e^{-jk_0 r}\int_{V_s}\vec{J}(\vec{r}')\times\hat{r}e^{jk_0(\hat{r}\cdot\vec{r}')}dV' \tag{6.4.8}$$

Pentru determinarea câmpului electric $\vec{E}(\vec{r})$ se poate utiliza relația (6.4.4) în care se ține seama de aproximația (6.4.6), sau se poate utiliza o relație de tipul (6.2.21) valabilă pentru zona depărtată. Se obține [1]

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) = -Z_0\hat{r}\times\vec{H}(\vec{r}) &= \frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_{V_s}\left[ \hat{r}\left( \hat{r}\cdot\vec{J}(\vec{r}') \right) - \vec{J}(\vec{r}') \right] e^{jk_0(\hat{r}\cdot\vec{r}')}dV' = \\ &= -\frac{jk_0 Z_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\int_{V_s}\left[ \hat{\theta}J_\theta + \hat{\phi}J_\phi \right] e^{jk_0(\hat{r}\cdot\vec{r}')}dV' \end{aligned} \tag{6.4.9}$$

Este utilă o evaluare a distanței $r$ în funcție de dimensiunile antenei şi de lungimea de undă, punându-se condiții asupra erorilor de fază introduse prin neglijarea termenului al treilea din dezvoltarea (6.4.5); de regulă este unanim acceptat că o eroare de fază care nu depăşeşte $\pi/8$, nu afectează esențial performanțele antenelor, ale căror dimensiuni sunt mai mari de $\lambda_0$. Eroarea maximă de fază se apreciază după cum urmează. Valoarea maximă a termenului al treilea este

$$\frac{1}{r}\left[\frac{r'^2}{2}\sin^2(\psi=\pi/2)\right]=\frac{r'^2}{2r} \tag{6.4.10}$$

astfel eroarea maximă de fază trebuie să fie

$$\frac{k_0 r'^2}{2r}\le\frac{\pi}{8} \tag{6.4.11}$$

Vom aproxima pe $r'$ cu jumătate din dimensiunea maximă a antenei $r'=D_A/2$ (luând originea coordonatelor pe centrul antenei, la dipol avem $r'=l/2$ iar la aperturi $r'=d/2$, unde $d$ este diagonala sau latura cea mai mare), astfel (6.4.11) devine

$$r_1\ge 2D_A^2/\lambda_0 \tag{6.4.12}$$

**2°. Zona apropiată de radiație Fresnel.** Dacă distanța până la punctul de observație este mai mică de $r=2D_A^2/\lambda_0$ atunci eroarea de fază față de aproximarea (6.4.6) devine mai mare de $\pi/8$, situație ce poate fi inacceptabilă în anumite aplicații. În astfel de cazuri este necesară luarea în considerare al celui de al patrulea termen din dezvoltarea (6.4.5). Pentru a găsi eroarea maximă de fază introdusă de acest termen trebuie să determinăm unghiul $\psi$ pentru care survine valoarea maximă; în acest scop se efectuează derivata în raport cu $\psi$ şi se egalează cu zero

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{r'^3}{2}\cos\psi\sin^2\psi\right)\right]=\frac{r'^3}{2r^2}\sin\psi\left[-\sin^2\psi+2\cos^2\psi\right]=0 \tag{6.4.13}$$

Soluția banală $\psi=0$ conduce la eroarea minimă; eroarea maximă se obține egalând cu zero paranteza pătrată din (6.4.13); rezultă

$$\psi_1=\arctan\left(\pm\sqrt{2}\right) \tag{6.4.14}$$

Introducem această valoare în termenul al patrulea din dezvoltare şi obținem eroarea maximă de fază, care de asemenea trebuie să fie mai mică de $\pi/8$

$$\frac{k_0 r'^2}{2r}\cos\psi\sin^2\psi\Big|_{\substack{r'=D_A/2\\ \psi=\psi_1}}=\frac{\pi}{12\sqrt{3}}\left(\frac{D_A^3}{\lambda_0 r^2}\right)\le\frac{\pi}{8} \tag{6.4.15}$$

din care se scoate

$$r^2\ge 0{,}385\left(D_A^3/\lambda_0\right)\ ;\quad r_2\ge 0{,}62\left(D_A^3/\lambda_0\right)^{1/2} \tag{6.4.16}$$

Trebuie subliniat că diferența esențială dintre zonele Fraunhofer şi Fresnel constă în eroarea de fază acceptată; distanțele $r$ până la punctul de observație depind de dimensiunile concrete ale antenei. Denumirea de zonă Fresnel provine de la tipul de integrale Fresnel utilizate pentru determinarea câmpurilor $\vec{H}(\vec{r})$ şi $\vec{E}(\vec{r})$ în această zonă.

**3°. Zonă apropiată de inducție.** Dacă punctul de observație este situat la o distanță $r\le 0{,}62\left[D_A^3/\lambda_0\right]^{1/2}$, densitatea de putere reactivă este mai mare decât densitatea de putere radiată, care este o putere activă (reală).

Adesea, separarea regiunilor de câmp electromagnetic din jurul unei antene este ilustrată prin cercuri având razele definite mai sus (Fig. 6.14). Trebuie subliniat totodată că trecerile de la o regiune la alta nu sunt abrupte, ci au loc variații treptate ale fazelor, densităților de putere şi a diagramelor de radiație.

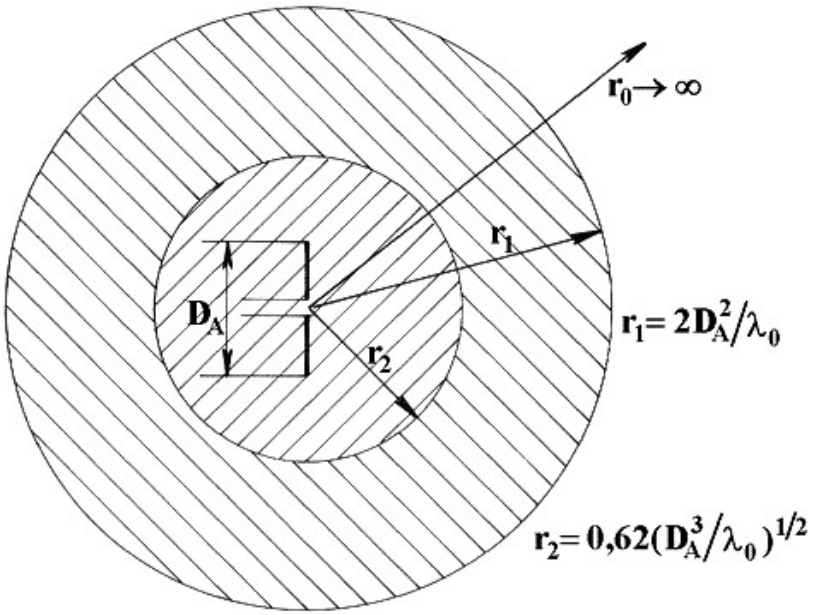



**Fig. 6.14 Zone de radiație ale antenei: 1 – zona Fraunhofer; 2 – zona apropiată de radiație (Fresnel); 3 – zonă apropiată de inducție**

## 6.5. RADIAȚIA DE LA APERTURI

### 6.5.1. Apertură dreptunghiulară. Relații generale

Există o categorie largă de antene la care câmpul electromagnetic radiat poate fi considerat că provine de la o apertură fizică; aici pot fi incluse aperturile propriu-zise (deschideri în pereți conductori infiniți), antenele fantă, antenele horn şi cele cu reflector parabolic, antene cu lentile.

În această secțiune sunt prezentate relațiile de bază pentru o apertură rectangulară practicată într-un plan conductor infinit (Fig. 6.15). Sunt cunoscute două abordări pentru deducerea câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ într-un punct de observație din zona depărtată [1], [2], [5]: analiză în domeniul spațial bazată pe utilizarea potențialelor vectoriale $\vec{A}(\vec{r})$ şi $\vec{A}_h(\vec{r})$, şi a teoremei de echivalență; analiză în domeniul spectral bazată pe transformate Fourier referitoare la coordonate spațiale.

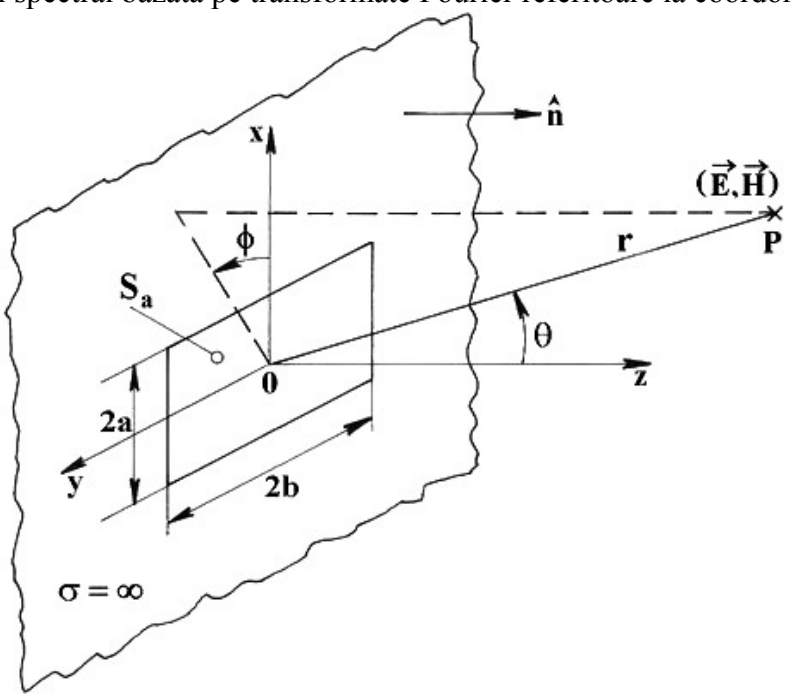



**Fig. 6.15 Apertură dreptunghiulară practicată într-un plan conductor infinit**

**1°) Analiză în domeniul spațial.** Deoarece această abordare operează cu surse echivalente $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$, sunt necesare precizări asupra teoremei de echivalență Love. Aşa cum este arătat în anexa AIII.2, o cale uzuală constă în a considera că apertura este înlocuită cu un plan metalic cu $\sigma = \infty$ (Fig. 6.16a); în acest caz sursa este reprezentată de curentul echivalent magnetic $\vec{J}_{ms} = -\hat{n} \times \vec{E}_a$, unde $\vec{E}_a$ este câmpul electric din apertură. Ca urmare a teoriei imaginii, situația reprezentată în Fig. 6.16a se reduce la cea din Fig. 6.16b, în care peretele metalic a fost îndepărtat fiind înlocuit cu sursa imagine. Întrucât sursa imagine are acelaşi sens cu sursa echivalentă se ajunge la situația din Fig. 6.16c, unde densitatea sursei echivalente se dublează $\vec{J}_{ms} = -2\hat{n} \times \vec{E}_a \ \left[V/m\right]$ şi radiază în spațiul liber. Structura echivalentă din Fig. 6.16c permite obținerea valorilor corecte ale câmpurilor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ în spațiul din dreapta interfeței; rezultatele pot fi considerate valabile şi în cazul când planul conductor din Fig. 6.15 nu este plan infinit, însă raza de curbură este suficient de mare în comparație cu lungimea de undă.

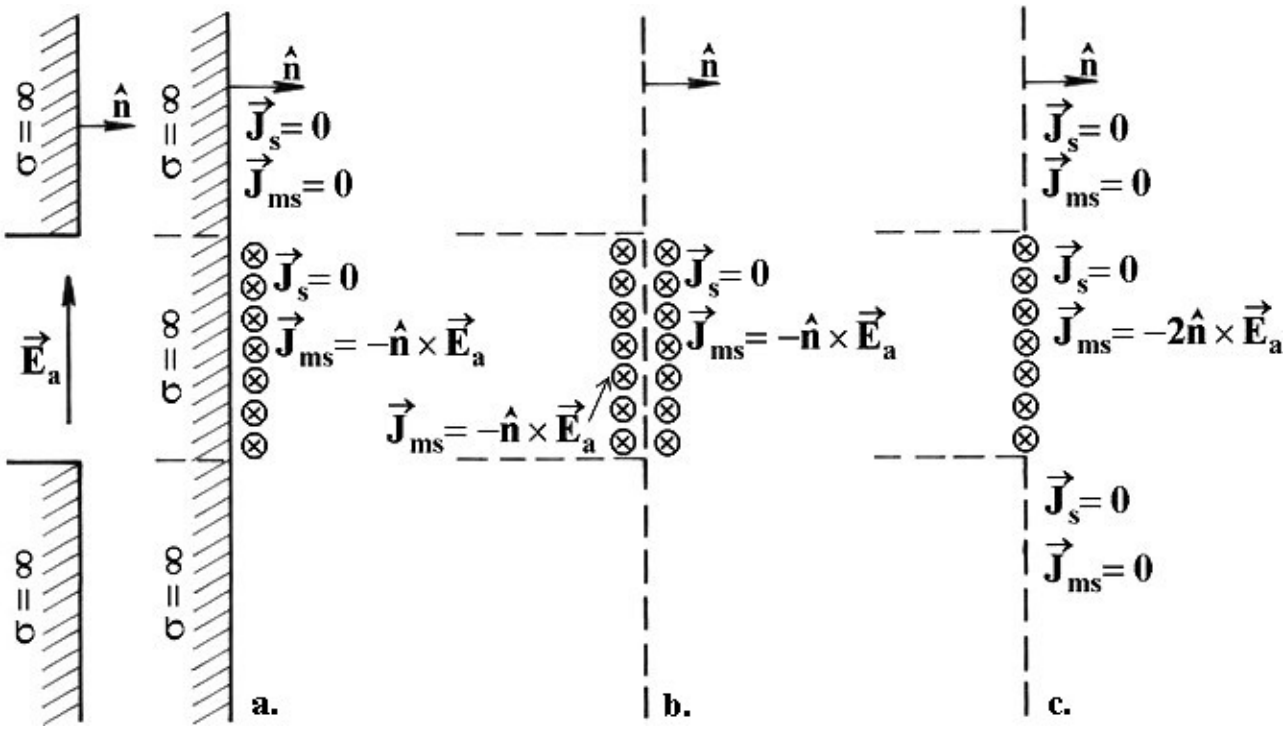



**Fig. 6.16 Teorema Love pentru definirea surselor echivalente ale aperturii: a – înlocuirea aperturii cu un perete metalic; b – îndepărtarea peretelui metalic şi înlocuirea sa cu o sursă imagine; c – însumarea sursei imagine cu sursa echivalentă originală**

Admițând că în apertură sunt cunoscute ambele câmpuri $\vec{E}_a$ şi $\vec{H}_a$, din teorema Love rezultă o expresie similară şi pentru densitatea de curent electric $\vec{J}_s = 2\hat{n} \times \vec{H}_a \ \left[A/m\right]$; astfel se pot scrie expresiile generale ale potențialelor vectoriale $\vec{A}(\vec{r})$ şi $\vec{A}_h(\vec{r})$, similare cu (6.4.1)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_a} \vec{J}_s(\vec{r}') \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dS' \tag{6.5.1}$$

$$\vec{A}_h(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \int_{S_a} \vec{J}_{ms}(\vec{r}') \frac{e^{-jk_0 R}}{R} dS' \tag{6.5.2}$$

Întrucât $\vec{E}_a$ şi $\vec{H}_a$ sunt în planul $xOy$, integrala se efectuează pe aria $S_a$; $ds' = dx'\,dy'$; de asemenea trebuie avut în vedere că $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$ au valori duble față de cele utilizate anterior.

Considerând punctul de observație în zona depărtată (Fraunhofer) se ține cont de aproximația (6.4.6), adică pentru variațiile de amplitudine se ia $R \cong r$ iar pentru variația fazei se ia $R \cong r - \hat{r} \cdot \vec{r}' = r - r' cos\psi$. Potențialele vectoriale vor avea expresiile generale

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{N}_e \tag{6.5.3}$$

$$\vec{A}_h(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \vec{L}_h \tag{6.5.4}$$

unde

$$\vec{N}_e = \int_{S_a} \vec{J}_s(\vec{r}') e^{jk_0 r' cos\psi} \, dS' \tag{6.5.5}$$

$$\vec{L}_h = \int_{S_a} \vec{J}_{ms}(\vec{r}') e^{jk_0 r' cos\psi} \, dS' \tag{6.5.6}$$

şi sunt numiți uneori vectori Schelkunoff.

Limitându-ne la zona depărtată în care $\vec{A}(\vec{r})$ şi $\vec{A}_h(\vec{r})$ au componente numai după $\theta$ şi $\phi$, pentru componentele de câmp se pot scrie expresii simplificate:

a) sursa este $\vec{J}_s$

$$\begin{aligned} E_\theta &\cong -j\omega A_\theta \\ E_\phi &\cong -j\omega A_\phi \\ H_\theta &\cong -E_\phi / Z_0 = (j\omega / Z_0) A_\phi \\ H_\phi &\cong E_\theta / Z_0 = (-j\omega / Z_0) A_\theta \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

b) sursa este $\vec{J}_{ms}$

$$\begin{aligned} H_{h\theta} &\cong -j\omega A_{h\theta} \\ H_{h\phi} &\cong -j\omega A_{h\phi} \\ E_{h\theta} &\cong Z_0 H_{h\phi} = -j\omega Z_0 A_{h\phi} \\ E_{h\phi} &\cong -Z_0 H_{h\theta} = j\omega Z_0 A_{h\theta} \end{aligned} \tag{6.5.8}$$

unde $Z_0 = (\mu_0 / \varepsilon_0)^{1/2}$. Combinând ultimele două seturi de relații se pot scrie expresii generale pentru componentele $E_\theta, E_\phi, H_\theta, H_\phi$, generate de ambele surse $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$; ținând cont de relațiile (6.5.3)÷(6.5.6) avem

$$E_\theta = -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left( L_{h\phi} + Z_0 N_{e\theta} \right) \tag{6.5.9}$$

$$E_\phi = \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left( L_{h\theta} - Z_0 N_{e\phi} \right) \tag{6.5.10}$$

$$H_\theta = \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left( N_{e\phi} - \frac{L_{h\theta}}{Z_0} \right) \tag{6.5.11}$$

$$H_\phi = -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left( N_{e\theta} + \frac{L_{h\phi}}{Z_0} \right) \tag{6.5.12}$$

Mărimile $N_{e\theta}, N_{e\phi}, L_{h\theta}$ şi $L_{h\phi}$ se determină din (6.5.5), (6.5.6)

$$\vec{N}_e = \int_{S_a} \left( \hat{i}\, J_{sx} + \hat{j}\, J_{sy} + \hat{k}\, J_{sz} \right) e^{jk_0 r' \cos\psi}\, d\,S' \tag{6.5.13}$$

$$L_h = \int_{S_a} \left( \hat{i}\, J_{msx} + \hat{j}\, J_{msy} + \hat{k}\, J_{msz} \right) e^{jk_0 r' \cos\psi}\, d\,S' \tag{6.5.14}$$

Efectuând trecerea la coordonate sferice pe baza relațiilor (6.2.12) şi apoi integrând, se obține

$$\begin{aligned} N_{e\theta} &= \int_{S_a} \left( J_{sx} \cos\theta \cos\phi + J_{sy} \cos\theta \sin\phi - J_{sz} \sin\theta \right) e^{jk_0 r' \cos\psi}\, d\,S' \\ N_{e\phi} &= \int_{S_a} \left( -J_{sx} \sin\phi + J_{sy} \cos\phi \right) e^{jk_0 r' \cos\psi}\, d\,S' \\ L_{h\theta} &= \int_{S_a} \left( J_{msx} \cos\theta \cos\phi + J_{msy} \cos\theta \sin\phi - J_{msz} \sin\theta \right) e^{jk_0 r' \cos\psi}\, d\,S' \\ L_{h\phi} &= \int_{S_a} \left( -J_{msx} \sin\phi + J_{msy} \cos\phi \right) e^{jk_0 r' \cos\psi}\, d\,S' \end{aligned} \tag{6.5.15}$$

Particularizăm relațiile generale obținute mai sus la apertura din Fig. 6.15 în care presupunem că este cunoscut câmpul electric

$$\vec{E}_a = \hat{j}\, E_0 \tag{6.5.16}$$

iar $E_0$ se consideră constant pe întreaga suprafață a aperturii $-a \le x' \le a,\ -b \le y' \le b$. Densitatea curentului echivalent magnetic, conform teoremei de echivalență Love, este

$$\vec{J}_{ms} = -2\hat{n} \times \vec{E}_a = -2\hat{k} \times \hat{j}\, E_a = 2\hat{i}\, E_0 = \hat{i}\, J_{msx},\ -a \le x' \le a,\ -b \le y' \le b \tag{6.5.17}$$

Evident vom presupune $\vec{J}_s = 0$, astfel avem $N_{e\theta} = 0,\ N_{e\phi} = 0$; urmează să calculăm mărimile $L_{h\theta}$ şi $L_{h\phi}$ conform (6.5.15). Mai întâi trebuie precizate mărimile $d\,S'$ şi $r' \cos\psi$; se observă că $d\,S' = dx'dy'$ iar

$$\begin{aligned} r' \cos\psi = \vec{r}' \cdot \hat{r} &= \left( \hat{i}x' + \hat{j}y' \right) \cdot \left( \hat{i} \sin\theta \cos\phi + \hat{j} \sin\theta \sin\phi + \hat{k} \cos\theta \right) = \\ &= x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi \end{aligned} \tag{6.5.18}$$

Mărimea $L_{h\theta}$ se calculează ținând cont de (6.5.15) şi (6.5.17); avem

$$L_{h\theta} = \cos\theta \cos\phi \left\{ \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} J_{msx}\, exp\left[ jk_0 \left( x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi \right) \right] dx'\, dy' \right\}; \tag{6.5.19}$$

ținând cont de forma clasică a integralei

$$\int_{-c}^{c} e^{j\alpha\xi}\, d\xi = 2c \left( \frac{\sin \alpha c}{\alpha c} \right) \tag{6.5.20}$$

atunci (6.5.19) devine

$$L_{h\theta} = 4ab\, E_0 \left[ \cos\theta \cos\phi \left( \frac{\sin X}{X} \right) \left( \frac{\sin Y}{Y} \right) \right] \tag{6.5.21}$$

unde

$$X = k_0 a \sin\theta \cos\phi,\ \ Y = k_0 b \sin\theta \sin\phi \tag{6.5.22}$$

În mod similar pentru $L_{h\phi}$ se obține

$$L_{h\phi} = -4ab\,E_0\left[\sin\phi\left(\frac{\sin X}{X}\right)\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)\right] \tag{6.5.23}$$

Introducem (6.5.21) şi (6.5.23) în (6.5.9) şi (6.5.10) obţinându-se componentele de câmp

$$E_\theta = \frac{jabk_0\,E_0\,e^{-jk_0r}}{\pi r}\left[\sin\phi\left(\frac{\sin X}{X}\right)\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)\right] \tag{6.5.24}$$

$$E_\phi = \frac{jabk_0\,E_0\,e^{-jk_0r}}{\pi r}\left[\cos\theta\cos\phi\left(\frac{\sin X}{X}\right)\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)\right] \tag{6.5.25}$$

$$H_\theta = -E_\phi / Z_0 \tag{6.5.26}$$

$$H_\phi = E_\theta / Z_0\,; \tag{6.5.27}$$

totodată avem $E_r = 0,\ H_r = 0$.

**2º) Parametrii principali ai aperturii.** Ne vom referi în special la diagramele de radiaţie pentru câmpuri şi puteri, lărgimea fasciculului şi la directivitate.

a) *Diagrama de radiaţie pentru câmpuri.* În general aperturile reprezintă antene cu performanţe superioare, astfel deschiderea diagramei de radiaţie este relativ mică şi adesea aceste diagrame sunt numite lobi sau fascicule. În cazul aperturii din Fig. 6.15 radiaţia maximă are loc după axa $z$, aşa cum este schiţat în Fig. 6.17a; pe lângă lobul principal al antenelor practice se disting şi un număr de lobi minori situaţi pe aceeaşi emisferă $z > 0$, precum şi lobi posteriori în emisfera $z < 0$.

Practic se urmăreşte trasarea de diagrame bidimensionale în anumite plane de interes, numite plane principale. Uzual aceste plane sunt numite plane *E* şi *H*; ele depind de distribuţia câmpului în apertură. Pentru apertura cu $\vec{E}_a = \hat{j}\,E_0$ diagramele de radiaţie se definesc după cum urmează:

Diagrama de radiaţie în planul $\vec{E}_a = \hat{j}\,E_0$ se obţine pentru $\phi = \pi/2$ adică în planul $(yOz)$; din (6.5.24)÷(6.5.27) avem

$$E_\theta = \frac{abjk_0\,E_0\,e^{-jk_0r}}{\pi r}\left(\frac{\sin Y}{Y}\right) \tag{6.5.28}$$
$$H_\phi = E_\theta / Z_0;\ \ E_\phi = 0;\ \ E_r = 0$$

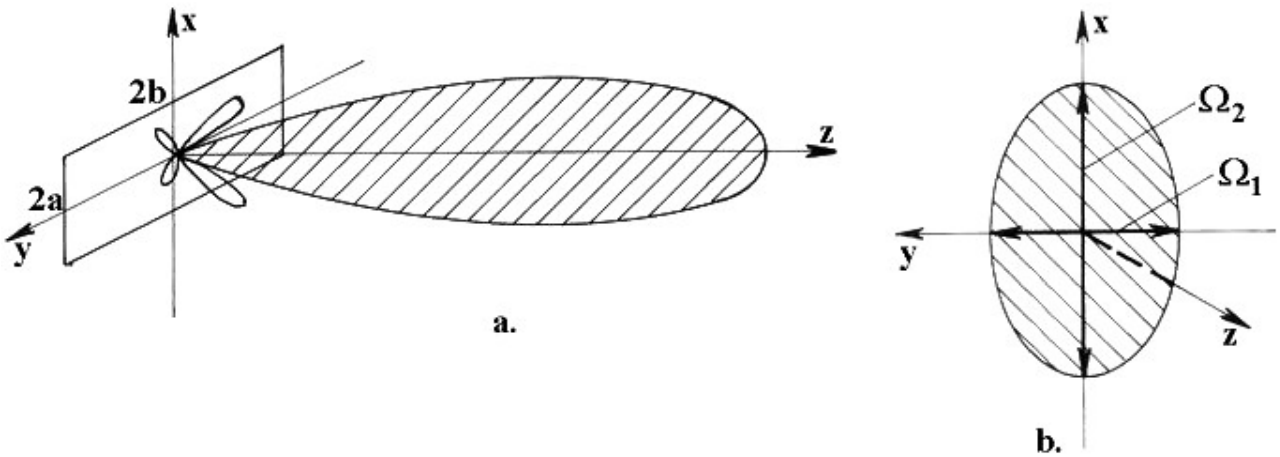



**Fig. 6.17 Diagramă de radiaţie pentru câmpuri a unei aperturi dreptunghiulare: a – forma uzuală a lobului de directivitate în planul (yOz); b – definirea deschiderii diagramei la 3dB atenuare**

Diagrama de radiaţie în planul $\vec{H} = -\hat{i}\,H_a$ se obţine pentru $\phi = 0$ adică în planul $(xOz)$; avem

$$E_\phi = \frac{abjk_0\, E_0\, e^{-jk_0 r}}{\pi r} cos\,\theta \left( \frac{sin\, X}{X} \right) \qquad (6.5.29)$$
$$H_\theta = -E_\phi / Z_0;\;\; E_\theta = 0;\;\; E_r = 0$$

Trebuie subliniat că denumirile de plane *E* şi *H* comportă o anumită *nedeterminare*, deoarece ele depind de distribuția câmpului în apertură, care în multe situații poate fi mult mai complicată decât cea considerată în (6.5.16); în viitor vom utiliza denumirile de plane principale: $xOz$ pentru $\phi = 0$, şi $yOz$ pentru $\phi = \pi/2$.

Funcțiile care descriu diagramele de radiație în cele două plane principale sunt de forma

$$f_E(\phi = 0) = \frac{|E_\phi(\theta)|}{|E_\phi(\theta = 0)|} = \left| cos\,\theta \frac{sin(k_0 a\, sin\,\theta)}{k_0 a\, sin\,\theta} \right| = \left| cos\,\theta \frac{sin\,\gamma_a}{\gamma_a} \right| \qquad (6.5.30)$$

$$f_E(\phi = \pi/2) = \frac{|E_\theta(\theta)|}{|E_\theta(\theta = 0)|} = \left| \frac{sin(k_0 b\, sin\,\theta)}{k_0 b\, sin\,\theta} \right| = \left| \frac{sin\,\gamma_b}{\gamma_b} \right| \qquad (6.5.31)$$

unde: $\gamma_a = k_0 a\, sin\,\theta,\;\; \gamma_b = k_0 b\, sin\,\theta$. Există două modalități de reprezentare a acestor diagrame: sub formă de diagramă polară (Fig. 6.18a), variabila fiind unghiul $\theta$; sub formă de diagramă liniară (Fig. 6.18b), în care variabila este unghiul transpus, fie $\gamma_a$, fie $\gamma_b$. În general afară de lobul principal sunt prezenți şi un număr de lobi minori (inclusiv posteriori). O mărime de interes la antenele performante este deschiderea (lărgimea) lobului principal, numit adesea şi fascicul; această deschidere se poate evalua fie între nulurile (zerourile) diagramei, fie pentru atenuări specificate, de exemplu la –3dB față de valoarea maximă.

Deschiderile diagramei de câmp la 3 *dB* atenuare în planele principale sunt [1] (Fig. 6.17b):în planul ($yoz$) $\Omega_1 \approx 0{,}88\lambda_0 / 2b$; în planul ($xoz$) $\Omega_2 \approx 0{,}88\lambda_0 / 2a$.

Ne referim pe scurt la diagrama liniară în planul $\phi = \pi/2$ (Fig. 6.18b), descrisă de funcția (6.5.31), care adesea se pune sub forma $f_E(\varphi = \pi/2) = |E_\theta(\gamma_b)| / |E_\theta(0)|$. Pe această figură se pot face câteva precizări; spațiul fizic vizibil este cuprins între $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, care determină valorile $-k_0 b < \gamma_b < k_{0b}$, adică $-2\pi b/\lambda_0 < \gamma_b < 2\pi b/\lambda_0$; astfel lărgimea vizibilă pe diagrama din Fig. 6.18b este $2\pi(2b/\lambda_0)$. Valoarea în radiani depinde de raportul $(2b/\lambda_0)$; în cazul concret din figură s-a luat $b = 2{,}5\lambda_0$. În cazul aperturilor de dimensiuni mari în comparație cu lungimea de undă, diagramele de radiație prezintă lobi centrali foarte înguşti; nulurile diagramei survin la $k_0 b\, sin\,\theta = n\pi$; primele nuluri survin la $k_0 b\, sin\,\theta = \pi$ (respectiv $k_0 a\, sin\,\theta = \pi$). Pentru valori $k_0 b$ şi $k_0 a$ suficient de mari unghiurile $\theta$ corespunzătoare nulurilor se pot aproxima prin $\theta = \pi / k_0 b = \pi / k_0 a$; de exemplu dacă se ia $b = 4\lambda_0$ avem $\theta_{0b} = (1/8) radiani \cong 7^o$.

b) *Diagrama de putere.* În zona depărtată, conform definiției (6.3.4) diagrama de radiație a puterii se exprimă ca un raport al densității de putere $P_\square(\theta,\phi) = S_r(\theta,\phi)$ pe o direcție oarecare supra valoarea sa maximă. Considerând planul principal $(yOz)$ pentru care $\phi = \pi/2$, pe baza relațiilor (6.5.28) se poate scrie

$$P_\square(\theta,\phi) = \frac{1}{2} Re\left[\vec{E}_\theta \times \vec{H}_\phi^*\right] = -\frac{(ab)^2 k_0^2\, E_0^2}{(\pi r)^2} \left| \frac{sin(k_0 b\, sin\,\theta)}{k_0 b\, sin\,\theta} \right|^2 \qquad (6.5.32)$$

Valoarea maximă se obține pentru $\theta = 0$, astfel funcția care descrie diagrama de radiație a puterii în planul $(yOz)$ este

$$f_{bP}(\phi = \pi/2) = \frac{P_\square(\theta,\phi)}{P_\square(\theta = 0,\phi)} = \left( \frac{sin\,\gamma_b}{\gamma_b} \right)^2 \qquad (6.5.33)$$

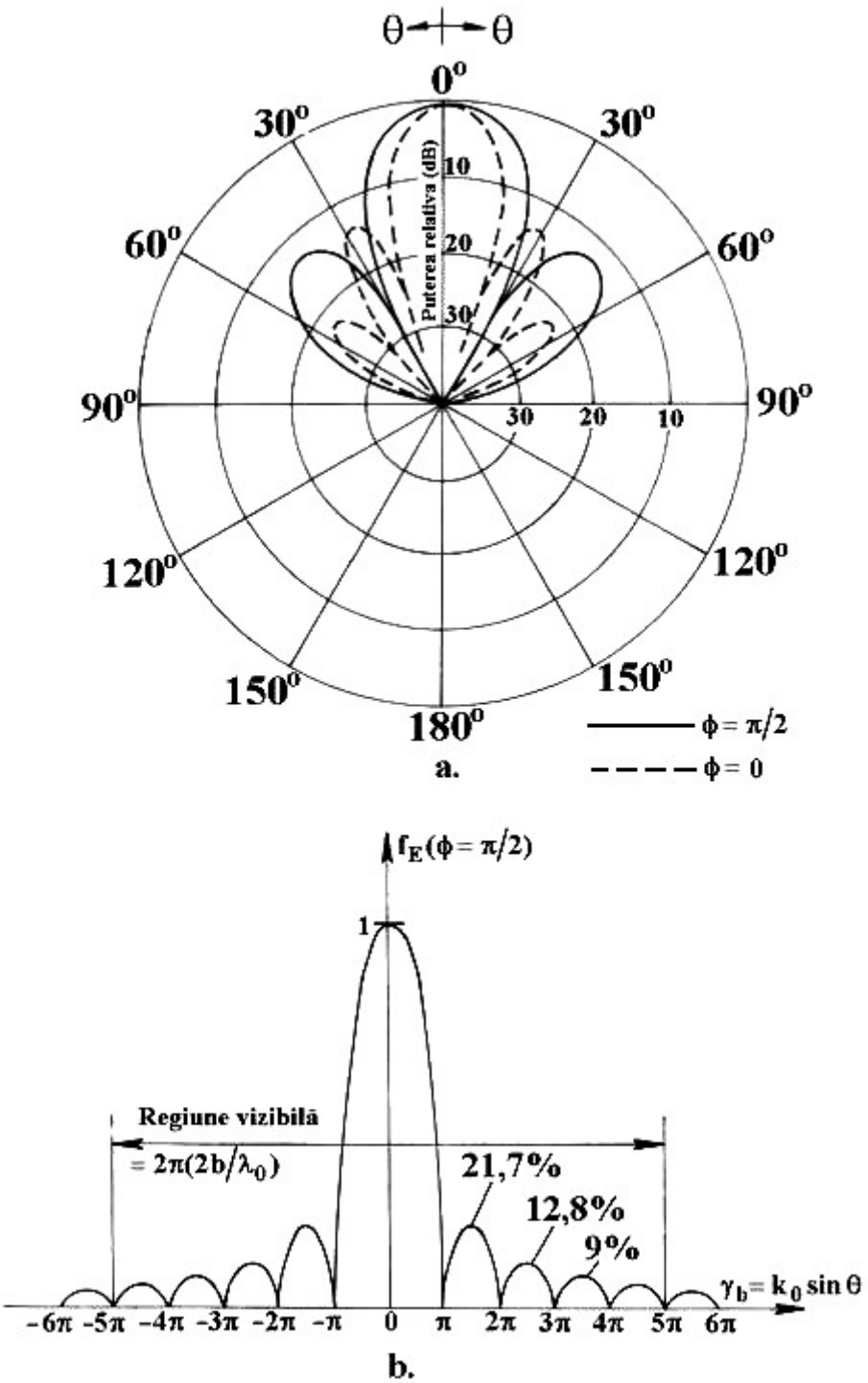



**Fig. 6.18 Tipuri de diagrame de radiaţie pentru câmpuri uniforme în apertura dreptunghiulară: a – diagramă polară,** $a = 3\lambda_0$, $b = 2\lambda_0$ **; b – diagramă liniară unde regiunea vizibilă s-a figurat pentru** $b = 2{,}5\lambda_0$

Deschiderile acestei diagrame la *3dB* atenuare în planurile principale sunt [1]: în planul $(yOz)$ $\Omega_{B1} \cong 0{,}88\,\lambda_0 / 2b$ ;]: în planul $(xOz)$ $\Omega_{B2} \cong 0{,}88\,\lambda_0 / 2a$ .

c) *Directivitate.* Acest parametru este important având în vedere că la aperturi largi poate lua valori forte mari, fapt ce duce la creşterea câştigului. Conform relaţiei (6.3.12) directivitatea se defineşte ca raportul dintre intensitatea de radiaţie a aperturii pe o direcţie dată şi intensitatea de radiaţie a radiatorului isotrop, care este $P_{rad} / 4\pi$ . O metodă simplificată de calcul al acestei puteri constă în considerarea câmpurilor $\vec{E}_a$ şi $\vec{H}_a$ din apertură şi efectuarea integrării numai pe aria aperturii [5]; avem $\left(\vec{E}_a = \hat{j}\,E_0\,,\ \vec{H}_a = -\hat{i}\,E_0 / Z_0\right)$

$$P_{rad} = \int_{S_a} \vec{S}_r \cdot d\vec{s}' = \frac{1}{2} Re \int_{S_a} \left(\vec{E}_a \times \vec{H}_a^*\right) \cdot d\vec{s}' = \frac{E_0^2}{2 Z_0} \int_{S_a} d\vec{s} = \frac{2ab E_0^2}{Z_0} \tag{6.5.34}$$

Intensitatea de radiație $P_\Omega(\theta,\phi)$ se calculează pe direcția $\theta = 0$, pentru care ia valoarea maximă; ținând cont de definiția (6.3.5) și de expresiile câmpurilor $\vec{E}_\phi$ și $\vec{H}_\phi$ pentru planul principal $(yOz)$ (6.5.28), avem

$$P_\Omega(\theta,\phi)_{max} = r^2 P_\square(\theta,\phi) = \frac{r^2}{2} Re\left[\vec{E}_\theta \times \vec{H}_\phi^*\right] = \frac{8(ab)^2 E_0^2}{Z_0 \lambda_0} \tag{6.5.35}$$

$$D_0 = 4\pi \frac{p_\Omega(\theta,\phi)_{max}}{P_{rad}} = \frac{4\pi}{\lambda_0^2}(4ab) = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} A_f = \frac{4\pi}{\lambda_0^2} A_r \tag{6.5.36}$$

Se observă că în cazul aperturii cu câmp uniform aria efectivă a antenei $A_r$ este egală cu aria fizică $A_f$. Pentru alte distribuții de câmp totdeauna aria efectivă a antenelor cu apertură este mai mică decât aria fizică, adică $n_{ap} = A_r / A_f < 1$; la aperturi cu distribuție $TE_{10}$ a câmpului, în funcție de dimensiunile $a$ și $b$ raportate la $\lambda_0$, avem $n_{ap} = 30\% - 90\%$; la antenele horn piramidal (sau tronconic) $n_{ap} = 30\% - 80\%$; la antenele reflector $n_{ap} = 50\% - 80\%$.

### 6.5.2. Metoda transformărilor Fourier

Analiza în domeniul spațial, bazată pe utilizarea potențialelor vectoriale $\vec{A}(\vec{r})$ și $\vec{A}_h(\vec{r})$, poate conduce la obținerea unor rezultate exacte (analitic) pentru zona de radiație Fraunhofer numai în cazul unor configurații simple (uneori idealizate) cum ar fi aperturile în planuri conductoare infinite cu legi bine precizate de variație ale câmpurilor $\vec{E}_a$, $\vec{H}_a$, sau dipolul electric de lungime foarte mică. Însă în cazul structurilor complicate din punct de vedere geometric și al distribuției câmpurilor, sau în vecinătatea cărora se găsesc medii conductive și dielectrice, găsirea unor soluții exacte este extrem de laborioasă dacă nu chiar imposibilă. Simplificări considerabile se obțin prin utilizarea de metode aproximative bazate pe transformările Fourier în raport cu coordonatele spațiale $x$ și $y$.

Considerăm structura din Fig. 6.15, cu câmpurile din apertură ($\vec{E}_a$, $\vec{H}_a$); conform teoremei de unicitate (AIII, (III.2.21)) câmpul din semispațiul $z > 0$ este unic determinat dacă se cunoaște fie componenta tangențială a câmpului electric, fie cea a câmpului magnetic; întrucât pe planul conductor infinit avem $\hat{n} \times \vec{E} = 0$ și $\hat{n} \times \vec{H} \neq 0$ este convenabil să se opereze cu componenta $E_a$. În regiunea de spațiu liber $z > 0$ fără surse câmpul electric reprezintă soluția ecuației de propagare

$$\left[\nabla^2 + k_0^2\right]\vec{E}(x,y,z) = 0 \quad \text{cu} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \tag{6.5.37}$$

Câmpul $\vec{E}(x,y,z)$ al undei monocromatice radiate de apertură poate fi privit ca o suprapunere de unde plane având aceeași frecvență dar cu amplitudini și direcții de propagare diferite de forma $\vec{f}(k_x,k_y)exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r})$; funcția $\vec{f}(k_x,k_y)$ reprezintă amplitudinea vectorială a undei; $k_x$ și $k_y$ sunt frecvențe spectrale care se întind pe întreg spectrul $(-\infty \le k_x, k_y \le \infty)$. Efectuăm transformarea Fourier directă după componentele $x$ și $y$ a câmpului $\vec{E}(x,y,z)$

$$\vec{\mathscr{E}}(k_x,k_y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \vec{E}(x,y,z) e^{-j(k_x x + k_y y)} dxdy \tag{6.5.38}$$

Introducând în ecuația de propagare (6.5.37) avem

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2-\left(k_x^2+k_y^2\right)\right]\vec{\mathscr{E}}\left(k_x,k_y,z\right)=0 \tag{6.5.39}$$

iar soluția se poate scrie sub forma

$$\vec{\mathscr{E}}\left(k_x,k_y,z\right)=\vec{f}\left(k_x,k_y\right)e^{-jk_z z} \tag{6.5.40}$$

Evident

$$\vec{\mathscr{E}}\left(k_x,k_y,z=0\right)=\vec{f}\left(k_x,k_y\right) \tag{6.5.41}$$

Dacă transformata câmpului $\vec{\mathscr{E}}\left(k_x,k_y,z\right)$ este cunoscută atunci se poate determina câmpul $\vec{E}(x,y,z)$ utilizând transformarea Fourier inversă generală

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\vec{f}\left(k_x,k_y\right)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\,dk_x dk_y \tag{6.5.42}$$

În legătură cu evaluarea ultimei integrale sunt necesare câteva comentarii. Ținând cont de relațiile

$$\begin{gathered}\vec{r}=\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z\\ \vec{k}=\hat{i}k_x+\hat{j}k_y+\hat{k}k_z;\quad k_0=\left|\vec{k}\right|=k_x^2+k_y^2+k_z^2\end{gathered} \tag{6.5.43}$$

avem $k_z^2=k_0^2-\left(k_x^2+k_y^2\right)$ şi vom observa că numai undele care au $k_z$ real, $\left[k_0^2>\left(k_x^2+k_y^2\right)\right]$, asigură transportul energiei în spațiul liber, în timp ce undele cu $k_z$ pur imaginar au un caracter evanescent.

Funcția $\vec{f}\left(k_x,k_y\right)$ se poate scrie sub forma

$$\vec{f}\left(k_x,k_y\right)=\hat{i}f_x\left(k_x,k_y\right)+\hat{j}f_y\left(k_x,k_y\right)+\hat{k}f_z\left(k_x,k_y\right)=\vec{f}_t\left(k_x,k_y\right)+\hat{k}f_z\left(k_x,k_y\right) \tag{6.5.44}$$

unde $\vec{f}_t\left(k_x,k_y\right)=\hat{i}f_x\left(k_x,k_y\right)+\hat{j}f_y\left(k_x,k_y\right)$. În cazul aperturilor situate în planul $(x,y)$ este necesară determinarea numai a componentelor $f_x$ şi $f_y$; la rândul ei componenta $f_t$ se poate exprima în funcție de $f_x$ şi $f_y$ făcând uz de condiția de câmp solenoidal $\nabla\cdot\vec{E}(x,y,z)=0$; aplicând această condiție la (6.5.42) se poate scrie

$$\nabla\cdot\vec{f}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=\vec{f}\cdot\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=\vec{f}\cdot\left(-j\vec{k}e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\right)=0 \tag{6.5.45}$$

de unde se scoate

$$\vec{k}\cdot\vec{f}=0; \tag{6.5.46}$$

dacă se ține seama de (6.5.44) din ultima relație rezultă

$$f_z=-\frac{\vec{f}_t\cdot\vec{k}}{k_z} \tag{6.5.47}$$

unde funcția $\vec{f}_t\left(k_x,k_y\right)$ se poate determina, în mod unic, în funcție de componenta tangențială a câmpului electric din apertură; aici avem

$$\vec{E}(x,y,z=0)=\vec{E}_a(a,b)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int f_t\left(k_x,k_y\right)e^{-j\left(k_x x+k_y y\right)}dk_x dk_y\;; \tag{6.5.48}$$

efectuând operația inversă avem

$$\vec{f}_t\left(k_x,k_y\right)=\int_{S_a}\vec{E}_a(x,y)e^{j\left(k_x x+k_y y\right)}dxdy \tag{6.5.49}$$

Componenta de câmp magnetic în spațiul liber se poate determina din ecuația Maxwell $\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H}$, obținându-se

$$\vec{H}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi^2 k_0 Z_0} \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{k} \times \vec{f}(k_x, k_y) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dk_x dk_y \tag{6.5.50}$$

*Evaluarea asimptotică a integralei (6.5.42).* Problema de interes constă în determinarea componentelor $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ în zona depărtată de radiație. Pentru majoritatea antenelor uzuale distribuția câmpului în apertură este total diferită de $\vec{E}_a = const.$, astfel încât evaluarea exactă a integralei (6.5.42) într-o formă analitică condensată este imposibilă; totuşi, referindu-ne numai la zona Fraunhofer (valori $kr$ foarte mari) integrala respectivă se evaluează asimptotic utilizând *metoda fazei staționare.*

În general, când $r$ are valori foarte mari exponențiala $exp(-j\vec{k}\cdot\vec{r}) = cos(\vec{k}\cdot\vec{r}) - j\, sin(\vec{k}\cdot\vec{r})$ variază rapid între valori pozitive şi negative egale, astfel contribuția la integrala (6.5.42) este neglijabilă; excepție fac punctele pentru anumite valori $k_x$ şi $k_y$ pentru care produsul $\vec{k}\cdot\vec{r}$ rămâne staționar, adică nu variază dacă se iau în considerare variațiile de ordin unu ale mărimilor $k_x$ şi $k_y$. O apreciere corectă asupra domeniilor de fază staționară se poate face pe baza dezvoltării în serie Taylor a produsului $\vec{k}\cdot\vec{r}$.

Mai întâi însă este necesară introducerea unor notații şi relații simplificatoare; ținând cont de (6.5.43) şi de transformările (6.2.12) se poate scrie

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = (\hat{i}k_x + \hat{j}k_y + \hat{k}k_z)\cdot \hat{r}r = r(k_x \sin\theta\cos\phi + k_y \sin\theta\sin\phi + k_z\cos\theta) \tag{6.5.51}$$

în care vom ține seama că $k_z = \left[k_0^2 - (k_x^2 + k_y^2)\right]^{1/2}$. Punctele de fază staționară se determină din condițiile

$$\frac{\partial(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial k_x} = 0; \quad \frac{\partial(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial k_y} = 0 \tag{6.5.52}$$

ale căror soluții sunt

$$k_x = k_z \frac{\sin\theta\cos\phi}{\cos\theta}; \quad k_y = k_z \frac{\sin\theta\sin\phi}{\cos\theta} \tag{6.5.53}$$

iar pentru $k_z$ rezultă

$$k_z = k_0 \cos\theta \tag{6.5.54}$$

Introducând această valoare a lui $k_z$ în (6.5.53) se obțin valorile de fază staționară pentru $k_x$ şi $k_y$

$$\begin{aligned} k_x &= k_0 \sin\theta\cos\phi = k_1 \\ k_y &= k_0 \sin\theta\sin\phi = k_2 \end{aligned} \tag{6.5.55}$$

În vecinătatea punctelor de fază staționară $(k_1, k_2)$ produsul $\vec{k}\cdot\vec{r}$ poate fi aproximat utilizând primii termeni din dezvoltarea Taylor; avem

$$\begin{aligned} \vec{k}\cdot\vec{r} = \vec{k}\cdot\vec{r}\Big|_{k_1,k_2} &+ \frac{\partial(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial k_x}\Big|_{k_1,k_2}(k_x - k_1) + \frac{\partial(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial k_y}\Big|_{k_1,k_2}(k_y - k_2) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial k_x^2}\Big|_{k_1,k_2}(k_x - k_1)^2 + \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial k_y^2}\Big|_{k_1,k_2}(k_y - k_2)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2(\vec{k}\cdot\vec{r})}{\partial k_x \partial k_y}\Big|_{k_1,k_2}(k_x - k_1)(k_y - k_2) + \ldots \end{aligned} \tag{6.5.56}$$

Întrucât termenul al doilea şi al treilea se anulează în punctele de fază staționară (6.5.52), se poate scrie

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = k_0 r - \left(Au^2 + Bv^2 + Cuv\right) \tag{6.5.57}$$

în care $u = k_x - k_1, v = k_y - k_2$ iar mărimile *A, B, C* se pot detalia după cum urmează

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}{\partial k_x^2}\bigg|_{k_1,k_2} = \frac{r}{2k_0}\left(1+\frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\cos^2\theta}\right) \\ B &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}{\partial k_y^2}\bigg|_{k_1,k_2} = \frac{r}{2k_0}\left(1+\frac{\sin^2\theta\sin^2\phi}{\cos^2\theta}\right) \\ C &= -\frac{\partial^2\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}{2\partial k_x\partial k_y}\bigg|_{k_1,k_2} = \frac{r}{2k_0}\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cos\phi\sin\phi\right) \end{aligned} \tag{6.5.58}$$

Integrala (6.5.42) poate fi aproximată în jurul punctului de fază staționară $(k_1, k_2)$

$$\vec{E}(x,y,z) \cong \frac{1}{4\pi^2}\vec{f}(k_1,k_2)e^{-jkr}\int\int_{S_0} e^{j\left(Au^2+Bv^2+Cuv\right)}dudv \tag{6.5.59}$$

unde $S_0$ reprezintă o mică suprafață circulară, centrată pe punctul de fază staționară, care aduce contribuția majoră la valoarea integralei; totuşi, având în vedere că factorul de fază ia valori mari pentru $r$ mare iar variabilele $u$ şi $v$ diferă foarte puțin de zero, suprafața de integrare poate fi extinsă pe întreg planul $(u,v)$ fără a produce erori semnificative.

Există mai multe metode de a integra (6.5.59); aici prezentăm rezultatul din [5]

$$\int\int_{S_0} e^{j\left(Au^2+Bv^2+Cuv\right)}dudv = j\frac{2\pi}{\left[4AB-C^2\right]^{1/2}} \tag{6.5.60}$$

în care s-a presupus $4AB-C^2 > 0,\ A > 0$ şi

$$4AB-C^2 = \left(\frac{r}{k_0\cos\theta}\right)^2 \tag{6.5.61}$$

astfel integrala (6.5.60) ia valoarea $j(2\pi k_0/r)\cos\theta$. Forma finală a integralei (6.5.59) este

$$\vec{E}(x,y,z) \cong \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{2\pi r}\vec{f}(k_1,k_2)\cos\theta \tag{6.5.62}$$

Expresia generală a integralei (6.5.60) este $j2\pi\delta\Big/\left[\left|4AB-C^2\right|\right]^{1/2}$ unde $\delta = +1$ pentru $4AB > C^2, A > 0$; $\delta = -1$ pentru $4AB > C^2, A < 0$; $\delta = -j$ pentru $4AB < C^2$.

În zona depărtată de radiație sunt dominante componentele $E_\theta$ şi $E_\phi$ care prin intermediul funcției $\vec{f}$ pot fi exprimate în funcție de $f_x$ şi $f_y$

$$\vec{f} = \hat{i}f_x + \hat{j}f_y + \hat{k}f_z = \left(\hat{i}f_x + \hat{j}f_y - \hat{k}\frac{f_x k_x + f_y k_y}{k_z}\right) \tag{6.5.63}$$

iar în punctul de fază staționară $(k_1, k_2)$ avem

$$\vec{f}(k_1,k_2) = \left[\hat{i}f_x + \hat{j}f_y - \hat{k}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(f_x\cos\phi + f_y\sin\phi\right)\right] \tag{6.5.64}$$

Componentele $f_\theta$ şi $f_\phi$ capătă expresiile

$$f_\theta = \frac{f_x \cos\theta + f_y \sin\phi}{\cos\theta}; \quad f_\phi = -f_x \sin\phi + f_y \cos\phi \tag{6.5.65}$$

Acum (6.5.62) se poate pune sub forma

$$\vec{E}(r,\theta,\phi) \cong \frac{jk_0 \exp(-jk_0 r)}{2\pi r}\left[\hat{\theta}\left(f_x \cos\theta + f_y \sin\phi\right) + \hat{\phi}\left(-f_x \sin\phi + f_y \cos\phi\right)\cos\theta\right] \tag{6.5.66}$$

Câmpul magnetic are expresia

$$\vec{H}(r,\theta,\phi) = \frac{\hat{r} \times \vec{E}(r,\theta,\phi)}{Z_0} \tag{6.5.67}$$

Componentele $f_x(k_1,k_2)$ şi $f_y(k_1,k_2)$ se pot determina utilizând relația (6.5.49) în care coordonatele aperturii vor fi notate cu prim

$$\begin{aligned} f_x(k_1,k_2) &= \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} E_{ax}(x',y',0)e^{jk_0(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi)}dx'\,dy' \\ f_y(k_1,k_2) &= \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} E_{ay}(x',y',0)e^{jk_0(x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi)}dx'\,dy' \end{aligned} \tag{6.5.68}$$

## 6.6. ANTENE HORN

Antenele horn sunt larg utilizate în laboratoare atât ca elemente independente de radiație cât şi pentru calibrarea şi măsurarea câştigului unor antene de performanțe ridicate; de asemenea ele sunt utilizate şi în alte situații cum ar fi excitarea unor antene cu reflector sau cu lentile, elemente ale unor aranjamente (rețele) de antene fazate.

Antenele horn cu apertură dreptunghiulară sunt în general de trei tipuri (Fig. 6.19); horn sectorial *E*, horn sectorial *H* şi horn piramidal.

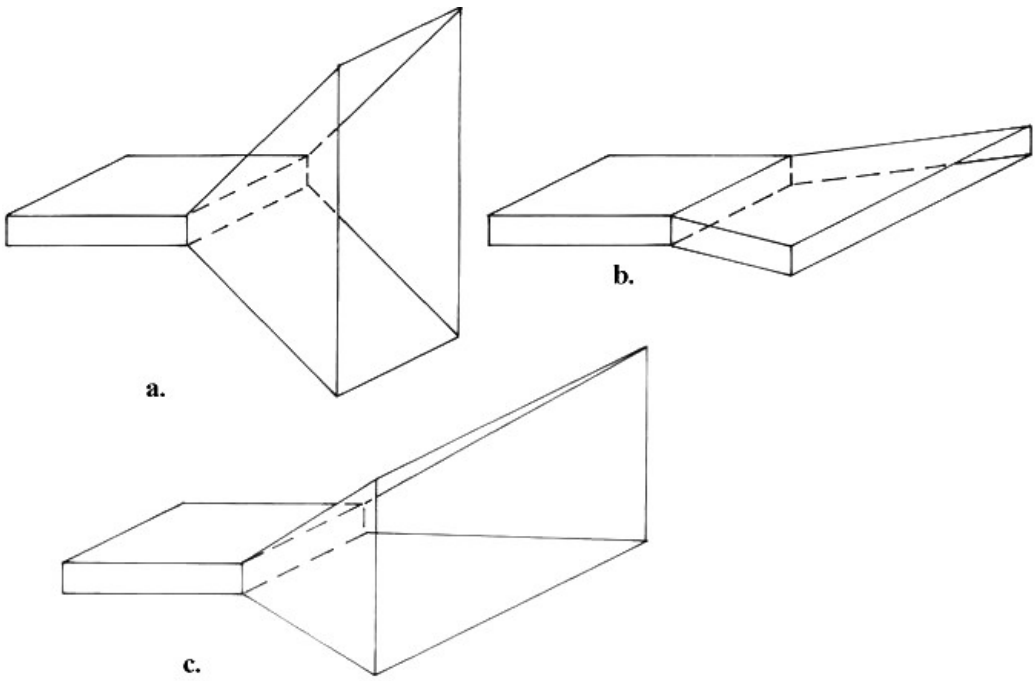



**Fig. 6.19 Tipuri de antene horn cu apertură dreptunghiulară:**
**a – horn sectorial E; b – horn sectorial H; c - horn piramidal**

### 6.6.1. Horn sectorial *E*

**1º. Faza câmpurilor în apertură.**

Deşi cea mai uzuală structură este hornul piramidal, în scopul stabilirii unor relații de bază vom considera un horn sectorial *E* (Fig. 6.19a). Aceasta se obține prin deschiderea ghiului dreptunghiular în planul câmpului electric *E*; având în vedere că în marea majoritatea a cazurilor hornul este alimentat de un ghid în care se propagă modul fundamental $TE_{10}$, deschiderea se realizează pe direcția $y$, aşa cum este detaliat în Fig. 6.20a.

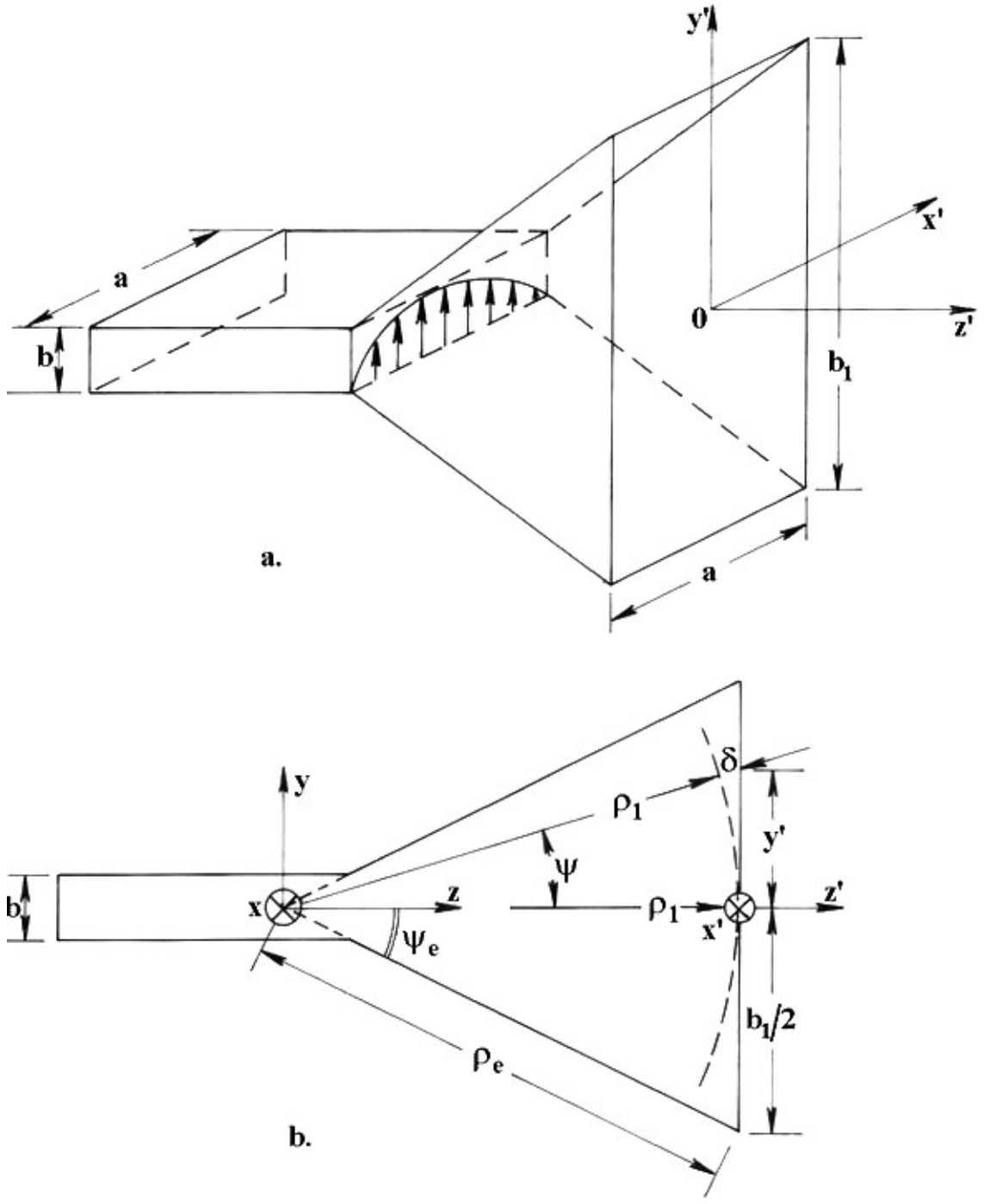



**Fig. 6.20 Horn sectorial E excitat cu modul dominant $TE_{10}$ :**
**a – vedere de ansamblu; b – secțiune longitudinală în planul E**

Problema esențială a analizei constă în determinarea (sau aproximarea) câmpului în apertură, modul şi fază; apoi urmează calculul câmpului radiat în zona depărtată, similar ca la apertura în plan conductor infinit. Ne referim la secțiunea din planul $(y'Oz')$ (Fig. 6.20b) în care se

admite: (a) modul dominant în ghid este $TE_{10}$, (b) lungimea hornului este suficient de mare în raport cu dimensiunile aperturii. Câmpul din apertură se poate determina prin relațiile

$$E_y'(x',y') \cong E_0 \cos(\pi x'/a) e^{-j\left[k_0 y'^2/2\rho_1\right]} \tag{6.6.1}$$

$$H_x'(x',y') \cong (E_0/Z_0)\cos(\pi x'/a) e^{-j\left[k_0 y'^2/2\rho_1\right]} \tag{6.6.2}$$

$$H_z'(x',y') \cong j(\pi/ak_0 Z_0) E_0 \sin(\pi x'/a) e^{-j\left[k_0 y'^2/2\rho_1\right]} \tag{6.6.3}$$

$$E_z' = 0,\ E_x' = 0,\ H_y' = 0 \tag{6.6.4}$$

unde

$$\rho_1 = \rho_e \cos\psi_e \tag{6.6.5}$$

Trebuie observat că sistemul de coordonate $(x', y', z')$ are originea în centrul aperturii (Fig. 6.20a), astfel se explică variațiile în cosinus ale câmpurilor $E_y'$ şi $H_x'$, şi variațiile în sinus ale câmpului $H_z'$; aceste variații diferă față de cele date în §2.3.5. Diferența dintre expresiile câmpurilor $E_y', H_x', H_z'$ şi cele similare din ghidul dreptunghiular constă în termenul exponențial, care ia în considerare variația pătratică a fazei pe suprafața aperturii hornului. Necesitatea introducerii termenului de variație pătratică a fazei rezultă din Fig. 6.20b. Admitem că în vârful hornului este situată o sursă de curent liniară care radiază unde cilindrice; pe măsură ce undele se propagă radial spre apertură, frontul de fază constantă are formă cilindrică. În orice punct $y'$ din apertură fază va fi diferită față de originea $y' = 0$, deoarece drumul parcurs de la apex la apertură este diferit; din Fig. 6.20b se poate determina diferența de drum $\delta(y')$

$$\left[\rho_1 + \delta(y')\right]^2 = \rho_1^2 + y'^2\ ;\ \delta(y') = -\rho_1 + \rho_1\left[1 + (y'/\rho_1)^2\right]^{1/2} \tag{6.6.6}$$

Efectuăm o dezvoltare binomială a parantezei şi reținem numai primii doi termeni; rezultă

$$\delta(y') \cong \frac{1}{2}\left(\frac{y'^2}{\rho_1}\right) \tag{6.6.7}$$

iar după multiplicarea cu factorul de fază $k_0$ se obține $exp\left[-j\left(k_0 y'^2/2\rho_1\right)\right]$. S-a constatat că aproximația (6.6.7), care simplifică foarte mult calculele, permite obținerea de rezultate foarte apropiate de cele bazate pe expresia exactă (6.6.6). Aproximația (6.6.7) dă rezultate bune în cazul hornurilor cu aperturi mari $(b_1 \geq 5\lambda_0)$, sau în cazul hornului sectorial $H$ $(a_1 \geq 5\lambda_0)$; în cazul aperturilor moderate $(b_1 \approx 5\lambda_0,\ a_1 \approx 8\lambda_0)$ intervin erori de fază semnificative.

**2º. Câmpul radiat.**

Câmpul radiat în spațiul liber este datorat numai componentelor tangențiale din apertura hornului. Sursele propriu-zise sunt reprezentate prin curenți echivalenți determinați prin relații generale de forma $\vec{J}_s = \hat{n} \times \vec{H}_a$, $\vec{J}_{ms} = -\hat{n} \times \vec{E}_a$; se consideră că apertura hornului este situată în „spațiul liber", adică nu este montată pe un plan conductor infinit ca în Fig. 6.15, astfel din expresiile curenților echivalenți lipseşte factorul 2 stipulat de teorema Love. În cazul nostru $\vec{E}_a = \vec{E}_y' = \hat{j} E_y'$, $\vec{H}_a = \vec{H}_x' = \hat{i} H_x'$, prin urmare pentru curenții echivalenți se poate scrie

$$\vec{J}_{ms} = \hat{i} J_{ms};\ \ J_{ms}(x',y') = E_0 \cos(\pi x'/a) e^{-jk_0 \delta(y')} \tag{6.6.8}$$

$$\vec{J}_s = -\hat{j} J_s;\ \ J_s(x',y') = -(E_0/Z_0)\cos(\pi x'/a) e^{-jk_0 \delta(y')} \tag{6.6.9}$$

în care $-b_1/2 \leq y' \leq b_1/2$, $-a/2 \leq x' \leq a/2$; în afara aperturii avem $\vec{J}_{ms} = 0, \vec{J}_s = 0$.

Componentele de câmp în zona depărtată se determină pe baza relațiilor (6.5.9)÷(6.5.12), care presupun calcularea mărimilor $N_{e\theta}, N_{e\phi}, L_{h\theta}, L_{h\phi}$ (6.5.15). În cele ce urmează vom urma procedura de calcul propusă în [5]. Începem cu mărimea $N_{e\theta}$ care se pune sub forma

$$N_{e\theta} = \int_{S_a} J_s \cos\theta \sin\phi \; e^{jk_0 r' \cos\psi} ds' = -(E_0/Z_0)\cos\theta \sin\phi \; [I_1 I_2] \tag{6.6.10}$$

unde $I_1$ şi $I_2$ sunt integrale care urmează să fie calculate; avem

$$I_1 = \int_{-a/2}^{a/2} \cos(\pi x'/a) e^{jk_0 \sin\theta \cos\phi} dx' \tag{6.6.11}$$

$$I_2 = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} e^{-jk_0[\delta(y') - y' \sin\theta \sin\phi]} dy' \tag{6.6.12}$$

Integrala $I_1$ se poate calcula direct obținându-se expresia

$$I_1 = -\frac{\pi a}{2} \frac{\cos[(k_0 a/2)\sin\theta \cos\phi]}{[(k_0 a/2)\sin\theta \cos\phi]^2 - (\pi/2)^2} \tag{6.6.13}$$

Evaluarea integralei $I_2$ se efectuează în termenii integralelor Fresnel: integrale Fresnel de cosinus $C(x)$ şi integrale Fresnel de sinus $S(x)$; aceste integrale sunt tabelate. Scriem pe $I_2$ sub forma

$$I_2 = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} e^{-j[k_0 y'^2/2\rho_1 - y' k_y]} dy' = e^{j(k_y^2 \rho_1/2k_0)} \int_{-b_1/2}^{b_1/2} e^{-j[(k_0 y' - k_y \rho_1)^2/2k_0 \rho_1]} dy' \tag{6.6.14}$$

în care s-a notat $k_y = k_0 \sin\theta \sin\phi$. Pentru calculul ultimei integrale în termenii unor integrale de tip Fresnel se efectuează o schimbare de variabilă

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} t = \left(\frac{1}{2k_0\rho_1}\right)^{1/2} (k_0 y' - k_y \rho_1) \; ;$$
$$t = \left(\frac{1}{\pi k_0 \rho_1}\right)^{1/2} (k_0 y' - k_y \rho_1) \; ; \quad dt = \left(\frac{k_0}{\pi \rho_1}\right)^{1/2} dy' \tag{6.6.15}$$

Introducând în (6.6.14) se obține

$$I_2 = \left(\frac{\pi\rho_1}{k_0}\right)^{1/2} e^{jk_y^2 \rho_1/2k_0} \int_{t_1}^{t_2} e^{-j(\pi/2)t^2} dt = \left(\frac{\pi\rho_1}{k_0}\right)^{1/2} e^{jk_y^2 \rho_1/2k_0} \int_{t_1}^{t_2} \left[\cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) - j \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\right] dt \tag{6.6.16}$$

care se pune sub forma

$$I_2 = (\pi\rho_1/k_0)^{1/2} e^{jk_y^2 \rho_1/2k_0} \{C(t_{2e}) - C(t_{1e}) - j[S(t_{2e}) - S(t_{1e})]\} \tag{6.6.17}$$

în care s-a notat

$$t_{1e} = \left(\frac{1}{\pi k_0 \rho_1}\right)^{1/2} \left(-\frac{k_0 b_1}{2} - k_y \rho_1\right); \quad t_{2e} = \left(\frac{1}{\pi k_0 \rho_1}\right)^{1/2} \left(\frac{k_0 b_1}{2} - k_y \rho_1\right) \tag{6.6.18}$$

Mărimile $C(t_{1e})$, $C(t_{2e})$ sunt integrale Fresnel de *cosinus* iar $S(t_{1e})$, $S(t_{2e})$ sunt integrale Fresnel de *sinus*; formulele de definiție pentru aceste integrale sunt

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt \tag{6.6.19}$$

Introducem pe $I_1$ şi $I_2$ în (6.6.10); avem

$$N_{e\theta} = E_0 \frac{\pi a}{2}\left(\frac{\pi\rho_1}{k_0}\right)^{1/2} e^{jk_y^2\rho_1/2k_0}\left\{\frac{\cos\theta\sin\phi}{Z_0}\left[\frac{\cos(k_x a/2)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]F(t_1,t_2)\right\} \tag{6.6.20}$$

în care s-au folosit notaţiile: $k_x = k_0\sin\theta\cos\phi$, $k_y = k_0\sin\theta\sin\phi$ iar

$$F(t_1,t_2) = C(t_{2e}) - C(t_{1e}) - j[S(t_{2e}) - S(t_{1e})] \tag{6.6.21}$$

Mărimile $N_{e\phi}, L_{h\theta}$ şi $L_{h\phi}$ se calculează similar cu $N_{e\theta}$; avem

$$N_{e\phi} = E_0 \frac{\pi a}{2}\left(\frac{\pi\rho_1}{k_0}\right)^{1/2} e^{jk_y^2\rho_1/2k_0}\left\{\frac{\cos\phi}{Z_0}\left[\frac{\cos(k_x a/2)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]F(t_1,t_2)\right\} \tag{6.6.22}$$

$$L_{h\theta} = E_0 \frac{\pi a}{2}\left(\frac{\pi\rho_1}{k_0}\right)^{1/2} e^{jk_y^2\rho_1/2k_0}\left\{-2\cos\theta\sin\phi\left[\frac{\cos(k_x a/2)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]F(t_1,t_2)\right\} \tag{6.6.23}$$

$$L_{h\phi} = E_0 \frac{\pi a}{2}\left(\frac{\pi\rho_1}{k_0}\right)^{1/2} e^{jk_y^2\rho_1/2k_0}\left\{\sin\phi\left[\frac{\cos(k_x a/2)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]F(t_1,t_2)\right\} \tag{6.6.24}$$

Câmpurile $E_\theta$ şi $E_\phi$ în zona depărtată se calculează pe baza relaţiilor (6.5.9), (6.5.10); avem

$$E_\theta = -\frac{ja(\pi k_0\rho_1)^{1/2}\,E_0\,e^{-jk_0 r}}{8r}\left[e^{jk_y^2\rho_1/2k_0}\,\sin\phi(1+\cos\theta)K_x F(t_1,t_2)\right] \tag{6.6.25}$$

$$E_\phi = -\frac{ja(\pi k_0\rho_1)^{1/2}\,E_0\,e^{-jk_0 r}}{8r}\left[e^{jk_y^2\rho_1/2k_0}\,\cos\phi(1+\cos\theta)K_x F(t_1,t_2)\right] \tag{6.6.26}$$

în care s-a notat

$$K_x = \left[\frac{\cos(k_x a/2)}{\left(\frac{k_x a}{2}\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right] \tag{6.6.27}$$

Sunt de interes expresiile câmpurilor $E_\theta$ şi $E_\phi$ în planurile principale $\phi = \pi/2$ şi $\phi = 0$; avem:

a) planul $\phi = \pi/2$ $(yOz)$

$$E_\theta = \frac{-ja\,E_0(\pi k_0\rho_1)^{1/2}\,e^{-jk_0 r}}{8r}\left[e^{-j(k_0\rho_1\sin^2\theta/2)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2(1+\cos\theta)F(t'_{1e},t'_{2e})\right] \tag{6.6.28}$$

în care s-a notat

$$t'_{1e}=\left(\frac{k_0}{\pi\rho_1}\right)^{1/2}\left(-\frac{b_1}{2}-\rho_1\sin\theta\right);\quad t'_{2e}=\left(\frac{k_0}{\pi\rho_1}\right)^{1/2}\left(\frac{b_1}{2}-\rho_1\sin\theta\right) \tag{6.6.29}$$

şi evident $E_\phi=0,\ E_r=0$.

b) planul $\phi=0\ \ (xOz)$

$$E_\phi=\frac{-ja\,E_0(\pi k_0\rho_1)^{1/2}e^{-jk_0r}}{8r}\left\{(1+\cos\theta)\left[\frac{\cos\left(\frac{k_0a}{2}\sin\theta\right)}{\left(\frac{k_0a}{2}\sin\theta\right)^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]F\left(t''_{1e},t''_{2e}\right)\right\} \tag{6.6.30}$$

în care s-a notat

$$t''_{1e}=-\frac{b_1}{2}\left(\frac{k_0}{\pi\rho_1}\right)^{1/2};\quad t''_{2e}=\frac{b_1}{2}\left(\frac{k_0}{\pi\rho_1}\right)^{1/2} \tag{6.6.31}$$

şi evident $E_\phi=0,\ E_r=0$.

**3º. Directivitatea $D_{0E}$.**

Ca şi la alte tipuri de antene acest parametru este deosebit de important deoarece el serveşte la evaluarea şi a altor parametri uzuali cum ar fi câştigul antenei sau lărgimea lobului principal. Directivitatea se defineşte prin relaţia (6.3.29) ca raportul dintre intensitatea de radiaţie pe o direcţie dată şi intensitatea de radiaţie a radiatorului isotrop (ideal); interes practic prezintă *directivitatea maximă* $D_{0E}$, care se obţine pentru $\theta=0$, şi care este definită printr-o relaţie de tipul (6.3.14), pe care o retranscriem aici

$$D_{0E}=4\pi\frac{P_\Omega(\theta,\phi)_{max}}{P_{rad}} \tag{6.3.14}$$

Puterea radiată $P_{rad}$ de antenă este

$$P_{rad}=\int_{S_a}\vec{S}_r\cdot d\vec{s}'=\frac{1}{2}Re\int_{S_a}\left(\vec{E}'_y\times\vec{H}'^{*}_x\right)\cdot d\vec{s}'=\frac{ab_1|E_0|^2}{4Z_0} \tag{6.6.32}$$

unde s-a ţinut cont de (6.6.1) şi (6.6.2).

Intensitatea de radiaţie maximă $P_\Omega(\theta,\phi)_{max}$ se calculează prin intermediul densităţii de putere $P_\square(\theta,\phi)_{max}$ conform definiţiei (6.3.5); la rândul ei densitatea de putere $P_\square(\theta,\phi)_{max}$ se calculează luând în considerare ambele componente $E_\theta,\ E_\phi,\ H_\theta,\ H_\phi$. Ţinând cont de expresiile (6.6.25) şi (6.6.26) ale componentelor $E_\theta$ şi $E_\phi$, precum şi de definiţiile (6.5.26) şi (6.5.27) se poate scrie

$$P_\Omega(\theta,\phi)_{max}=\frac{r^2}{2Z_0}\left|\vec{E}\right|^2_{max} \tag{6.6.33}$$

unde

$$\left|\vec{E}\right|_{max}=\left[\left|\vec{E}_\theta\right|^2_{max}+\left|\vec{E}_\phi\right|^2_{max}\right]^{1/2}=\frac{2a(\pi k_0\rho_1)^{1/2}}{\pi^2r}E_0|F(t)| \tag{6.6.34}$$

Având în vedere că $\left|\vec{E}_\theta\right|_{max}$ şi $\left|\vec{E}_\phi\right|_{max}$ se obţin pentru $\theta=0$, din (6.6.25) şi (6.6.26) avem

$$\left|\vec{E}_\theta\right|_{max} = \frac{2a(\pi k_0 \rho_1)^{1/2}}{\pi^2 r}\left|E_0 \sin\phi \; F(t)\right| \tag{6.6.35}$$

$$\left|\vec{E}_\phi\right|_{max} = \frac{2a(\pi k_0 \rho_1)^{1/2}}{\pi^2 r}\left|E_0 \cos\phi \; F(t)\right| \tag{6.6.36}$$

$$F(t) = [C(t) - jS(t)] \tag{6.6.37}$$

$$t = \frac{b_1}{(2\lambda_0 \rho_1)^{1/2}} \tag{6.6.38}$$

iar $t_{1e} = -t;\ t_{2e} = t;\ k_x = 0;\ k_y = 0$; de asemenea s-a ținut seama de proprietățile integralelor Fresnel: $C(-t) = -C(t),\ S(-t) = -S(t)$.

În final rezultă

$$P_{\Omega max} = \frac{2a^2 k_0 \rho_1}{\pi^3 Z_0}|E_0|^2 |F(t)|^2 = \frac{4a^2 \rho_1 |E_0|^2}{\pi^2 \lambda_0 Z_0}|F(t)|^2 \tag{6.6.39}$$

$$|F(t)|^2 = \left[C^2(t) + S^2(t)\right] \tag{6.6.40}$$

unde $t$ este dat de (6.6.38).

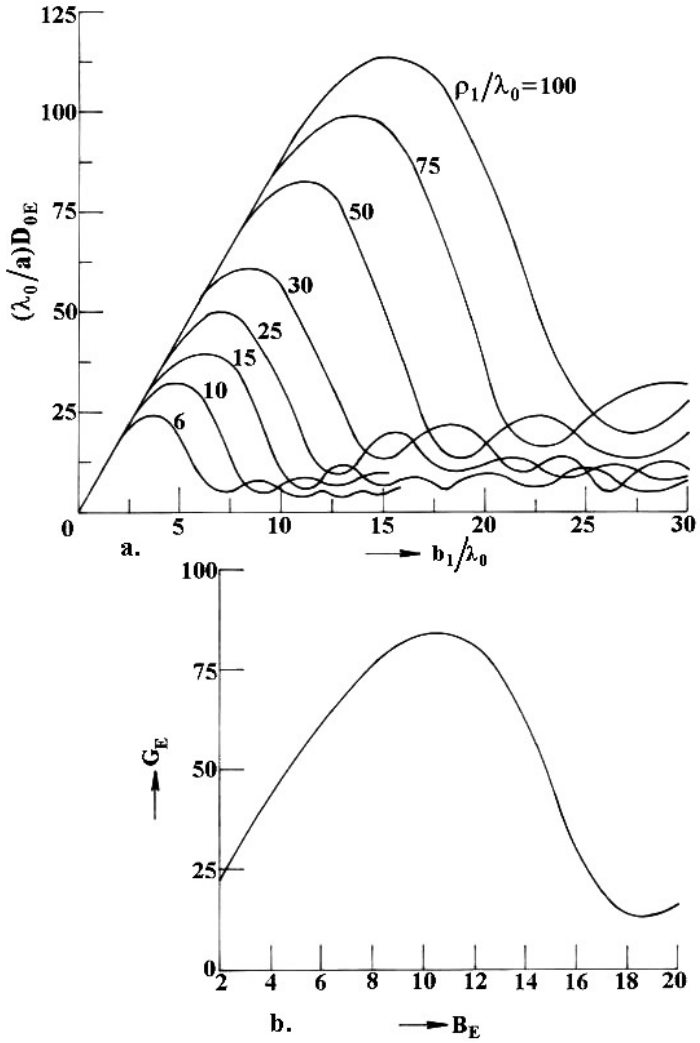



**Fig. 6.21 Directivitatea normată pentru hornul sectorial E [5]: a – în funcție de dimensiunile aperturii şi de lungimea hornului; b – variația câştigului $G_E$ în funcție de mărimea $B_E$**

Introducând (6.6.32) şi (6.6.39) în expresia (6.3.14) rezultă forma clasică a directivității maxime

$$D(\theta,\phi)_{max} = D_{0E} = \frac{64a\rho_1}{\pi b_1 \lambda_0}\left[C^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\rho_1\lambda_0}}\right) + S^2\left(\frac{b_1}{\sqrt{2\rho_1\lambda_0}}\right)\right] \qquad (6.6.41)$$

Pentru determinări practice se dau grafice de tipul celor reprezentate în Fig. 6.21a,b. De asemenea sunt propuse relații simplificate (aproximative) de calcul după cum urmează. Se introduce o mărime

$$B_E = \frac{b_1}{\lambda_0}\left(\frac{50}{\rho_e/\lambda_0}\right)^{1/2} \qquad (6.6.42)$$

şi se determină câştigul $G_E$ pe graficul din Fig. 6.21b; dacă $B_E < 2$ atunci $G_E$ se calculează după relația simplificată $G_E = (32\,B_E/\pi)$; directivitatea maximă $D_{0E}$ se calculează utilizând expresia

$$D_{0E} = \frac{a}{\lambda_0}\frac{G_E}{(50\lambda_0/\rho_e)^{1/2}} \qquad (6.6.43)$$

Trebuie observat că $B_E$ este determinat în principal de dimensiunile geometrice ale aperturii şi lungimii de undă iar $G_E$ se poate determina din Fig. 6.21b.

### 6.6.2. Horn sectorial *H*

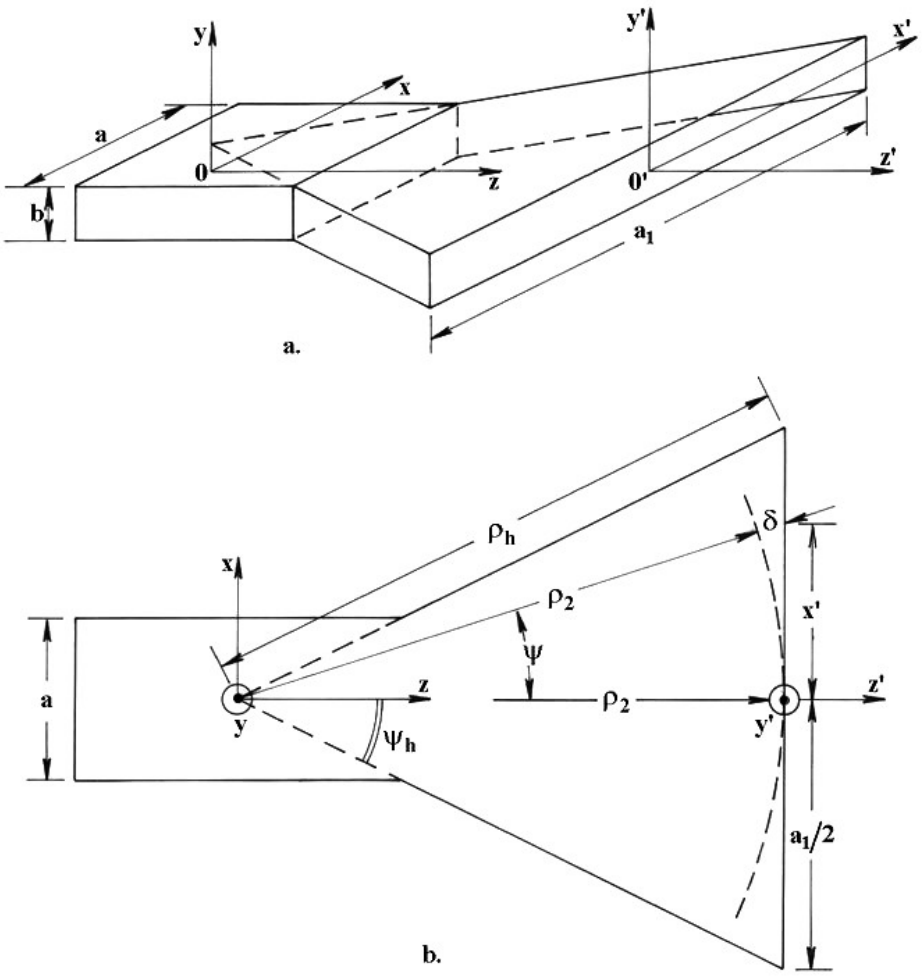



**Fig. 6.22 Horn sectorial H excitat cu modul dominant $TE_{10}$ :**
**a – vedere de ansamblu; b – secțiune longitudinală în planul H**

**1º. Câmpul în apertură.**

Detalierea acestui tip de horn este arătată în Fig. 6.22a, unde s-a presupus modul dominant $TE_{10}$; pentru calculul fazei câmpului în apertură ne vom referi la Fig. 6.22b.

Analiza este similară cu cea prezentată în secțiunea precedentă pentru hornul sectorial *E*; ținând cont de notațiile din Fig. 6.22b câmpul din apertură este descris de relațiile

$$E_y'(x',y') \cong E_0 \cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0\delta(x')} \tag{6.6.44}$$

$$H_x'(x',y') = E_y'(x',y')/Z_0 \cong (E_0/Z_0)\cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0\delta(x')} \tag{6.6.45}$$

$$H_z'(x',y') \cong j(\pi/ak_0 Z_0) E_0 \sin(\pi x'/a_1) e^{-jk_0\delta(x')} \tag{6.6.46}$$

unde

$$\delta(x') \cong \frac{1}{2}\left(\frac{x'^2}{\rho_2}\right);\ \rho_2 = \rho_h \cos\psi_h \tag{6.6.47}$$

iar $E_x' = 0,\ H_y' = 0,\ E_z' = 0$.

**2º. Câmpul radiat.**

Curenții echivalenți care constituie sursele sunt

$$\vec{J}_{ms} = \hat{i}\, J_{ms};\ \ J_{ms}(x',y') = E_0 \cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0\delta(x')} \tag{6.6.48}$$

$$\vec{J}_s = \hat{j}\, J_s;\ \ J_s(x',y') = (E_0/Z_0)\cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0\delta(x')} \tag{6.6.49}$$

În afara aperturii avem $\vec{J}_{ms} = 0\ \left(J_{msy} = 0,\ J_{msz} = 0\right)$ și $\vec{J}_s = 0\ \left(J_{sx} = 0,\ J_{sz} = 0\right)$. Urmează calculul mărimilor $N_{e\theta}, N_{e\phi}, L_{h\theta}$ și $L_{h\phi}$, apoi a câmpurilor $E_\theta$ și $E_\phi$ în zona depărtată; procedura este similară cu cea de la hornul sectorial *E*, dar nu identică. Ca exemplu vom calcula pe $N_{e\theta}$; avem [5]

$$N_{e\theta} = \int_{S_a} J_s \cos\theta \sin\phi\, e^{jk_0 r' \cos\psi}\, ds' = -\frac{E_0}{Z_0}\cos\theta \sin\phi\ [I_1 I_2] \tag{6.6.50}$$

unde

$$I_1 = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} e^{jk_0 y' \sin\theta \sin\phi}\, dy' = b\left[\frac{\sin((k_0 b/2)\sin\theta\sin\phi)}{(k_0 b/2)\sin\theta\sin\phi}\right] \tag{6.6.51}$$

$$I_2 = \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0[\delta(x') - x'\sin\theta\cos\phi]} dx' \tag{6.6.52}$$

Calculul integralei $I_2$ este mai complicat decât (6.6.14); se exprimă $\cos(\pi x'/a_1)$ sub forma unei sume de exponențiale, astfel în final se va obține

$$I_2 = I_2' + I_2'' \tag{6.6.53}$$

unde

$$I_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\rho_2}{k_0}\right)^{1/2} e^{j\left(k_x'^2 \rho_2/2k_0\right)}\left\{C\left(t_{2h}'\right) - C\left(t_{1h}'\right) - j\left[S\left(t_{2h}'\right) - S\left(t_{1h}'\right)\right]\right\} \tag{6.6.54}$$

în care s-a notat

$$t_{1h}' = \left(\frac{1}{\pi k_0 \rho_2}\right)^{1/2}\left(-\frac{k_0 a_1}{2} - k_x'\rho_2\right);\ \ t_{2h}' = \left(\frac{1}{\pi k_0 \rho_2}\right)^{1/2}\left(\frac{k_0 a_1}{2} - k_x'\rho_2\right) \tag{6.6.55}$$

$$k_x' = k_0 \sin\theta\cos\phi + \pi/a_1$$

iar $I_2^{''}$ va fi

$$I_2^{''} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\rho_2}{k_0}\right)^{1/2} e^{j\left(k_x^{''2}\rho_2/2k_0\right)}\left\{C\left(t_{2h}^{''}\right) - C\left(t_{1h}^{''}\right) - j\left[S\left(t_{2h}^{''}\right) - S\left(t_{1h}^{''}\right)\right]\right\} \tag{6.6.56}$$

în care s-a notat

$$t_{1h}^{''} = \left(\frac{1}{\pi k_0\rho_2}\right)^{1/2}\left(-\frac{k_0 a_1}{2} - k_x^{''}\rho_2\right);\quad t_{2h}^{''} = \left(\frac{1}{\pi k_0\rho_2}\right)^{1/2}\left(\frac{k_0 a_1}{2} - k_x^{''}\rho_2\right)$$
$$k_x^{''} = k_0 \sin\theta\cos\phi - \pi/a_1 \tag{6.6.57}$$

Mărimile $C(x)$ şi $S(x)$ sunt integrale Fresnel de *cosinus*, respectiv *sinus*.
Introducând (6.6.54) şi (6.6.56) în (6.6.53) şi apoi pe $I_1$ şi $I_2$ în (6.6.50) rezultă

$$N_{e\theta} = -\frac{E_0 b}{2Z_0}\left(\frac{\pi\rho_2}{k_0}\right)^{1/2}\left\{\cos\theta\sin\phi\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)\left[e^{jf_1}F\left(t_{1h}^{'}, t_{2h}^{'}\right) + e^{jf_2}F\left(t_{1h}^{''}, t_{2h}^{''}\right)\right]\right\} \tag{6.6.58}$$

în care s-a notat

$$f_1 = \frac{k_x^{'}\rho_2}{2k_0};\quad f_2 = \frac{k_x^{''}\rho_2}{2k_0};\quad Y = (k_0 b/2)\sin\theta\sin\phi \tag{6.6.59}$$

iar funcţiile $F\left(t_{1h}^{'}, t_{2h}^{'}\right)$ şi $F\left(t_{1h}^{''}, t_{2h}^{''}\right)$ sunt de forma (6.6.21).

Restul de mărimi $N_{e\phi}, L_{h\theta}, L_{h\phi}$ se determină în mod similar

$$N_{e\phi} = -\frac{E_0 b}{2Z_0}\left(\frac{\pi\rho_2}{k_0}\right)^{1/2}\left[\cos\theta\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)F_T(t_1, t_2)\right] \tag{6.6.60}$$

$$L_{h\theta} = \frac{E_0 b}{2}\left(\frac{\pi\rho_2}{k_0}\right)^{1/2}\left[\cos\theta\cos\phi\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)F_T(t_1, t_2)\right] \tag{6.6.61}$$

$$L_{h\phi} = -\frac{E_0 b}{2}\left(\frac{\pi\rho_2}{k_0}\right)^{1/2}\left[\sin\phi\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)F_T(t_1, t_2)\right] \tag{6.6.62}$$

în care s-a notat

$$F_T(t_1, t_2) = e^{jf_1}F\left(t_{1h}^{'}, t_{2h}^{'}\right) + e^{jf_2}F\left(t_{1h}^{''}, t_{2h}^{''}\right) \tag{6.6.63}$$

Câmpurile $E_\theta$ şi $E_\phi$ de zonă depărtată sunt

$$E_\theta = j\frac{E_0 b}{8}\left(\frac{k_0\rho_2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\left[\sin\phi(1+\cos\theta)\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)F_T(t_1, t_2)\right] \tag{6.6.64}$$

$$E_\phi = j\frac{E_0 b}{8}\left(\frac{k_0\rho_2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\left[\cos\phi(1+\cos\theta)\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)F_T(t_1, t_2)\right] \tag{6.6.65}$$

În planurile principale câmpurile $E_\theta$ şi $E_\phi$ capătă formele:

a) planul $\phi = \pi/2$ $(yOz)$

$$E_\theta = j\frac{E_0 b}{8}\left(\frac{k_0\rho_2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\left[(1+\cos\theta)\left(\frac{\sin Y}{Y}\right)F_T(t_1, t_2)\right] \tag{6.6.66}$$

iar $E_\phi = 0, E_r = 0$; mărimile $k_x^{'}, k_x^{''}$ şi $Y$ au expresiile simplificate

$$k_x^{'} = \pi/a_1\,;\ k_x^{''} = -\pi/a_1\,;\ Y = (k_0 b/2)\sin\theta \tag{6.6.67}$$

b) planul $\phi = 0\ \ (xOz)$

$$E_\phi = j\frac{E_0\, b}{8}\left(\frac{k_0\rho_2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{e^{-jk_0 r}}{r}\left[(1+\cos\theta)F_T(t_1,t_2)\right] \tag{6.6.68}$$

iar $E_\theta = 0,\ E_r = 0$; mărimile $k_x^{'}, k_x^{''}$ şi $Y$ capătă expresiile

$$k_x^{'} = k_0\sin\theta + \pi/a_1\,;\ k_x^{''} = k_0\sin\theta - \pi/a_1\,;\ Y = 0 \tag{6.6.69}$$

**3º. Directivitatea** $D_{0H}$**.**

Se va proceda similar ca la hornul sectorial *E*; relaţia de definiţie a directivităţii maxime este

$$D_{0H} = 4\pi\frac{P_\Omega(\theta,\phi)_{max}}{P_{rad}} \tag{6.3.14}$$

unde

$$P_{rad} = \frac{a_1 b}{4Z_0}|E_0|^2 \tag{6.6.70}$$

Intensitatea de radiaţie maximă pe direcţia $\theta = 0$ se defineşte prin relaţia (6.6.33); diferenţa constă în faptul că $|\vec{E}_\theta|_{max}$ şi $|\vec{E}_\phi|_{max}$ au expresii puţin diferite de hornul sectorial *E*. Astfel avem

$$|E_\theta|_{max} = |E_0|\frac{b}{4r}\left(\frac{2\rho_2}{\lambda_0}\right)^{1/2}\left|\sin\phi\ F_\theta(t)\right| \tag{6.6.71}$$

unde s-au utilizat notaţiile

$$F_\theta(t) = \left\{C\left(t_{2h}^{'}\right) + C\left(t_{2h}^{''}\right) - C\left(t_{1h}^{'}\right) - C\left(t_{1h}^{''}\right) - j\left[S\left(t_{2h}^{'}\right) + S\left(t_{2h}^{''}\right) - S\left(t_{1h}^{'}\right) - S\left(t_{1h}^{''}\right)\right]\right\} \tag{6.6.72}$$

iar $t_{1h}^{'}, t_{1h}^{''}, t_{2h}^{'}, t_{2h}^{''}$ sunt definiţi anterior; ultima relaţie poate fi scrisă sub formă compactă

$$F_\theta(t) = 2\{[C(u) - C(v)] - j[S(u) - S(v)]\} \tag{6.6.73}$$

unde s-au introdus notaţiile: $u = t_{2h}^{''} = -t_{1h}^{'},\ v = t_{1h}^{''} = -t_{2h}^{'}$ şi s-a ţinut seama de proprietăţile integralelor Fresnel $C(-t) = -C(t),\ S(-t) = -S(t)$.

În final se poate scrie

$$|E_\theta|_{max} = |E_0|\frac{b}{r}\left(\frac{\rho_2}{2\lambda_0}\right)^{1/2}\left|\sin\phi\ \{[C(u) - C(v)] - j[S(u) - S(v)]\}\right| \tag{6.6.74}$$

Similar, pentru $|E_\phi|_{max}$ avem

$$|E_\phi|_{max} = |E_0|\frac{b}{r}\left(\frac{\rho_2}{2\lambda_0}\right)^{1/2}\left|\cos\phi\ \{[C(u) - C(v)] - j[S(u) - S(v)]\}\right| \tag{6.6.75}$$

Expresia directivităţii maxime va fi

$$D_{0H} = \frac{4\pi b\rho_2}{a_1\lambda_0}\left\{[C(u) - C(v)]^2 + [S(u) - S(v)]^2\right\} \tag{6.6.76}$$

Pentru determinări practice se dau grafice de tipul celor din Fig. 6.23a,b. De asemenea, sunt propuse relaţii simplificate (aproximative) de calcul, după cum urmează: se introduce mărimea

$$B_H = \frac{a_1}{\lambda_0}\left(\frac{50}{\rho_h/\lambda_0}\right)^{1/2} \tag{6.6.77}$$

şi se determină câştigul $G_H$ pe graficul din Fig. 6.23b; dacă $B_H < 2$ atunci $G_H$ se calculează după relaţia simplificată $G_H = (32\,B_H/\pi)$; directivitatea maximă $D_{0H}$ se calculează utilizând expresia

$$D_{0H} = \frac{b}{\lambda_0}\frac{G_H}{(50\lambda_0/\rho_h)^{1/2}} \tag{6.6.78}$$

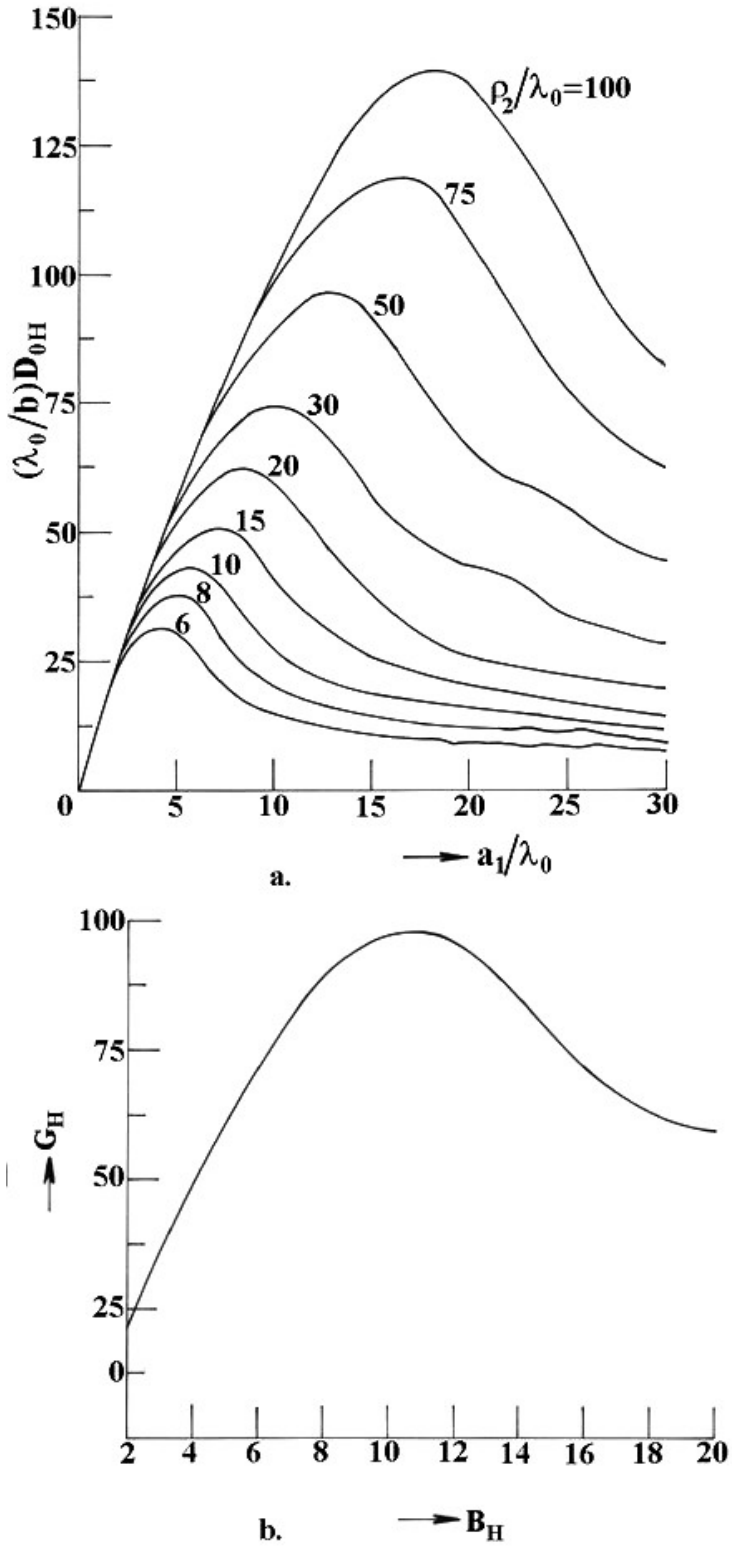
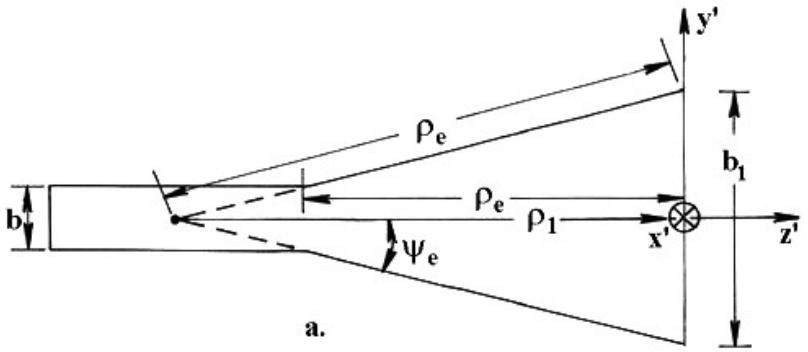


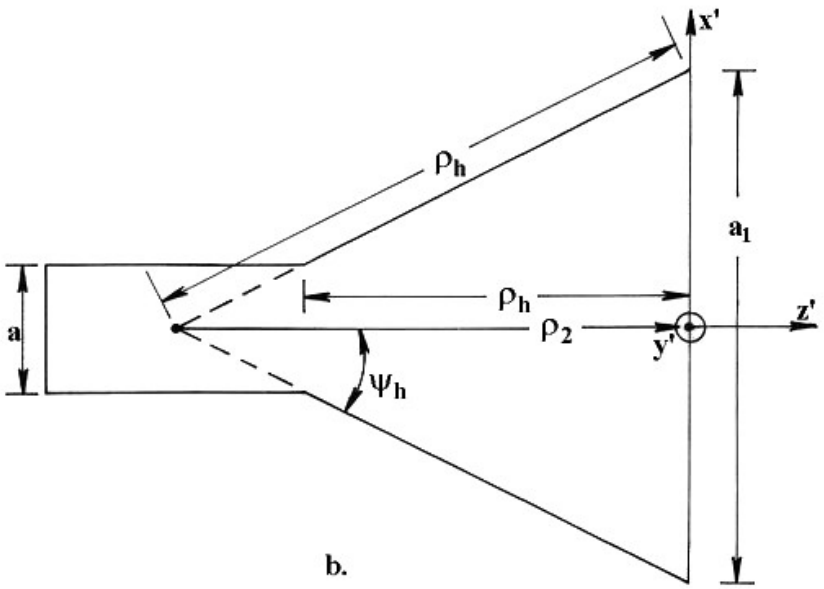

**Fig. 6.23 Directivitatea normată pentru hornul sectorial H [5]: a – în funcţie de dimensiunile aperturii şi de lungimea hornului; b – variaţia câştigului $G_H$ în funcţie de mărimea $B_H$**

### 6.6.3. Antene horn piramidal

**1º. Câmpul în apertură.**

Acest tip de antenă prezintă deschideri atât pe direcția $y'$ (Fig. 6.24a) cât şi pe direcția $x'$ (Fig. 6.24b), rezultând astfel structura clasică din Fig. 6.24c; caracteristicile de radiație ale hornului piramidal reprezintă în esență combinația caracteristicilor hornului sectorial $E$ şi a hornului sectorial $H$.



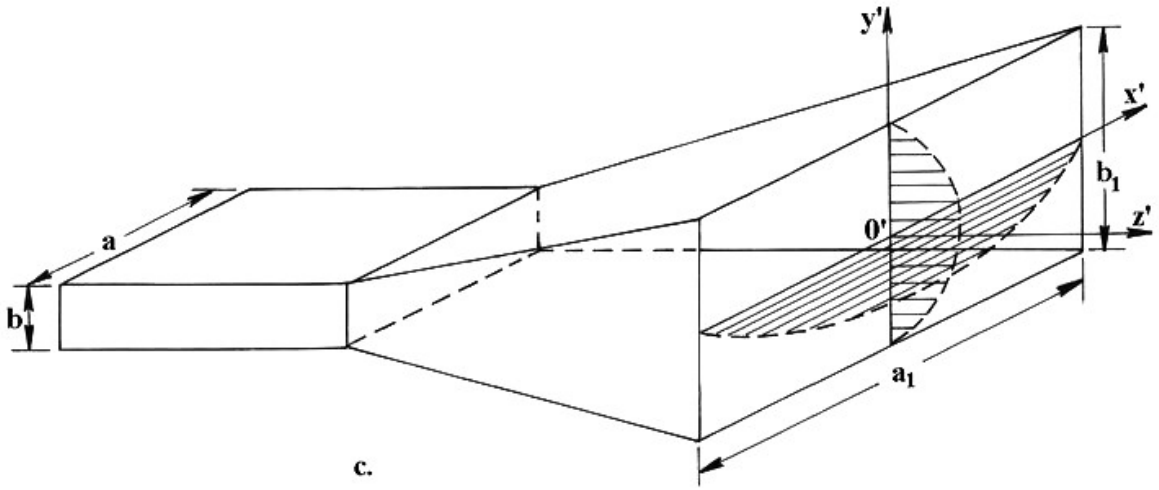




**Fig. 6.24 Antenă horn piramidal: a – secțiune longitudinală în plan E; b - secțiune longitudinală în plan H; c – vedere de ansamblu**

Admițând că în ghidul de alimentare este prezent modul dominant $TE_{10}$, componentele tangențiale ale câmpului în apertură sunt

$$E_y'(x',y') \cong E_0 \cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0[\delta(y')+\delta(x')]} \tag{6.6.79}$$

$$H_x'(x',y') \cong -(E_0/Z_0)\cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0[\delta(y')+\delta(x')]} \tag{6.6.80}$$

unde

$$\begin{aligned} &\delta(y') \cong y'^2/2\rho_1, \quad \delta(x') \cong x'^2/2\rho_2 \\ &\rho_1 = \rho_e \cos\psi_e, \qquad \rho_2 = \rho_h \cos\psi_h \end{aligned} \tag{6.6.81}$$

Pe Fig. 6.24a,b sunt marcate mărimile $p_e$ şi $p_h$ care au expresiile

$$p_e = (b_1 - b)\left[(\rho_e/b_1)^2 - 1/4\right]^{1/2}; \quad p_h = (a_1 - a)\left[(\rho_h/a_1)^2 - 1/4\right]^{1/2} \tag{6.6.82}$$

**2º. Câmpul radiat.**

Câmpurile din zona depărtată au drept surse curenți echivalenți $J_s$ şi $J_{ms}$ care au expresiile

$$J_{ms}(x',y') = E_0 \cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0[\delta(y')+\delta(x')]}; \quad \vec{J}_{ms} = \hat{i}\, J_{ms} \tag{6.6.83}$$

$$J_s(x',y') = -(E_0/Z_0)\cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0[\delta(y')+\delta(x')]}; \quad \vec{J}_s = -\hat{j}\, J_s \tag{6.6.84}$$

Mărimile $N_{e\theta}$, $N_{e\phi}$, $L_{h\theta}$, $L_{h\phi}$ au expresiile

$$N_{e\theta} = -(E_0/Z_0)\cos\theta \sin\phi \; [I_1 I_2] \tag{6.6.85}$$

$$N_{e\phi} = -(E_0/Z_0)\cos\phi \; [I_1 I_2] \tag{6.6.86}$$

$$L_{h\theta} = E_0 \cos\theta \cos\phi \; [I_1 I_2] \tag{6.6.87}$$

$$L_{h\phi} = -E_0 \sin\phi \; [I_1 I_2] \tag{6.6.88}$$

în care integralele $I_1$ şi $I_2$ vor reprezenta combinații ale integralelor prezentate la hornul sectorial *E* şi la hornul sectorial *H*; avem

$$I_1 = \int_{-a_1/2}^{a_1/2} \cos(\pi x'/a_1) e^{-jk_0\left[x'^2/2\rho_2 - x'\sin\theta\cos\phi\right]} dx' \tag{6.6.89}$$

$$I_2 = \int_{-b_1/2}^{b_1/2} e^{-jk_0\left[y'^2/2\rho_1 - y'\sin\theta\sin\phi\right]} dy' \tag{6.6.90}$$

Ținând cont de calculele efectuate pentru hornurile sectoriale *E* şi *H*, se obține

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\rho_2}{k_0}\right)^{1/2} \Big\{ & e^{j\left(k_x'^2\rho_2/2k_0\right)}\left[\left(C(t_2') - C(t_1')\right) - j\left(S(t_2') - S(t_1')\right)\right] + \\ & + e^{j\left(k_x'^2\rho_2/2k_0\right)}\left[\left(C(t_2'') - C(t_1'')\right) - j\left(S(t_2'') - S(t_1'')\right)\right] \Big\} \end{aligned} \tag{6.6.91}$$

unde $t_1', t_2', k_x'$ sunt definiți în (6.6.55) iar $t_1'', t_2'', k_x''$ în (6.6.57); în mod similar avem

$$I_2 = \left(\frac{\pi\rho_1}{k_0}\right)^{1/2} e^{j\left(k_y'^2\rho_1/2k_0\right)} \left\{\left[C(t_2) - C(t_1)\right] - j\left[S(t_2) - S(t_1)\right]\right\} \tag{6.6.92}$$

unde $t_1, t_2$ sunt definiți în (6.6.18), iar $k_y = k_0 \sin\theta \sin\phi$.

Câmpurile $E_\theta$ şi $E_\phi$ din zona depărtată au expresiile

$$E_\theta = \frac{-jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\left(L_{h\phi} + Z_0\, N_{e\theta}\right) = \frac{jk_0\, E_0\, e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\left\{\sin\phi\left(1+\cos\theta\right)\left[I_1 I_2\right]\right\} \qquad (6.6.93)$$

$$E_\phi = \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\left(L_{h\theta} - Z_0\, N_{e\phi}\right) = \frac{jk_0\, E_0\, e^{-jk_0 r}}{4\pi r}\left\{\cos\phi\left(1+\cos\theta\right)\left[I_1 I_2\right]\right\} \qquad (6.6.94)$$

Examinarea ultimelor două relaţii permite formularea câtorva observaţii utile: exceptând un factor de normare, câmpul hornului piramidal din planul principal $\phi = \pi/2\ (yOz)$ este identic cu cel al hornului sectorial *E* în acelaşi plan; de asemenea, câmpul hornului piramidal din planul principal $\phi = 0\ (xOz)$ este identic cu cel al hornului sectorial *H* în acelaşi plan.

Exemple de diagrame de radiaţie în cele două plane principale sunt arătate în Fig. 6.25, unde s-au considerat valorile: $a = \lambda_0/2$, $a_1 = 12\lambda_0$, $b = \lambda_0/4$, $b_1 = 6\lambda_0$, iar $\rho_1 = \rho_2 = 6\lambda_0$. Datorită erorilor de fază maximele diagramei de radiaţie pot să nu coincidă cu axa $z\ (\theta = 0)$; de asemenea hornul trebuie realizat constructiv astfel încât să avem $p_e = p_h$. Trebuie observat că hornul piramidal are diagrame de radiaţie suficient de înguste în ambele plane principale.

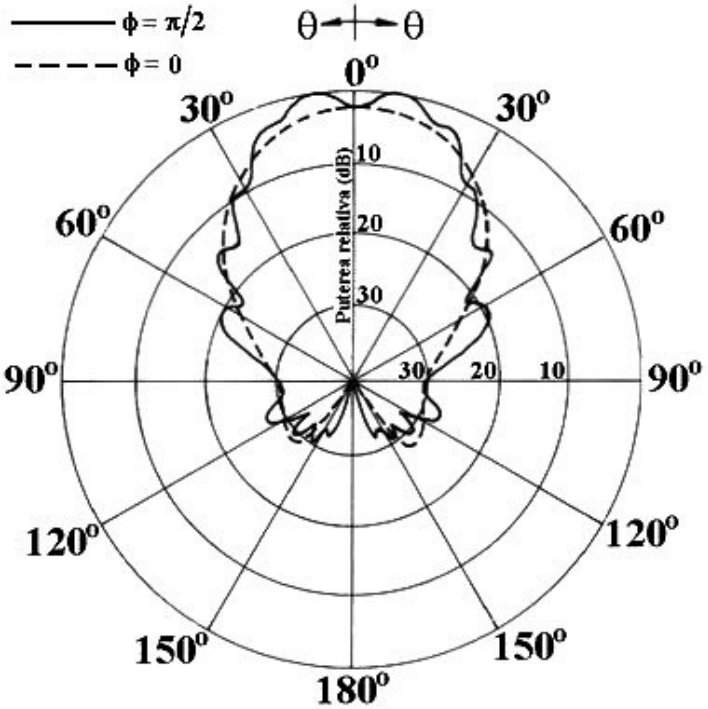



**Fig. 6.25 Diagrame de directivitate ale hornului piramidal în planele principale E ($\phi = \pi/2$) şi H ($\phi = 0$)**

**3º. Directivitatea $D_{0P}$.**

Relaţia de definiţie a directivităţii maxime este

$$D_{0P} = 4\pi \frac{P_\Omega(\theta,\phi)_{max}}{P_{rad}} \qquad (6.6.95)$$

unde

$$P_{rad} = \frac{1}{2} Re \int_{S_a} \left(\vec{E}'_y \times \vec{H}'^{*}_x\right) \cdot d\vec{s}\,' = \left|E_0\right|^2 \frac{a_1 b_1}{4 Z_0} \qquad (6.6.96)$$

iar $P_\Omega(\theta,\phi)_{max}$ are expresia (6.6.33) în care

$$\left|\vec{E}\right|_{max} = \left[\left|E_\theta\right|^2_{max} + \left|E_\phi\right|^2_{max}\right]^{1/2} \qquad (6.6.97)$$

Ținând cont de expresiile (6.6.93), (6.6.94) şi (6.6.85)÷(6.6.88) avem

$$|E_\theta|_{max} = |E_0 \sin\phi| \frac{(\rho_1\rho_2)^{1/2}}{r} \left\{ [C(u)-C(v)]^2 + [S(u)-S(v)]^2 \right\} 1/2 \times \\ \times \left\{ C^2 \left[ b_1 / (2\rho_1\lambda_0)^{1/2} \right] + S^2 \left[ b_1 / (2\rho_1\lambda_0)^{1/2} \right] \right\}^{1/2} \tag{6.6.98}$$

$$|E_\phi|_{max} = |E_0 \cos\phi| \frac{(\rho_1\rho_2)^{1/2}}{r} \left\{ [C(u)-C(v)]^2 + [S(u)-S(v)]^2 \right\}^{1/2} \times \\ \times \left\{ C^2 \left[ b_1 / (2\rho_1\lambda_0)^{1/2} \right] + S^2 \left[ b_1 / (2\rho_1\lambda_0)^{1/2} \right] \right\}^{1/2} \tag{6.6.99}$$

iar $P_\Omega(\theta,\phi)_{max}$ va fi

$$P_\Omega(\theta,\phi)_{max} = \frac{r^2}{2Z_0} \left| \vec{E} \right|^2_{max} = \frac{\rho_1\rho_2 |E_0|^2}{2Z_0} \left\{ [C(u)-C(v)]^2 + [S(u)-S(v)]^2 \right\}^{1/2} \times \\ \times \left\{ C^2 \left[ b_1 / (2\rho_1\lambda_0)^{1/2} \right] + S^2 \left[ b_1 / (2\rho_1\lambda_0)^{1/2} \right] \right\}^{1/2} \tag{6.6.100}$$

unde mărimile $u$ şi $v$ au fost definite anterior (după relația (6.6.73)).

Directivitatea hornului piramidal se poate scrie sub forma

$$D_{0P} = \frac{8\pi\rho_1\rho_2}{a_1 b_1} \left\{ [C(u)-C(v)]^2 + [S(u)-S(v)]^2 \right\} \left\{ C^2 \left[ \frac{b_1}{(2\rho_1\lambda_0)^{1/2}} \right] + S^2 \left[ \frac{b_1}{(2\rho_1\lambda_0)^{1/2}} \right] \right\} \tag{6.6.101}$$

Această ultimă expresie se poate pune într-o formă condensată

$$D_{0P} = \frac{\pi\lambda_0^2}{32ab} D_{0E} D_{0H} \tag{6.6.102}$$

Ultima expresie permite ca în practică să poată fi utilizate unele relații simplificate (aproximative); dacă sunt cunoscute mărimile $a_1, b_1, \rho_e, \rho_h$ şi lungimea de undă $\lambda_0$, se urmăreşte procedura de la hornurile sectoriale *E* şi *H*. Se determină mărimile $G_E$ şi $G_H$ pe graficele din Fig. 6.21b şi Fig. 6.23b; dacă $B_E$ şi $B_H$ sunt mai mici decât 2 se vor utiliza relații de forma

$$G_E = (32\, B_E/\pi), \quad G_H = (32\, B_H/\pi); \tag{6.6.103}$$

în final, ținând cont de (6.6.43) şi (6.6.78) avem

$$D_{0P} = \frac{G_E G_H}{\left(\frac{32}{\pi}\right)\left(\frac{50\lambda_0}{\rho_e}\right)^{1/2}\left(\frac{50\lambda_0}{\rho_h}\right)^{1/2}} = \frac{\pi\lambda_0^2}{32ab} D_{0E} D_{0H} \tag{6.6.104}$$

în care $G_E$ şi $G_H$ sunt câştigurile pentru hornurile sectoriale *E*, respectiv *H*.

## 6.7. ANTENE MICROSTRIP

### 6.7.1. Antene microstrip rectangulare

**1º. Câmpul în aperturi.**

Structura fizică uzuală a antenei microstrip rectangulare este schițată în Fig. 6.26: pe o placă metalică este depus mai întâi substratul dielectric de permitivitate $\varepsilon_1$ iar deasupra se depune o placă metalică dreptunghiulară (patch) care defineşte dimensiunile propriu-zise ale antenei. Datorită

dimensiunilor mici, a greutății foarte mici şi a uşurinței de realizare, antenele microstrip au căpătat o largă răspândire în echipamentele de microunde performante.

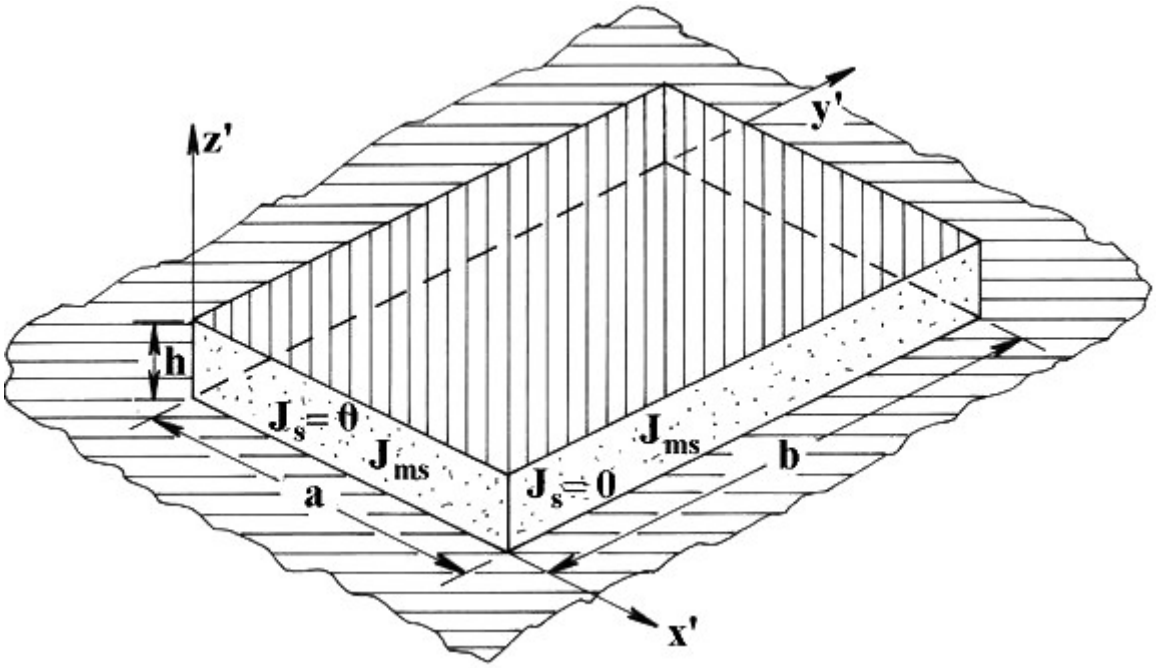



**Fig. 6.26 Structura antenei microstrip dreptunghiulare**

Pentru analiza structurii din Fig. 6.26 ca element de radiație sunt utilizate de regulă două modele: modelul de linie de transmisie şi modelul cavității rezonante. În această secțiune se va utiliza modelul de cavitate rezonantă studiată în § 5.7, care presupune că cavitatea este mărginită de doi pereți electrici perfecți, inferior şi superior, şi de patru pereți magnetici perfecți laterali. Din condițiile la limită pe pereții metalici $\vec{E}\times\hat{k}=0,\ \vec{H}\cdot\hat{k}=0$ şi cele de pe pereții magnetici laterali $\vec{H}\times\hat{n}=0,\ \vec{E}\cdot\hat{n}=0$ rezultă anularea componentelor $E_x, E_y$ şi $H_z$; astfel modurile de oscilație preponderente vor fi de tipul $TM^z$. Aşa cum este arătat în Fig. 6.26, aperturile care pot radia sunt constituite din cei patru pereți laterali ai cavității.

Determinarea câmpului în interiorul cavității şi pe pereții laterali se va efectua plecând de la ecuația tridimensională

$$\left[\nabla^2 + k_r^2\right] E_z(x', y', z') = 0; \tag{6.7.1}$$

prin aplicarea condițiilor la limită adecvate se obține o soluție similară cu (5.7.9)

$$E_z(x', y', z') = E_0 \cos(k_x x')\cos(k_y y')\cos(k_z z') \tag{6.7.2}$$

unde

$$k_r^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \tag{6.7.3}$$

este numărul de undă de rezonanță; $k_x = m\pi/a,\ k_y = n\pi/b,\ k_z = p\pi/h$. Se observă că pentru reprezentarea câmpurilor din interiorul cavității s-a utilizat sistemul de coordonate cartesian $(x', y', z')$.

Având în vedere că la majoritatea structurilor microstrip grosimea substratului dielectric este foarte mică avem $h << \lambda_0$ $(0{,}005\lambda_0 < h < 0{,}05\lambda_0)$; se poate aproxima că componentele de câmp nu variază după direcția $z$, adică $\partial(E,H)/\partial z = 0$, prin urmare se va lua $p = 0$. Componentele magnetice de interes $H_x(x', y')$ şi $H_y(x', y')$ se pot determina cu ajutorul lui $E_z(x', y')$ utilizând o relație de forma (5.7.8), obținându-se în final expresiile

$$E_z(x',y') = E_0 \cos(k_x x')\cos(k_y y') \tag{6.7.4}$$

$$H_x(x',y') = \frac{j\omega_r \varepsilon_1 k_y}{k_\lambda^2} E_0 \cos(k_x x')\sin(k_y y') \tag{6.7.5}$$

$$H_y(x',y') = \frac{-j\omega_r \varepsilon_1 k_x}{k_\lambda^2} E_0 \sin(k_x x')\cos(k_y y') \tag{6.7.6}$$

care sunt similare cu (5.7.13)÷(5.7.15), iar $\omega_r = k_r / (\mu_0 \varepsilon_1)^{1/2}$ şi $k_\lambda^2 = k_x^2 + k_y^2$.

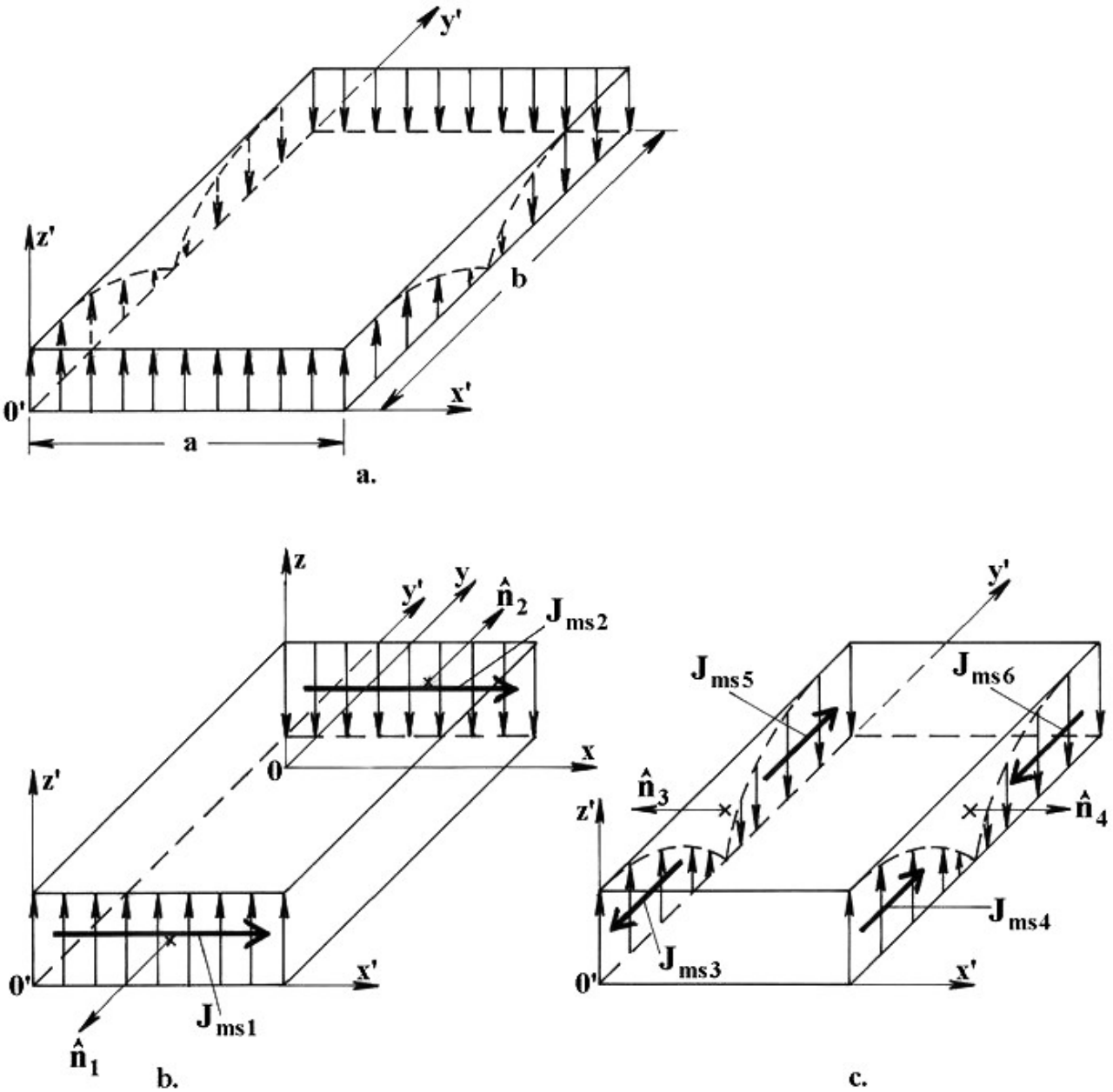



**Fig. 6.27 Configurații de câmp electric ale modului $TM_{010}$ (a < b) în antena microstrip dreptunghiulară: a – vedere generală; b – ilustrarea surselor radiante $J_{ms1}$ şi $J_{ms2}$ ; c – ilustrarea surselor neradiante**

Câteva moduri de oscilație sunt reprezentate în Fig. 5.26 şi 5.27 din Cap. 5. În aplicațiile curente se consideră modurile dominante (fundamentale) de oscilație, cu frecvența cea mai joasă: dacă $a > b$ acest mod va fi $TM_{100}^z$; dacă $a < b$ acest mod va fi $TM_{010}^z$. În continuare vom considera structura cu $a < b$ astfel modul dominant este $TM_{010}^z$ descris de relațiile

$$E_z(x',y') = E_0 \cos(\pi y'/b) \tag{6.7.7}$$

$$H_x(x',y') = j\, H_0 \sin(\pi y'/b) \tag{6.7.8}$$

în care s-a notat $H_0 = E_0/Z$, $Z = (\mu_0/\varepsilon_1)^{1/2}$. Acest mod de oscilație este reprezentat în Fig. 6.27a. La această distribuție de câmp sunt necesare câteva considerente asupra curenților echivalenți care pot constitui surse de radiație. Curenții de pe suprafața metalică superioară $I_{c1}$ sunt foarte mici față de curentul de pe placa metalică inferioară $I_{c2}$, astfel $I_{c1}$ de regulă se neglijează; de asemenea $I_{c2}$, având un caracter difuz, nu constituie o sursă radiantă în cadrul modelului adoptat. Singurii curenți echivalenți care constituie surse de radiație sunt curenții $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$ pe pereții laterali (aperturi). În cadrul modelului de perete magnetic componentele tangențiale ale câmpului magnetic sunt foarte mici (la peretele magnetic ideal aceste componente sunt zero), astfel curentul echivalent electric $\vec{J}_s$ este foarte mic şi de regulă se neglijează. Prin urmare singurele surse radiante sunt curenții magnetici $\vec{J}_{ms}$ pe cele patru fețe laterale ale structurii rectangulare din Fig. 6.26. Însă din Fig. 6.27a este evident că numai curenții echivalenți de pe pereții laterali $y'=0$ şi $y'=b$ sunt radianți; acest fapt este ilustrat în Fig. 6.27b, care va constitui structura de referință pentru determinarea câmpurilor radiate în zona Fraunhofer. Curenții echivalenți de pe pereții laterali $x'=0$ şi $x'=a$ sunt neradianți deoarece, aşa cum rezultă din Fig. 6.27c, pe fiecare perete există câte doi curenți de sens opus, astfel câmpul radiat în planul principal $\phi = \pi/2$ este zero; de asemenea curenții de pe un perete, de exemplu $x'=0$, sunt în opoziție de fază față de curenții de pe celălalt perete, în cazul nostru $x'=a$, astfel câmpul radiat în planul principal $\phi = 0$ este zero.

**2º. Câmpul radiat în zona Fraunhofer.**

Ne oprim asupra aperturilor radiante din Fig. 6.27b în care este specificat sistemul de coordonate $(x,y,z)$ cu originea în centrul de simetrie al structurii. Având în vedere că structura este depusă pe un plan conductor presupus infinit, sunt necesare precizări asupra valorii curentului echivalent $\vec{J}_{ms}$. Relația de definiție este $\vec{J}_{ms} = -\hat{n}\times\vec{E}_a$, unde $E_a$ este componenta tangențială a câmpului în apertură; întrucât grosimea substratului este foarte mică trebuie luat în considerare şi curentul imagine, astfel curentul echivalent se dublează

$$\vec{J}_{ms} = -2\hat{n}\times\vec{E}_a = 2\,\vec{E}_a\times\hat{n} \tag{6.7.9}$$

prin urmare avem

$$\begin{aligned} \vec{J}_{ms1}(y'=0) &= -2\hat{n}_1\times\vec{E}_a = \hat{i}\,2\,E_z(x',0) \\ \vec{J}_{ms2}(y'=b) &= -2\hat{n}_2\times\vec{E}_a = \hat{i}\,2\,E_z(x',b) \end{aligned} \tag{6.7.10}$$

unde $E_z(x',y')$ are expresia (6.7.7). Rezultă că structura fizică din Fig. 6.26 este echivalentă cu două surse. În construcțiile practice distanța dintre cei doi curenți, $\vec{J}_{ms1}$ şi $\vec{J}_{ms2}$, se ia $b \cong \lambda_\varepsilon/2$, unde $\lambda_\varepsilon$ este lungimea de undă în substrat $(\lambda_\varepsilon = \lambda_r = 2\pi/k_r)$; se poate considera că cele două aperturi radiante sunt separate printr-o linie de transmisie microstrip de impedanță joasă şi de lungime $b \cong \lambda_\varepsilon/2$ care acționează ca un transformator, astfel influența reciprocă este neglijabilă.

Pentru calculul câmpului în zona Fraunhofer ne referim la Fig. 6.28, unde originea este fixată în centrul de simetrie al structurii $(a/2, b/2, 0)$; curenții sursă, localizați la distanțele $-b/2$ şi $b/2$ față de origine, sunt considerați foarte subțiri (filamentari) şi de lungime $a$. Există două procedee de calcul a câmpului în zona depărtată: se calculează separat câmpurile date de către fiecare curent şi apoi se adună (vectorial); se calculează câmpul dat de o singură sursă, iar câmpul rezultant se obține prin utilizarea factorului de rețea (curenții $\vec{J}_{ms1}$ şi $\vec{J}_{ms2}$ au acelaşi sens şi sunt de amplitudini egale).

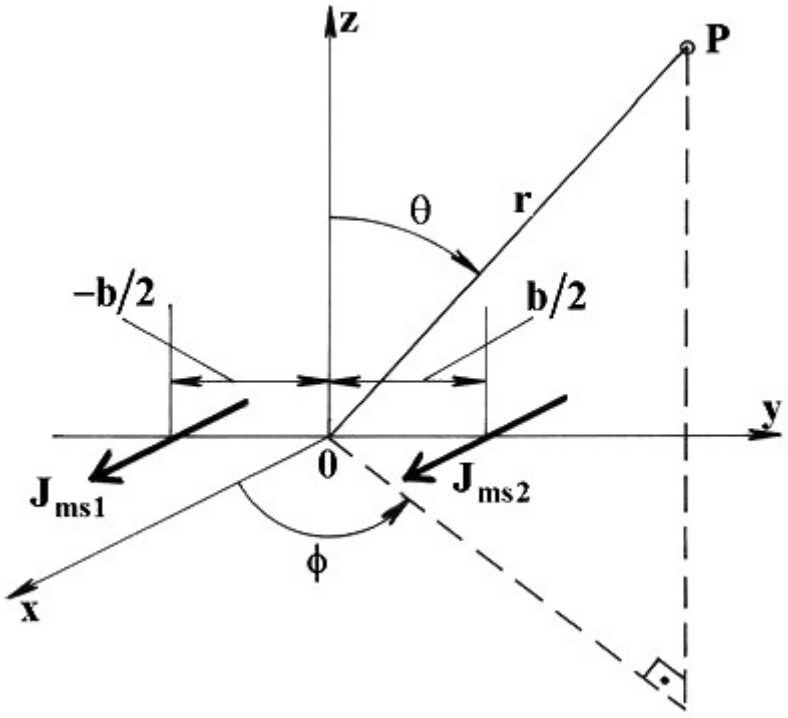



**Fig. 6.28 Localizarea surselor radiante în raport cu sistemul de coordonate**

Sub formă generală se folosesc relațiile obținute de radiația de la apertură, făcând particularizările necesare. Câmpurile $E_\theta$ şi $E_\phi$ pot fi determinate după expresiile generale (6.5.9) şi (6.5.10), în care $N_{e\theta}$ şi $N_{e\phi}$ sunt zero; la rândul lor mărimile $L_{h\theta}$ şi $L_{h\phi}$ (numite de către unii autori vectori Schelkunoff) se determină pe baza relațiilor de forma (6.5.15) în care se pune $\vec{r}'\cdot\hat{r} = x'\sin\theta\cos\phi$. Similar cu (6.5.21) şi (6.5.23), în cazul structurii din Fig. 6.27b şi a sistemului de coordonate arătat în Fig. 6.28, avem

$$L_{h\theta} = 2ah\,E_0\left[\cos\theta\sin\phi\left(\frac{\sin X}{X}\right)\left(\frac{\sin Z}{Z}\right)\right] \tag{6.7.11}$$

$$L_{h\phi} = -2ah\,E_0\left[\cos\phi\left(\frac{\sin X}{X}\right)\left(\frac{\sin Z}{Z}\right)\right] \tag{6.7.12}$$

unde

$$X = (k_0 a/2)\sin\theta\sin\phi,\quad Z = (k_0 h/2)\sin\theta\cos\phi \tag{6.7.13}$$

având în vedere că $k_0 h \to 0$, avem $(\sin Z/Z) \to 1$, astfel acest termen va dispărea din expresiile mărimilor $L_{h\theta}$ şi $L_{h\phi}$.

Pentru a lua în considerare prezența a două surse situate în punctele $y_1 = -b/2$ şi $y_2 = b/2$, se introduce *factorul de rețea FR* care are expresia

$$(FR)_y = 2\cos[(k_0\,b/2)\sin\theta\cos\phi] \tag{6.7.14}$$

În final se obține [12]

$$E_\theta = \frac{-jk_0 h\,E_0\,ae^{-jk_0 r}}{\pi r}\left(\frac{\sin X}{X}\right)\cos[(k_0\,b/2)\sin\theta\cos\phi]\cos\phi \tag{6.7.15}$$

$$E_\phi = \frac{jk_0 h\,E_0\,ae^{-jk_0 r}}{\pi r}\left(\frac{\sin X}{X}\right)\cos[(k_0\,b/2)\sin\theta\cos\phi]\cos\theta\sin\phi \tag{6.7.16}$$

Ca urmare a fenomenului de scăpări ale liniilor de câmp electric pe pereții laterali ai structurii, în calcule de precizie se utilizează relații de corecție pentru permitivitatea relativă şi dimensiunile $a$ şi $b$. În cazul $h << a,b$, din (5.7.29) se poate aproxima $\varepsilon_{ref} \cong \varepsilon_r$; formulele de corecție pentru dimensiuni sunt relativ complicate, aşa cum rezultă din (5.7.30) sau (5.7.31). Totuşi, s-a constatat că într-o multitudine de situații se pot utiliza formule de corecție simple [2]

$$a_{ef} = a + h/2, \quad b_{ef} = b + h/2 \tag{6.7.17}$$

care oferă rezultate ce concordă acceptabil cu măsurătorile experimentale.

În general, antenele microstrip au directivități de valori mici; considerând un singur element (patch), în Fig. 6.29 sunt reprezentate două curbe de variație a directivității în funcție de diferite mărimi [12]. Se observă că directivitatea creşte cu dimensiunea $a$ a peretelui radiant, atât timp cât modul de oscilație rămâne $TM^z_{010}$; totodată se constată că creşterea grosimii substratului conduce la o uşoară micşorare a directivității datorită unor fenomene distructive de interferență între curenții $J_{ms1}$, $J_{ms2}$ şi curenții imagine din placa de masă.

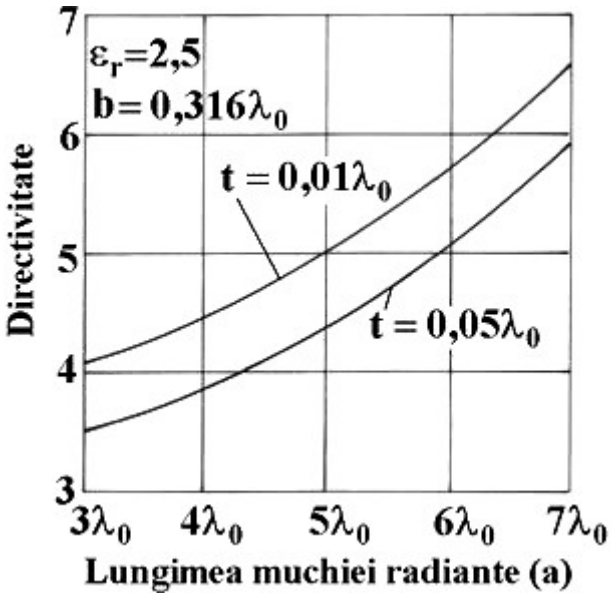



**Fig. 6.29 Curbe de variație ale directivității antenei microstrip dreptunghiulare**

## 6.7.2. Generalizare

În lucrarea [2] sunt prezentate expresii generale ale componentelor de câmp $E_\theta$ şi $E_\phi$ pentru $m$ şi $n$ oarecare. Ținând cont de expresiile (6.7.4) şi (6.7.9), curenții echivalenți magnetici (fără imagini) sunt definiți prin relațiile

$$\begin{aligned}
\vec{E}_z \times \hat{n}\big|_{y'=0} &= \hat{i}\, E_0 \cos(m\pi x'/a) \\
\vec{E}_z \times \hat{n}\big|_{y'=b} &= \hat{i}\left[-(-1)^n E_0 \cos(m\pi x'/a)\right] \\
\vec{E}_z \times \hat{n}\big|_{x'=0} &= \hat{j}\left[-E_0 \cos(n\pi y'/b)\right] \\
\vec{E}_z \times \hat{n}\big|_{x'=a} &= \hat{j}\left[(-1)^m E_0 \cos(n\pi y'/b)\right]
\end{aligned} \tag{6.7.18}$$

Notăm

$$\begin{aligned}
\hat{r} \cdot \vec{r}' &= x' \sin\theta\cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi \\
\hat{\theta} \cdot \left(\vec{E}_z \times \hat{n}\right) &= E_x \cos\theta\cos\phi + E_y \cos\theta \sin\phi \\
\hat{\phi} \cdot \left(\vec{E}_z \times \hat{n}\right) &= -E_x \sin\phi + E_y \cos\phi
\end{aligned} \tag{6.7.19}$$

Expresiile generale ale componentelor de câmp în zona Fraunhofer sunt

$$E_\theta = -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{2\pi r}\int_{S_a} \hat{\phi}\cdot\left(\vec{E}_z \times \hat{n}\right) e^{jk_0 \vec{r}'\cdot\hat{r}}\, ds' \tag{6.7.20}$$

$$E_\phi = \frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{2\pi r}\int_{S_a} \hat{\theta}\cdot\left(\vec{E}_z \times \hat{n}\right) e^{jk_0 \vec{r}'\cdot\hat{r}}\, ds' \tag{6.7.21}$$

Introducând (6.7.18) şi (6.7.19) în ultimele două expresii rezultă

$$E_\theta = -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{2\pi r} h\, E_0\left[-f_1 \sin\phi + f_2 \cos\varphi\right] \tag{6.7.22}$$

$$E_\phi = -\frac{jk_0 e^{-jk_0 r}}{2\pi r} h\, E_0\left[f_1 \cos\theta\cos\phi + f_2 \cos\theta \sin\varphi\right] \tag{6.7.23}$$

unde s-a ținut cont de curenții imagine şi s-au folosit notațiile

$$f_1 = \left[1-(-1)^n e^{jk_0 b \sin\theta \sin\phi}\right]\int_0^a \cos(m\pi x'/a) e^{jk_0 x' \sin\theta\cos\phi}\, dx' \tag{6.7.24}$$

$$f_2 = \left[1-(-1)^m e^{jk_0 a \sin\theta\cos\phi}\right]\int_0^b \cos(n\pi y'/b) e^{jk_0 y' \sin\theta\sin\phi}\, dy' \tag{6.7.25}$$

### 6.7.3. Antene microstrip circulare

Structura generală a acestui tip de antenă este schițată în Fig. 6.30. Pentru determinarea câmpului din interiorul structurii se utilizează coordonatele cilindrice, pe care le vom nota $(\rho,\phi',z)$, cu copul de a face distincție de coordonatele polare $(r,\theta,\phi)$, care definesc punctul de observație în zona depărtată. Adoptăm modelul cavității rezonante (pereți electrici inferiori şi superiori şi perete magnetic lateral la $\rho = a$), expresia câmpului electromagnetic de interes este dată de (5.7.2); având în vedere că înălțimea $h$ este foarte mică în comparație cu lungimea de undă, modul de oscilație este de tipul $TM^z$.

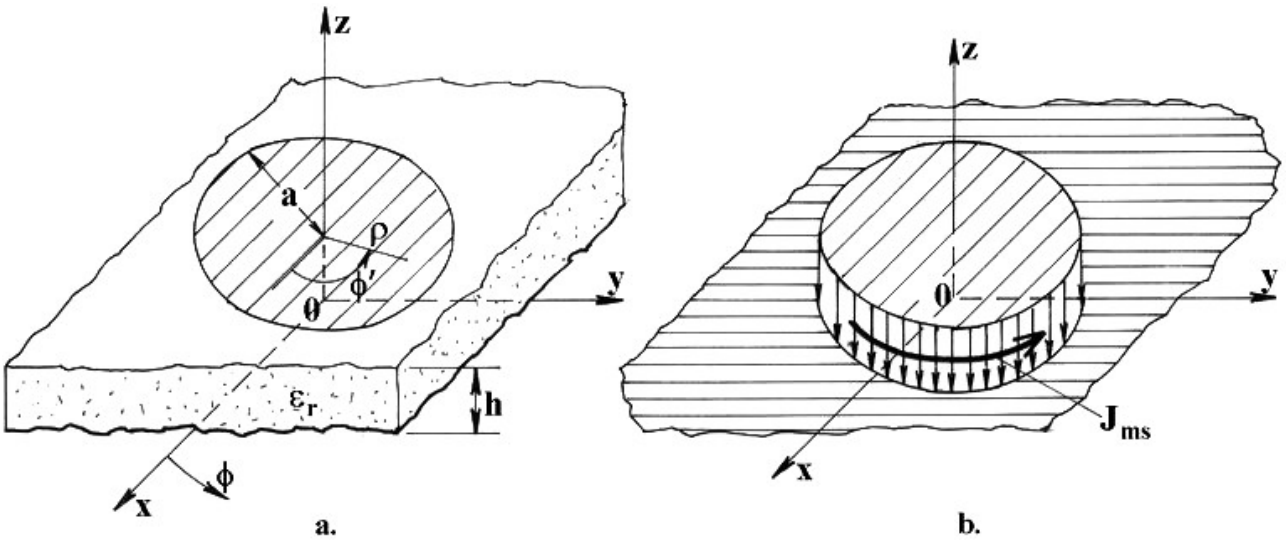



**Fig. 6.30 Antenă microstrip circulară: a – structură fizică;**
**b – modelul de antenă buclă parcursă de curent magnetic constant**

Componentele de câmp au expresiile (deoarece $h << \lambda_0$ se ia $p = 0$)

$$E_z(\rho,\phi',z)=E_0 J_n(k_\lambda\rho)\cos n\phi'$$
$$H_\rho(\rho,\phi',z)=-\frac{j\omega_r\varepsilon_1}{k_\lambda^2}\frac{n}{\rho}E_0 J_n(k_\lambda\rho)\sin n\phi' \qquad (6.7.26)$$
$$H_\phi(\rho,\phi',z)=-\frac{j\omega_r\varepsilon_1}{k_\lambda}E_0 J_n'(k_\lambda\rho)\cos n\phi'$$

Condiția de perete magnetic ideal presupune $H_\phi(\rho=a,\phi',z)=0$, astfel conform (6.7.26) avem $J_n'(k_\lambda a)=J_n'(\rho_{nm}')=0$, unde mărimea $k_\lambda a=\rho_{nm}'$ reprezintă rădăcina de ordin $m$ a derivatei funcției Bessel de speța întâia şi ordin $n$ .În general se urmăreşte ca antena să funcționeze pe modul dominant (fundamental, cu frecvența de rezonanță cea mai joasă) sau pe moduri apropiate de cel dominant. Din Tabelul 2.1 se observă că valoarea minimă a lui $\rho_{nm}'$ este $\rho_{11}'=1{,}841$ pentru care frecvența de oscilație (5.7.28) ia valoarea minimă

$$f_{r,110}=\frac{c_0}{2\pi\varepsilon_{1r}^{1/2}}\left(\frac{\rho_{11}'}{a}\right) \qquad (6.7.27)$$

Expresiile (6.7.26) ale câmpurilor devin

$$E_z(\rho,\phi')=E_0 J_1\left(\frac{\rho_{11}'}{a}\rho\right)\cos\phi'$$
$$H_\rho(\rho,\phi')=-\frac{j\omega_r\varepsilon_1}{k_{\lambda 11}^2\rho_{11}'}E_0 J_1\left(\frac{\rho_{11}'}{a}\rho\right)\sin\phi' \qquad (6.7.28)$$
$$H_\phi(\rho,\phi')=-\frac{j\omega_r\varepsilon_1}{k_{\lambda 11}}E_0 J_1'\left(\frac{\rho_{11}'}{a}\rho\right)\cos\phi'$$

unde $k_{\lambda 11}=k_{r11}=\rho_{11}'/a$.

Având în vedere că sursa radiantă este reprezentată prin curenții echivalenți magnetici (densități) din apertura circulară, ne oprim numai asupra componentei de câmp electric $E_z(\rho,\phi')$ (Fig. 6.30b). Ținând cont de curentul imagine, densitatea de curent magnetic este

$$\vec{J}_{ms}=-2\hat{n}\times\vec{E}_a\big|_{\rho=a}=\hat{\phi}\,2E_0 J_1(\rho_{11}')\cos\phi' \qquad (6.7.29)$$

Ca urmare a faptului că grosimea substratului este foarte mică iar densitatea de curent este uniformă după $z$, se poate considera un curent magnetic filamentar $\vec{I}_m=h\vec{J}_{ms}$, adică

$$\vec{I}_m=h\vec{J}_{ms}=\hat{\phi}\,2V_0\cos\phi' \qquad (6.7.30)$$

în care s-a notat $V_0=hE_0J_1(\rho_{11}')$ la $\phi'=0$.

Acum se pot calcula componentele de câmp electric $E_\theta$ şi $E_\phi$ în zona Fraunhofer. În funcție de dimensiunile discului sunt posibile două abordări: la antene cu raze suficient de mici, acestea pot fi considerate ca dipoli magnetici (vezi §6.6.2); în cazul unor dimensiuni uzuale având rază comparabilă cu lungimea de undă, structura este tratată ca o antenă buclă parcursă de curent constant. Adoptând cea de-a doua procedură în [5] se obțin expresiile

$$E_\theta(\theta,\phi)=-\frac{jk_0aV_0\,e^{-jk_0r}}{2r}\left[F_\theta\cos\phi\right] \qquad (6.7.31)$$

$$E_\phi(\theta,\phi)=\frac{jk_0aV_0\,e^{-jk_0r}}{2r}\left[F_\phi\cos\theta\sin\phi\right] \qquad (6.7.32)$$

în care s-a notat

$$F_\theta = J_0(k_0 a \sin\theta) - J_2(k_0 a \sin\theta)$$
$$F_\phi = J_0(k_0 a \sin\theta) + J_2(k_0 a \sin\theta) \tag{6.7.33}$$

Trebuie observată diferența dintre unghiul $\phi$ al sistemului de coordonate sferice $(r,\theta,\phi)$ şi unghiul $\phi'$ asociat coordonatelor cilindrice $(\rho,\phi',z)$ ale structurii microstrip; adesea în calcule foarte precise se consideră o rază efectivă $k_{\lambda 11} a_{ef} = \rho'_{11}$.

În cele două plane principale câmpurile au expresiile:

- *planul* $\phi = 0°, 180°$

$$E_\theta = \frac{jk_0 a V_0 e^{-jk_0 r}}{2r}[F_\theta]; \quad E_\phi = 0 \tag{6.7.34}$$

- *planul* $\phi = 90°, 270°$

$$E_\phi = \frac{jk_0 a V_0 e^{-jk_0 r}}{2r}[F_\phi \cos\theta]; \quad E_\theta = 0 \tag{6.7.35}$$

Exemple de diagrame de radiație în cele două plane principale sunt arătate în Fig. 6.31a,b. Se poate constata că antenele microstrip circulare au slabe proprietăți directive; din această cauză, de regulă, ele se utilizează în rețele de antene.

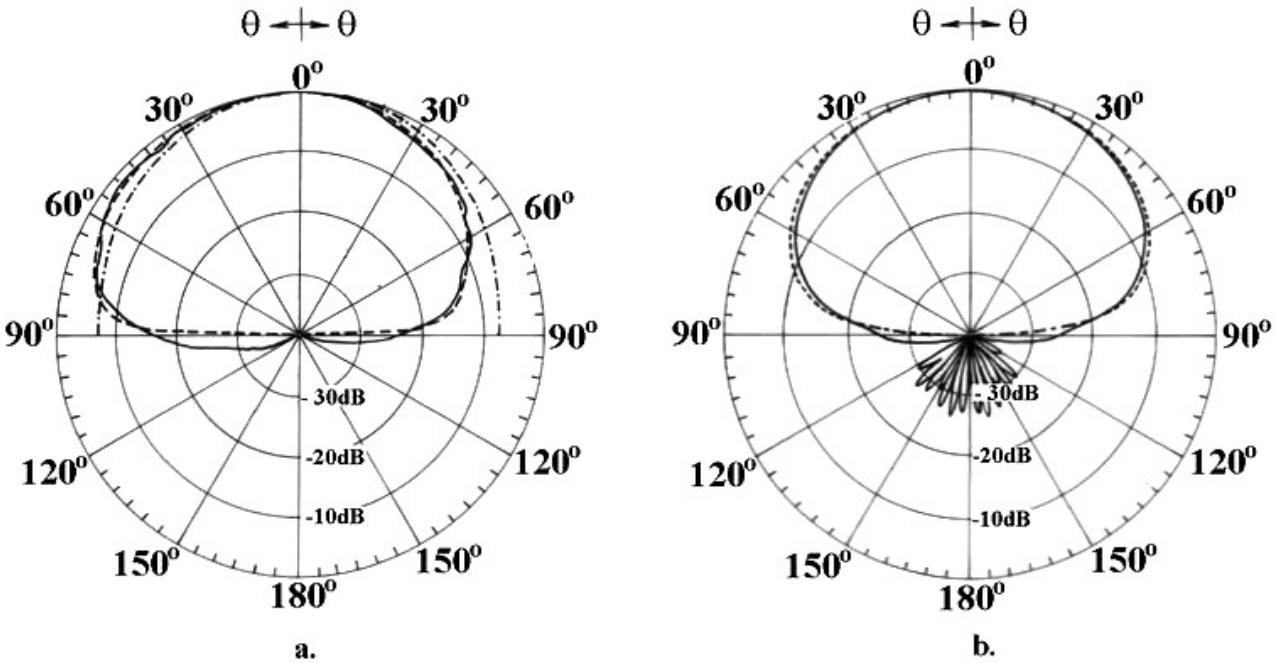



**Fig. 6.31 Diagramele de variație ale antenei microstrip circulare [5]; caracteristicile fizice ale antenei: a = 0,525 cm, h = 0,1588 cm, $\varepsilon_r$ = 2,2 , $f_0$ = 10 GHz, $\lambda_0$ = 3 cm; a – în planul $\phi = 0,180^\circ$ ; b – în planul $\phi = 90^\circ, 270^\circ$**

Referindu-ne la directivitatea maximă $D_0$ a unei antene, mai întâi trebuie calculată puterea radiată; ținând cont de (6.7.31) şi (6.7.32) se poate scrie

$$P_{rad} = \frac{|V_0|^2 (k_0 a)^2}{960} \int_0^{\pi/2} \left[F_\theta^2 + \cos^2\theta F_\phi^2\right] \sin\theta \, d\theta \tag{6.7.36}$$

O mărime utilă este conductanța de radiație $G_{rad}$, care în fapt reprezintă conductanța spațiului umplut cu dielectric dintre discul superior şi planul de masă; avem

$$G_{rad} = \frac{(k_0 a)^2}{480} \int_0^{\pi/2} \left[ F_\theta^2 + F_\phi^2 \cos^2 \theta \right] \sin\theta \, d\theta \tag{6.7.37}$$

Directivitatea maximă se poate reprezenta prin relația

$$D_0 = \frac{(k_0 a)^2}{120} G_{rad} \tag{6.7.38}$$

al cărei grafic este arătat în Fig. 6.32.

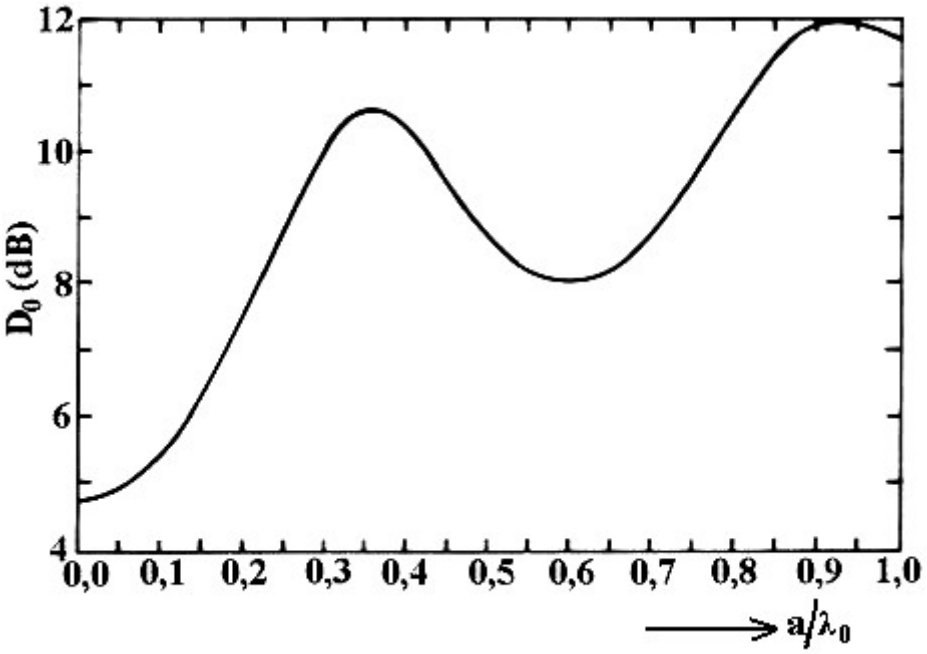



**Fig. 6.32 Variația directivității antenei microstrip circulare în funcție de raza efectivă pentru modul dominant** $TM_{110}^{z}$

## Bibliografie Capitolul 6


1. R.E. Collin, F.J. Zucher „Antenna Theory", vol. 1,2, McGraw – Hill, N.Y., (1969)
2. A. Ishimaru „Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering", Prentice – Hall International Edition, (1991)
3. Ed. Nicolau „Antene şi propagare", Edit. Didactică şi Pedagogică, (1982)
4. C.T. Tai „Diadic Green's Functions in Electromagnetic Theory", Intext Educational Publishers, IEEE Press N.Y., (1994)
5. C.A. Balanis „Antenna Theory", sec. edition, John Wiley and Sons, N.Y., (1997)
6. K.C. Gupta, A. Benalla (Editors) „Microstrip Antenna Design", Artech House, Norwood, (1988)
7. A.M. Kuguşev, N.S. Golubeva „Osnovy radioelektroniki", Energia, Moskva,(1969)
8. R. Kühn „Mikrowellenantennen", VEB, Verlag Technik, Berlin, (1964)
9. M.H. Choudhury „Electromagnetism", Ellis Horwood, John Wiley and Sons, N.Y., (1989)
10. J.L.Volakis, A. Chatterjee, L.C. Kempel „Finite Element Method for Electromagnetics", IEEE Press, N.Y., (1998)
11. G.H. Bryant „Principles of Microwave Measurements", Peter Peregrinus, London, (1988)
12. K.R. Carver, J.W. Mink „Microstrip Antenna Technology", IEEE Trans. AP – 29 (1981)
13. J.L. Amalric „Initiation à l'Etude des Antennes", Litografiat, INP (ENSEEIHT), Toulose, (1996)
14. Y.T. Lo, D. Solomon, W.F. Richards „Theory and Experiment on Microstrip Antennas", IEEE Trans. AP – 27 (1979)
15. J.R. James, G.J. Wilson „Microstrip Antennas and Arrays", preluat din [6], pg.3 – 12.

# CAPITOLUL 7

# EXCITAREA CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎN SISTEMELE DE PROPAGARE GHIDATĂ

## 7.1. EXCITAREA CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE ÎN GHIDURILE METALICE PRIN UTILIZAREA SONDELOR

Studiul propagării ghidate a câmpului electromagnetic în structurile metalice, microstrip şi cele dielectrice efectuat în capitolele 2,3 şi 4 s-a referit în principal la descrierea câmpului care se propagă, adică la proprietăţile undelor din aceste structuri (configuraţii de câmp, lungime de undă, viteză de fază, impedanţă de undă, putere transportată). S-a făcut abstracţie de modalitatea de excitare, adică de introducere a energiei electromagnetice care este furnizată de sistemele de generare (sistemele de generare a energiei electromagnetice de înaltă frecvenţă constituie un subiect separat care depăşeşte cadrul lucrării de faţă).

Există o multitudine de procedee de introducere în sistemele de propagare ghidată a câmpului electromagnetic furnizat de un generator de înaltă frecvenţă (microunde). De aici rezultă şi marea diversitate a metodelor de analiză, cu diferite nivele de aprofundare. În încheierea primului volum al lucrării am găsit potrivită prezentarea succintă a câtorva aspecte legate de modalităţile uzuale de excitare; ne vom referi întâi la modele simplificate de analiză, apoi vor fi schiţate şi unele metode mai complicate, bazate pe utilizarea funcţiilor Green şi a diferitelor proprietăţi ale funcţiilor proprii.

### 7.1.1. Relaţii generale

**1°. Condiţii de normare a funcţiilor proprii**

Procedurile de normare prezentate în secţiunea 5.8 aveau drept reper densitatea de putere transmisă prin structură sau puterea înmagazinată în cavităţile rezonante. Foarte adesea sunt utilizate şi alte condiţii de normare care urmăresc determinarea amplitudinilor componentelor de câmp pentru diferite structuri şi moduri de propagare.

Considerăm câmpurile din ghidurile metalice dreptunghiulare. Ecuaţia Helmholtz unidimensională (2.3.1) pentru modurile *TM* (unda *E*) poate fi scrisă sub forma

$$\left(\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right)\Psi_e(x,y) = 0 \tag{7.1.1}$$

cu condiţii la limită de tip Dirichlet $\Psi_e(x,y) = 0$ pe pereţii metalici laterali $x = 0,\ a$ şi $y = 0,\ b$; indicele $e$ subliniază tipul de undă *E*. Punând $\Psi_e(x,y) = X(x)Y(y)$, pentru determinarea coeficienţilor $A_1$ şi $B_1$ din (2.3.9) şi (2.3.10) uzual se aplică condiţii de normare la unitate de forma:

$$\int_0^a [X(x)]^2\, dx = 1 \tag{7.1.2}$$

rezultând $A_1 = (2/a)^{1/2}$; repetând relaţia (7.1.2) şi pentru $Y(y)$ se obţine $B_1 = (2/b)^{1/2}$. Ţinând cont de expresiile valorilor proprii $k_x = m\pi/a$ şi $k_y = m\pi/b$, pentru funcţiile proprii se poate scrie (similar cu (2.3.13))

$$\Psi_{emn}(x,y) = \frac{2}{(ab)^{1/2}} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{7.1.3}$$

În cazul modurilor *TE* (unde *H*) ecuația Helmholtz bidimensională (2.3.50) se poate scrie sub forma

$$\left(\nabla_T^2 + k_\lambda^2\right)\Psi_h(x,y) = 0 \tag{7.1.4}$$

cu condiții la limită de tip Neumann $\partial\Psi_h(x,y)/\partial n = 0$ pe pereții metalici laterali (*n* reprezintă modulul normalei la pereți). Procedând analog ca mai sus, expresia normată a funcțiilor proprii devine (similar cu (2.3.59))

$$\Psi_{hmn}(x,y) = \frac{2}{(ab)^{1/2}} cos\frac{m\pi x}{a} cos\frac{m\pi y}{b} \tag{7.1.5}$$

**2°. Funcții Green pentru regiuni închise**

Având în vedere că elementele de excitare (sonde, bucle, aperturi de diferite forme: rectangulare, circulare, eliptice, în cruce) reprezintă de fapt antene care radiază în spații închise limitate prin medii metalice sau dielectrice, sunt utile câteva relații referitoare la funcțiile Green pentru spații închise. Funcțiile Green care descriu procese de propagare ale undelor electromagnetice în spațiul liber sunt introduse în anexa AIII.3; în general funcțiile Green $G(\vec{r},\vec{r}')$ descriu răspunsul spațial al unui sistem fizic la o sursă de excitare punctuală $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ şi se obține ca soluție a ecuației diferențiale neomogene

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)G(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{7.1.6}$$

Dacă spațiul ce înconjoară sursa punctuală este omogen şi infinit singura condiție care trebuie satisfăcută de $G(\vec{r},\vec{r}')$ este condiția Sommerfeld (de radiație le infinit) de tipul (AIII, (III.3.8)).

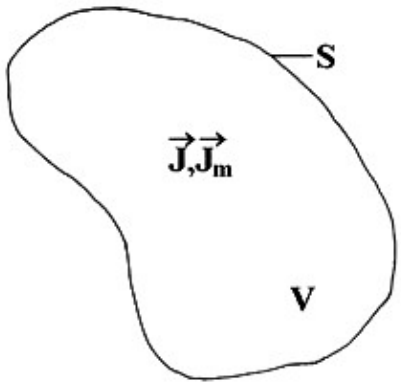



**Fig. 7.1. Regiune închisă pentru definirea condițiilor la limită ale funcțiilor Green**

Dacă însă spațiul ce înconjoară sursa este limitat de o suprafața *S* (Fig. 7.1), atunci $G(\vec{r},\vec{r}')$ trebuie să satisfacă una din următoarele condiții la limită

$$\begin{aligned} &G(\vec{r},\vec{r}') = 0 && \text{(condiție Dirichlet)} \\ &\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n} = 0 && \text{(condiție Neumann)} \\ &G(\vec{r},\vec{r}') + h\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n} = 0 && \text{(condiții generale omogene (mixte))} \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

unde *n* este normala la suprafața *S* în punctul considerat. Ca urmare a aplicării uneia din condițiile (7.1.7) soluția ecuației (7.1.6) va fi o serie de funcții proprii, astfel se poate scrie

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \sum_n A_n \Psi_n(\vec{r}) \tag{7.1.8}$$

în care $A_n$ este un coeficient necunoscut (urmează să fie determinat) iar $\Psi_n(\vec{r})$ este o funcție proprie. Parametrul de sumare *n* înseamnă o sumare triplă în cazul tridimensional, sumare dublă în

cazul bidimensional şi sumare simplă în cazul unidimensional. Funcția $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$ poate fi dezvoltată de asemenea într-o serie de funcții proprii

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\sum_n B_n\Psi_n(\vec{r}) \tag{7.1.9}$$

în care coeficientul $B_n$ se obține prin multiplicarea cu $\Psi_m(\vec{r})$ a ambilor termeni din relația (7.1.9) şi integrarea pe volumul $V$. Ținând cont de relațiile de ortogonalitate ale funcțiilor proprii

$$\int_V \Psi_n(\vec{r})\,\Psi_m(\vec{r})dV=0 \quad \text{pentru } m\neq n \tag{7.1.10}$$

scoatem

$$B_n=\frac{\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}')\,\Psi_n(\vec{r})dV}{\int_V[\Psi_n(\vec{r})]^2\,dV}=\frac{\Psi_n(\vec{r})}{\int_V[\Psi_n(\vec{r})]^2\,dV} \tag{7.1.11}$$

Introducând (7.1.8) şi (7.1.11) în ecuația de propagare (7.1.6) rezultă

$$\sum_n\left(\nabla^2+k^2\right)A_n\Psi_n(\vec{r})=-\sum_n B_n\Psi_n(\vec{r}) \tag{7.1.12}$$

Făcând uz de relația cunoscută $\left(\nabla^2+k_n^2\right)\Psi_n(\vec{r})=0$, din (7.1.12) se scoate

$$\left(k^2-k_n^2\right)A_n=-B_n \tag{7.1.13}$$

care permite determinarea coeficienților $A_n$. Funcția Green capătă forma

$$G(\vec{r},\vec{r}')=\sum_n\frac{\Psi_n(\vec{r})\,\Psi_n(\vec{r}')}{\left(k_n^2-k^2\right)N_n^2} \tag{7.1.14}$$

in care factorul $N_n^2$ este definit prin relația

$$N_n^2=\int_V[\Psi_n(\vec{r})]^2\,dV \tag{7.1.15}$$

Este evident că ecuația (7.1.14) este valabilă atât timp cât $k_n\neq k$; dacă însă $k=k_{n0}$ funcția Green este divergentă; acest termen se exclude din expresia lui $G(\vec{r},\vec{r}')$.

*Aplicații*

a) Considerăm întâi cazul unidimensional. Admitem propagarea după axa $z$ şi presupunem că funcția Green satisface condițiile la limită $G(0,z')=0$, $G(a,z')=0$ în punctele $z=0$ şi $z=a$ cu $0<z'<a$; ecuația de propagare este

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k^2\right)G(z,z')=-\delta(z-z') \tag{7.1.16}$$

Funcțiile proprii sunt

$$\Psi_n(z)=(2/a)^{1/2}\sin(n\pi z/a) \tag{7.1.17}$$

iar valorile proprii sunt $k_n=n\pi z/a$, $n=1,2,3...\infty$. În final funcția Green este dată de expresia

$$G(z,z')=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{a}\right)\frac{\sin(n\pi z/a)\sin(n\pi z'/a)}{k_n^2-k^2} \tag{7.1.18}$$

b) Cazul bidimensional. Drept exemplu se consideră o structură cilindrică de rază $\rho=a$ pentru care funcția Green bidimensională $G(\rho,\phi;\rho',\phi')$ satisface ecuația Helmholtz

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+k^2\right]G=-\frac{\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')}{\rho} \tag{7.1.19}$$

cu condiția la limită de tip Dirichlet $G=0$ la $\rho=0$; expresia termenului drept derivă din forma generală (AII, (II.1.3)) considerând coordonate polare. Ținând cont de proprietățile funcției Dirac (anexa AII) integrala pe aria $S$ $(ds=\rho\,d\rho\,d\phi)$ a termenului drept se ia egală cu unitatea. Soluția ecuației (7.1.19) se caută în două etape; punând condiția ca această soluție să fie periodică după $\phi$, termenul dependent de $\phi$ se poate exprima printr-o serie de funcții proprii normate

$$\Psi_n(\phi)=(1/2\pi)^{1/2}e^{-jn\phi} \tag{7.1.20}$$

Acum funcția Green se poate pune sub formă generală

$$G=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi(\phi)\,\Psi(\phi')G_n(\rho,\rho') \tag{7.1.21}$$

urmând ca $G_n(\rho,\rho')$, care exprimă soluția dependentă de $\rho$, să fie determinată dintr-o ecuație de tip Bessel; notând

$$\delta(\phi-\phi')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Psi(\phi)\,\Psi(\phi') \tag{7.1.22}$$

din (7.1.19) se obține o ecuație Bessel în coordonate cilindrice (2.4.14), cu termen drept

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\frac{n^2}{\rho^2}+k^2\right]G_n=-\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \tag{7.1.23}$$

Funcția $G_n$ se dezvoltă într-o serie de funcții proprii

$$G_n=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_n(k_{nm}\rho) \tag{7.1.24}$$

unde $k_{nm}$ reprezintă un set de valori proprii, iar condiția la limită devine $J_n(k_{nm}a)=0$. Termenul drept din (7.1.23) se exprima sub forma

$$\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_n(k_{nm}\rho)J_n(k_{nm}\rho')}{N_{nm}^2} \tag{7.1.25}$$

unde $N_{nm}^2$ este un factor de normare de forma

$$N_{nm}^2=\int_0^a[J_n(k_{nm}\rho)]^2\,\rho\,d\rho=\frac{a^2}{2}[J_n'(k_{nm}a)]^2 \tag{7.1.26}$$

Introducem (7.1.24) şi (7.1.25) în (7.1.23), rezultă

$$G_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_n(k_{nm}\rho)J_n(k_{nm}\rho')}{(k_{nm}^2-k^2)N_{nm}^2} \tag{7.1.27}$$

Astfel expresia finală a funcției Green complete se obține introducând ultima relație în (7.1.21); rezultă expresia generală

$$G(\rho,\phi;\rho',\phi')=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_n(k_{nm}\rho)J_n(k_{nm}\rho')}{(k_{nm}^2-k^2)N_{nm}^2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}e^{-jn\phi} \tag{7.1.28}$$

care se poate utiliza în problemele de excitare ale structurilor de propagare ghidată a undelor electromagnetice.

### 3°. Excitarea ghidului dreptunghiular de către o sursă (element) de curent.

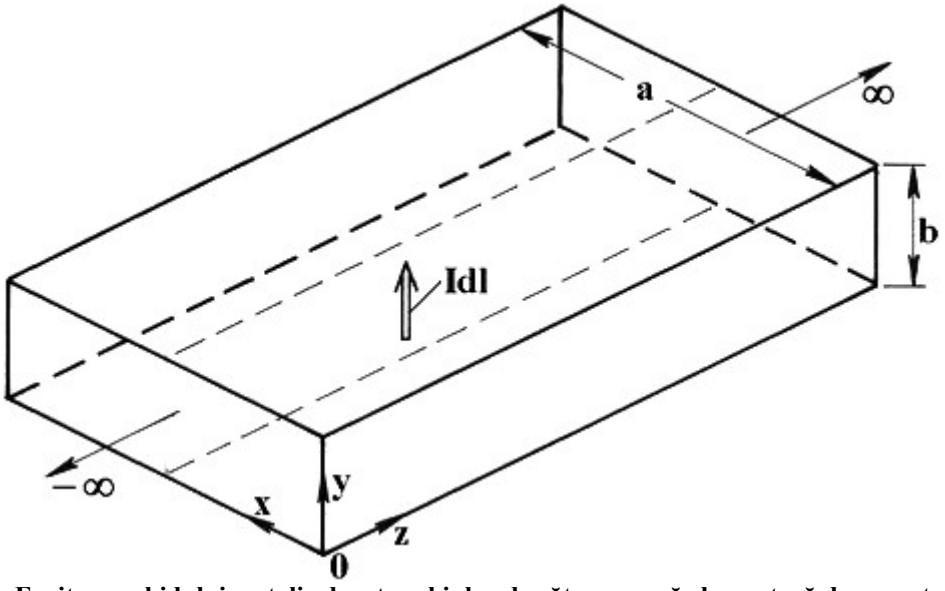



**Fig. 7.2. Excitarea ghidului metalic dreptunghiular de către o sursă elementară de curent electric**

Pentru a exemplifica relațiile generale prezentate mai sus ne referim la un ghid metalic dreptunghiular (Fig. 7.2) care este excitat de către o sursă elementară de curent electric. Aşa cum s-a procedat în capitolul 6, la problemele de radiație ale unor surse în spațiul liber sau în regiuni închise este convenabil să se utilizeze potențialele vectoriale $\vec{A}(\vec{r})$ sau vectorul Hertz $\vec{\Pi}_e(\vec{r})$. Având în vedere că sursa are componentă numai după coordonata y, mărimile $A_y$ şi $\Pi_y$ satisfac ecuații Helmholtz de forma (vezi relațiile (1.2.39) şi (1.2.58))

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)A_y = -\mu_0 J_y \tag{7.1.29}$$

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)\Pi_y = -J_y / j\omega\varepsilon_0 \tag{7.1.30}$$

Sursa infinitesimală $J_y$ se exprimă prin intermediul funcției Dirac tridimensionale

$$J_y = Idl\,\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{7.1.31}$$

Condițiile la limită pentru ecuațiile (7.1.29) şi (7.1.30) sunt de forma

$$\begin{aligned} &A_y, \Pi_y = 0 \qquad \text{la } x = 0 \text{ şi } x = a \\ &\frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial \Pi_y}{\partial y} = 0 \qquad \text{la } y = 0 \text{ şi } y = b \end{aligned} \tag{7.1.32}$$

Introducem funcția Green care satisface ecuația de propagare de tip Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)G(x,y,z;x',y',z') = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{7.1.33}$$

cu condițiile la limită

$$\begin{aligned} &G = 0 \qquad \text{la } x = 0,\ x = a \\ &\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \qquad \text{la } y = 0,\ y = b \end{aligned} \tag{7.1.34}$$

Mărimile $A_y$ şi $\Pi_y$ se pot exprima în funcţie de *G*

$$A_y = \mu_0 IdlG;\ \Pi_y = \frac{Idl}{j\omega\varepsilon_0} G \tag{7.1.35}$$

Pentru a rezolva ecuaţia (7.1.33) trebuie observat că regiunea este limitată (închisă) după direcţiile *x* şi *y* şi nelimitată după direcţia *z*. Referindu-ne întâi la direcţiile *x* şi *y*, funcţia G poate fi exprimată ca o serie de funcţii proprii care satisfac ecuaţia Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2\right)\Psi_{mn}(x,y) = 0 \tag{7.1.36}$$

cu condiţiile la limită: $\Psi_{mn} = 0$ la $x = 0$ şi $x = a$; $\partial\Psi_{mn}/\partial y = 0$ $y = 0$ şi $y = b$. Introducem o condiţie de normare la unitate de forma (7.1.2) a funcţiilor proprii

$$\int_S [\Psi_{mn}(x,y)]^2\, ds = 1 \tag{7.1.37}$$

cu $ds = dxdy$. Funcţiile proprii sunt de forma

$$\Psi_{mn}(x,y) = \Psi_m(x)\,\Psi_n(y) \tag{7.1.38}$$

unde

$$\begin{aligned} \Psi_m(x) &= (2/a)^{1/2}\, sin(m\pi x/a) \\ \Psi_n(x) &= (2/b)^{1/2}\, cos(n\pi x/a) \end{aligned} \tag{7.1.39}$$

Luând în considerare şi coordonata *z*, funcţia Green se poate scrie sub forma unei serii de funcţii după cum urmează

$$G(x,y,z;x',y',z') = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{mn}(x,y)\,\Psi_{mn}(x',y')G_{mn}(z,z') \tag{7.1.40}$$

în care $G_{mn}(z,z')$ urmează să fie determinată. Acum din (7.1.33) devine evidentă relaţia

$$\delta(x-x')\delta(y-y') = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{mn}(x,y)\,\Psi_{mn}(x',y') \tag{7.1.41}$$

Dacă se introduc ultimele două relaţii în (7.1.33) se obţine

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 - k_{mn}^2\right)G_{mn}(z,z') = -\delta(z-z') \tag{7.1.42}$$

unde $k_{mn}^2 = k_x^2 + k_y^2$, $k_x = m\pi/a$, $k_y = n\pi/b$; trebuie observat că regiunea este deschisă după direcţia *z*. Conform anexei AIII (III.3.3) soluţiile ultimei ecuaţii sunt de forma

$$\begin{aligned} y_1(z) &= exp[-jq_{mn}(z-z')],\quad z > z' \\ y_2(z) &= exp[jq_{mn}(z-z')],\quad z < z' \end{aligned} \tag{7.1.43}$$

În final, similar cu (AIII, (III.3.66)), se obţine expresia totală a funcţiei Green

$$G(x,y,z;x',y',z') = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Psi_{mn}(x,y)\,\Psi_{mn}(x',y')}{j2q_{mn}} exp[-jq_{mn}(z-z')] \tag{7.1.44}$$

unde $q_{mn} = (k_0^2 - k_{mn}^2)^{1/2}$; termenul $j2q_{mn}$ de la numitor reprezintă un Wronskian.

## 7.1.2. Excitarea ghidurilor metalice cu ajutorul sondelor

### 1°. Excitarea undelor monomod

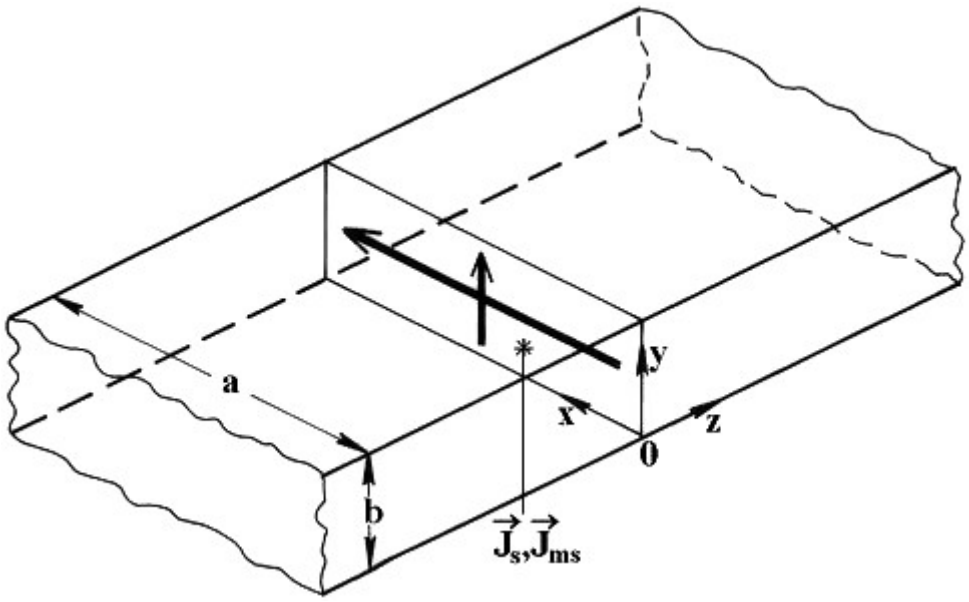



**Fig. 7.3. Excitarea ghidului dreptunghiular de către o distribuție plană de curenți**

Considerăm întâi cazul general al excitării unui ghid metalic dreptunghiular infinit de către o distribuție plană (tip foaie) de densități de curenți $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$, situați la coordonata $z = 0$ (Fig. 7.3). La început ne referim la excitarea modurilor $TE_{mn}$ şi $TM_{mn}$ de către densități de curent electric $\vec{J}_s$; presupunem că se cere excitarea modurilor $TE_{mn}\,(H_{mn})$ iar undele excitate se vor propaga în ambele sensuri, $z > 0$ şi $z < 0$. Expresiile componentelor transversale $\vec{E}_T$ şi $\vec{H}_T$ pot fi scrise sub forma (vezi secțiunea 2.3.4)

$$\begin{aligned} E_x^{\pm}(x,y,z) &= Z_{gH} k_y A_{mn}^{\pm} \cos k_x x \sin k_y y\, e^{\mp j\beta_g z} \\ E_y^{\pm}(x,y,z) &= -Z_{gH} k_x A_{mn}^{\pm} \sin k_x x \cos k_y y\, e^{\mp j\beta_g z} \\ H_x^{\pm}(x,y,z) &= \pm k_x A_{mn}^{\pm} \sin k_x x \cos k_y y\, e^{\mp j\beta_g z} \\ H_y^{\pm}(x,y,z) &= \pm A_{mn}^{\pm} \cos k_x x \sin k_y y\, e^{\mp j\beta_g z} \end{aligned} \qquad (7.1.45)$$

unde: $k_x = m\pi x/a$, $k_y = n\pi y/b$; $Z_{gH} = Z_{TE} = \omega\mu_0/\beta_g$ este impedanța de undă a ghidului fără pierderi în cazul modurilor $TE_{mn}$ (2.3.37); $A_{mn}^{\pm}$ sunt coeficienții de amplitudine care pot fi determinați prin utilizarea unor condiții de normare adecvate. Condițiile la limită care trebuiesc satisfăcute sunt

$$\begin{aligned} \left(\vec{E}^{+} - \vec{E}^{-}\right) \times \hat{k} &= 0 \\ \hat{k} \times \left(\vec{H}^{+} - \vec{H}^{-}\right) &= \vec{J}_s^{H} \end{aligned} \qquad z = 0 \qquad (7.1.46)$$

unde prin $J_S^H$ s-a notat densitatea de curent care excită moduri $TE_{mn}$.

Din prima condiție rezultă că componentele de câmp electric trebuie să fie continue la $z = 0$, adică

$$A_{mn}^{+} = A_{mn}^{-}; \qquad (7.1.47)$$

din cea de a doua condiție decurge faptul că componentele transversale de câmp magnetic suferă o discontinuitate la $z = 0$, care este egală cu densitatea de curent electric de suprafață $\vec{J}_s^{H}$. Astfel,

ținând cont de cea de a doua condiție din (7.1.46) se poate scrie

$$\begin{aligned}\vec{J}_s^H(x,y) &= -\hat{i}\left(H_y^+ - H_y^-\right) + \hat{j}\left(H_x^+ - H_x^-\right) = \\ &= -\hat{i}\,2A_{mn}^+ k_y \cos k_x x \sin k_y y + \hat{j}\,2A_{mn}^+ k_x \sin k_x x \cos k_y y\end{aligned} \tag{7.1.48}$$

Ultima relație arată faptul că pentru a excita modurile $TE_{mn}$ foaia de curent electric $\vec{J}_s$ trebuie să aibă componente după *x* şi după *y*; pe baza teoremei de unicitate a câmpului curentul (7.1.48) va excita numai moduri $TE_{mn}$ care se pot propaga în ambele sensuri, pentru care ecuațiile Maxwell şi condițiile la limită sunt satisfăcute.

Dacă se cere excitarea modurilor $TM_{mn}(E_{mn})$ expresia densității de curent va căpăta o formă diferită. Ținând cont de expresiile componentelor $\vec{E}_T$ şi $\vec{H}_T$ date în secțiunea 2.3.1 şi procedând ca mai sus, se obține o expresie a densității de curent electric de forma

$$\vec{J}_s^E(x,y) = \hat{i}\,2B_{mn}^+ k_x \cos k_x x \sin k_y y + \hat{j}\,2B_{mn}^+ k_y \sin k_x x \cos k_y y \tag{7.1.49}$$

unde: $B_{mn}^+$ sunt coeficienții de amplitudine care se determină prin utilizarea unor condiții de normare adecvate; $J_s^H$ este densitatea de curent pentru excitarea modurilor $TE_{mn}$.

Ne referim acum la excitarea modurilor din ghid prin densități de curent magnetic $\vec{J}_{ms}$.

Considerăm că se cere excitarea modurilor $TE_{mn}$; expresiile componentelor transversale $\vec{E}_T$ şi $\vec{H}_T$ sunt de forma (7.1.45) însă condițiile la limită care trebuie satisfăcute sunt diferite

$$\begin{aligned}\left(\vec{E}^+ - \vec{E}^-\right)\times\hat{k} &= \vec{J}_{ms}^H \\ \hat{k}\times\left(\vec{H}^+ - \vec{H}^-\right) &= 0\end{aligned} \tag{7.1.50}$$

Câmpurile transversale definite prin (7.1.45) trebuie să aibă componentele $H_x$ şi $H_y$ continue în punctul $z = 0$; din această condiție rezultă

$$A_{mn}^+ = -A_{mn}^- \tag{7.1.51}$$

Ținând cont de prima condiție din (7.1.50), se poate scrie

$$\vec{J}_{ms}^H(x,y) = -\hat{i}\,2Z_{gH} A_{mn}^+ k_x \sin k_x x \cos k_y y - \hat{j}\,2Z_{gH} A_{mn}^+ k_y \cos k_x x \sin k_y y \tag{7.1.52}$$

Dacă este necesară excitarea modurilor $TM_{mn}$, expresia densității de curent $\vec{J}_{ms}$ va fi diferită. Ținând cont de expresiile componentelor $\vec{E}_T$ şi $\vec{H}_T$ şi de condițiile la limită (7.1.50), se obține

$$\vec{J}_{ms}^E(x,y) = -\hat{i}\,2B_{mn}^+ k_y \sin k_x x \cos k_y y + \hat{j}\,2B_{mn}^+ k_x \cos k_x x \sin k_y y \tag{7.1.53}$$

Din cele expuse mai sus rezultă că teoretic este posibilă excitarea unui singur mod în ghidul metalic dreptunghiular de către densități de curent $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$ cu distribuție de tip foaie (strat foarte subțire); pentru aceasta este necesar ca densitățile de curent să aibă forme adecvate (7.1.48), (7.1.49), (7.1.52), (7.1.53), care în practică sunt foarte greu de realizat; uzual sunt aproximate prin două sonde sau două bucle. De regulă, în aceste cazuri sunt excitate mai multe moduri, dintre care majoritatea sunt moduri evanescente.

**2°. Excitarea modurilor de la o sursă arbitrară $\vec{J}_s$**

În scop de generalizare considerăm o sursă arbitrară de curent electric $\vec{J}_s$ plasată într-un spațiu cuprins între planele $z_1$ şi $z_2$ (Fig. 7.4.); această sursă va genera câmpurile $\vec{E}^+$ şi $\vec{H}^+$ care se propagă în sensul $+z$ şi $\vec{E}^-$ şi $\vec{H}^-$ care se propagă în sensul $-z$.

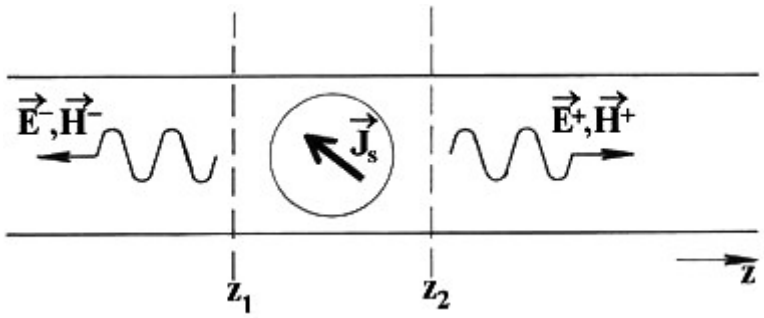



**Fig. 7.4. Sursă arbitrară de curent electric în ghidul de lungime infinită**

Sub formă generală aceste câmpuri pot fi exprimate în termenii modurilor de propagare în ghidurile metalice. Componentele de câmp pot fi exprimate prin relații generalizate de forma ( vezi secțiunile 5.8.1 şi 5.9.2)

$$\vec{E}^{+} = \sum_p A_p^{+}\vec{E}_p^{+} = \sum_p A_p^{+}\left(\vec{e}_p + \hat{k}e_{zp}\right)e^{-j\beta_p z}, \quad z > z_2$$

$$\vec{H}^{+} = \sum_p A_p^{+}\vec{H}_p^{+} = \sum_p A_p^{+}\left(\vec{h}_p + \hat{k}h_{zp}\right)e^{-j\beta_p z}, \quad z > z_2 \qquad (7.1.54)$$

$$\vec{E}^{-} = \sum_p A_p^{-}\vec{E}_p^{-} = \sum_p A_p^{-}\left(\vec{e}_p - \hat{k}e_{zp}\right)e^{j\beta_p z}, \quad z < z_1$$

$$\vec{H}^{-} = \sum_p A_p^{-}\vec{H}_p^{-} = \sum_p A_p^{-}\left(-\vec{h}_p + \hat{k}h_{zp}\right)e^{j\beta_p z}, \quad z < z_1$$

unde: indicele $p$ desemnează orice mod posibil *TE* sau *TM*; mărimile $\vec{e}_p$ şi $\vec{h}_p$ reprezintă componentele transversale iar $e_{zp}$ şi $h_{zp}$ pe cele longitudinale ale câmpului (expresiile lor pot fi evaluate din (5.8.1)). Pentru un curent $\vec{J}_s$ determinarea coeficienților de amplitudine $A_p^{+}$ şi $A_p^{-}$ se poate efectua prin utilizarea teoremei de reciprocitate Lorentz şi a unor condiții de normare adecvate. Pe baza teoremei de reciprocitate Lorentz sub formă integrală (AIII, (III.2.27)) se poate scrie (în cazul nostru $\vec{J}_{ms} = 0$)

$$\oint_S \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right)\cdot d\vec{s} = \int_V \left(\vec{E}_2 \cdot \vec{J}_{s1} - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_{s2}\right)dV \qquad (7.1.55)$$

cu $d\vec{s} = \hat{k}ds$. Vom considera volumul $V$ cuprins între planele $z_1$ şi $z_2$ şi introducem notațiile $\vec{E}_1 = \vec{E}^{\pm}$, $\vec{H}_1 = \vec{H}^{\pm}$, semnele $\pm$ stipulând $z > z_2$ şi $z < z_1$; $\vec{E}_2$ şi $\vec{H}_2$ vor fi considerate că definesc modul de propagare *p* în direcția –*z*, adică

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \vec{E}_p^{-} = \left(\vec{e}_p - \hat{k}e_{zp}\right)e^{j\beta_p z} \\ \vec{H}_2 &= \vec{H}_p^{-} = \left(-\vec{h}_p + \hat{k}h_{zp}\right)e^{j\beta_p z} \end{aligned} \qquad (7.1.56)$$

Introducând în (7.1.55) avem $\left(\vec{J}_{s1} = \vec{J}_s\ ,\ \vec{J}_{s2} = 0\right)$

$$\oint_S \left(\vec{E}^{\pm} \times \vec{H}_p^{-} - \vec{E}_p^{-} \times \vec{H}^{\pm}\right)\cdot d\vec{s} = \int_V \vec{E}_p^{-} \cdot \vec{J}_s dV \qquad (7.1.57)$$

Ținând cont de (7.1.54) şi de condițiile de ortogonalitate ale modurilor, relația (7.1.57) poate fi scrisă sub forma

$$A_p^{+}\int_{z_2}\left(\vec{E}_p^{+} \times \vec{H}_p^{-} - \vec{E}_p^{-} \times \vec{H}_p^{+}\right)\cdot d\vec{s} + A_p^{-}\int_{z_1}\left(\vec{E}_p^{-} \times \vec{H}_p^{-} - \vec{E}_p^{-} \times \vec{H}_p^{-}\right)\cdot d\vec{s} = \int_V \vec{E}_p^{-} \cdot \vec{J}_s dV \qquad (7.1.58)$$

Evident, a doua integrală din membrul stâng se anulează; dezvoltând prima integrală se obține

$$-2A_p^+\int_{z_2}\left(\vec{e}_p\times\vec{h}_p\right)\cdot\hat{k}ds=\int_V\vec{E}_p^-\cdot\vec{J}_s dV \tag{7.1.59}$$

de unde, ținând cont de (7.1.56) se scoate

$$A_p^+=\frac{-1}{P_p}\int_V\left(\vec{e}_p-\hat{k}e_{zp}\right)\cdot\vec{J}_s e^{j\beta_p z}dV \tag{7.1.60}$$

în care

$$P_p=2\int_{S_0}\left(\vec{e}_p\times\vec{h}_p\right)\cdot\hat{k}ds \tag{7.1.61}$$

reprezintă o constantă de normare în raport cu puterea transportată de modul de propagare $p$; $S_0$ este aria transversală a ghidului.

Considerăm acum

$$\begin{aligned}\vec{E}_2=\vec{E}_p^+&=\left(\vec{e}_p+\hat{k}e_{zp}\right)e^{-j\beta_p z}\\ \vec{H}_2=\vec{H}_p^+&=\left(\vec{h}_p+\hat{k}h_{zp}\right)e^{-j\beta_p z}\end{aligned} \tag{7.1.62}$$

şi repetând procedura de mai sus se ajunge la valoarea

$$A_p^-=\frac{-1}{P_p}\int_V\left(\vec{e}_p+\hat{k}e_{zp}\right)\cdot\vec{J}_s e^{-j\beta_p z}dV \tag{7.1.63}$$

**3°. Aplicație la excitarea modului $TE_{10}$ în ghidul dreptunghiular**

Sub formă generală acest mod poate fi excitat fie cu sonde, fie cu bucle; aici ne vom referi la utilizarea unei sonde a cărei înălțime este egală cu dimensiunea peretelui mic al ghidului (Fig. 7.5) şi care este parcursă de curentul $I_0$. Uzual sonda reprezintă prelungirea conductorului central al unui ghid (linii) coaxial care este conectat la generator; diametrul sondei, adâncimea de pătrundere în ghidul dreptunghiular şi distanța $l_s$ de la capătul scurtcircuitat, precum şi diametrul exterior al liniei coaxiale constituiesc elemente de proiectare care determină performanțele structurii de excitare.

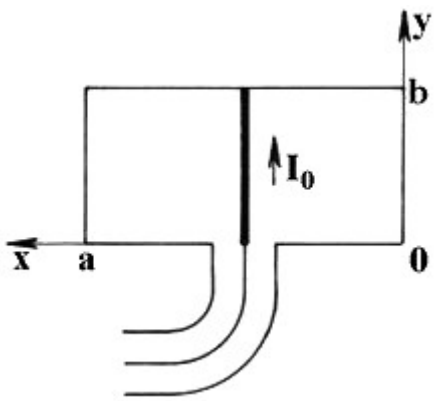



**Fig. 7.5. Excitarea modului $TE_{10}$ în ghidul dreptunghiular cu ajutorul sondei parcursă de curentul $I_0$.**

Cu scopul de a aplica relațiile generale prezentate la punctul 2°) vom considera că este înlăturat scurtcircuitul de la capătul din stânga, astfel vor exista moduri $TE_{10}$ directe (care se propagă după $+z$) şi inverse (care se propagă după $-z$). Admițând pentru moment că diametrul sondei de curent este foarte mic, densitatea de curent-sursă $\vec{J}_s$ poate fi scrisă sub forma

$$\vec{J}_s=\hat{j}I_0\delta(x-a/2)\delta(z),\quad 0\le y\le b \tag{7.1.64}$$

în care s-a presupus că $I_0$ este constant şi orientat după *y*. Ţinând cont de (2.3.73), (2.3.74) componentele transversale ale modului $TE_{10}$ devin

$$\vec{e}_{10} = \hat{j}\sin(\pi x/a); \quad \vec{h}_{10} = \left(-\hat{i}/Z_{gH\,10}\right)\sin(\pi x/a) \tag{7.1.65}$$

Constanta de normare definită prin (7.1.61) este

$$P_{10} = \frac{2}{Z_{gH\,10}}\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dxdy = \frac{ab}{Z_{gH\,10}} \tag{7.1.66}$$

unde $Z_{gH\,10} = \omega\mu_0/\beta_{10} = k_0 Z_0/\beta_{10}$ reprezintă impedanţa de undă a modului $TE_{10}$, iar $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$. Constantele de amplitudine sunt

$$A_{10}^{+} = \frac{-1}{P_{10}}\int_V \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{j\beta_{10}z} I_0\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta(z)dxdydz = \frac{-bI_0}{P_{10}} = \frac{-Z_{gH\,10}I_0}{a} \tag{7.1.67}$$

iar $A_{10}^{-} = A_{10}^{+}$. Sonda privită ca antenă are o anumită rezistenţă de intrare (radiaţie) $R_{in}$; pentru a stabili o legătură între această rezistenţă şi impedanţa de undă este necesară calcularea puterii transportate de acest mod în ambele sensuri

$$\begin{aligned} P_{med} &= \frac{1}{2}\int_{S_0}\vec{E}^{+}\times\vec{H}^{+*}\cdot d\vec{s} + \frac{1}{2}\int_{S_0}\vec{E}^{-}\times\vec{H}^{-*}\cdot d\vec{s} = \int_{S_0}\vec{E}^{+}\times\vec{H}^{+*}\cdot d\vec{s} = \\ &= \int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{b}\frac{\left|A_{10}^{+}\right|^2}{Z_{gH\,10}}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)^2 dxdy = \frac{ab\left|A_{10}^{+}\right|^2}{2Z_{gH\,10}} \end{aligned} \tag{7.1.68}$$

Rezistenţa de intrare a sondei $R_{in}$ se determină pe baza relaţiei de definiţie (6.3.33) $P_{med} = I_0^2 R_{in}/2$, astfel se poate scrie

$$R_{in} = \frac{2P_{med}}{I_0^2} = \frac{ab\left|A_{10}^{+}\right|^2}{I_0^2 Z_{gH\,10}} = \frac{bZ_{gH\,10}}{a} \tag{7.1.69}$$

### 7.1.3 Utilizarea funcţiilor Green diadice

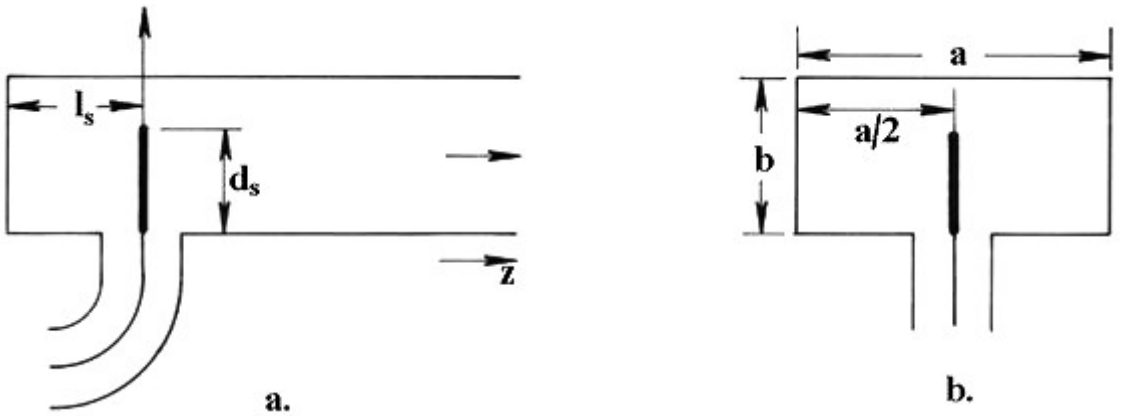



**Fig.7.6. Excitarea ghidului dreptunghiular cu o sondă $d_s < b$:**
**a – alimentarea sondei de la ghidul coaxial, secţiune longitudinală; b - secţiune transversală**

În cazurile practice sonda este plasată la distanţa $l_s$ de capătul scurtcircuitat al ghidului şi are lungimea $d_s$ mai mică decât înălţimea *b* a peretelui mic (Fig. 7.6a); Sonda acţionează ca o

antenă iar prezența scurtcircuitului asigură propagarea numai în sensul $+z$. Raza $r_s$ a sondei se ia suficient de mică în comparație cu înălțimea $b$ a ghidului; totuşi pentru a creşte acuratețea calculelor referitoare la impedanța antenei trebuie luată în considerare şi grosimea sondei.

Câmpul electromagnetic din ghidul de undă este excitat de către un câmp necunoscut din apertura (deschiderea) liniei coaxiale. Analiza exactă urmăreşte exprimarea câmpurilor din ghid şi din linia coaxială în funcție de câmpul electric (necunoscut) din apertură, şi punerea de condiții la limită, în special cele de continuitate ale componentelor tangențiale de câmp magnetic pe deschiderea liniei coaxiale; prin această procedură se ajunge la ecuații care permit determinarea câmpului electric din apertură şi a curentului din sondă. Raportul dintre diametrul conductorului central $(2r_s)$ şi cel al cilindrului exterior $(2r_0)$ se alege astfel încât în ghidul coaxial de alimentare să se propage numai modul fundamental *TEM*. În continuare se va face aproximația că în ghidul coaxial vor exista numai unde *TEM* incidente şi reflectate; Ținând cont de expresiile (3.2.26) şi (3.2.28) pentru ghidul coaxial cu mod *TEM*, se poate scrie

$$E_\rho(\rho) = \frac{\left(U_0^+ - U_0^-\right)}{\rho\, ln(r_0/r_s)} \tag{7.1.70}$$

$$H_\phi(\rho) = \frac{\left(U_0^+ - U_0^-\right)}{Z_{c0}} \frac{1}{2\pi\rho} \tag{7.1.71}$$

unde: $U_0^+$ şi $U_0^-$ sunt amplitudinile undelor incidente, respectiv reflectate; $Z_{c0} = Z_0\, ln(r_0/r_s)/2\pi$ este impedanța caracteristică a ghidului coaxial fără pierderi (vezi (3.2.66)), iar $Z_0 = (\mu/\varepsilon)^{1/2}$ este impedanța de undă intrinsecă a mediului dintre conductorul central şi cilindrul exterior. Curentul total de intrare în sondă este (3.2.63) $I_0 = 2\pi r_s H_\phi(\rho)$. Impedanța de intrare a antenei (sondei) se defineşte ca raportul

$$Z_{ins} = \frac{\left(U_0^+ - U_0^-\right)}{I_0} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{2\pi r_s H_\phi(\rho)}; \tag{7.1.72}$$

se poate observa că $U_0^+$, $U_0^-$ şi $U_0$ au dimensiunile unei tensiuni.

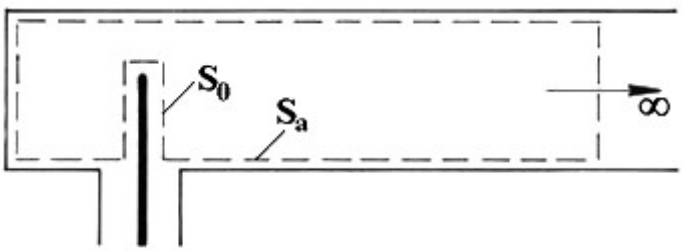



**Fig. 7.7. Ilustrarea suprafeței de integrare pentru aplicarea teoremei Green**

Câmpul electric din apertura ghidului coaxial poate fi calculat prin introducerea funcției Green diadice pentru câmpul electric $\overline{\overline{G}}_e$, definită în anexa AIII (secțiunea AIII.3.2). Referindu-ne la Fig. 7.7 se poate scrie [3]

$$\vec{E}(\vec{r}\,') = \int_{S_a} \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')ds - j\omega\mu_0 \int_{S_0} \vec{J}_s(\vec{r}) \cdot \overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')ds \tag{7.1.73}$$

unde: $S_a$ este aria aperturii ghidului coaxial iar $S_0$ este aria sondei. Această relație decurge din aplicarea teoremei Green la suprafața punctată, arătată în Fig. 7.7 şi făcând uz de condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă $\vec{E}$ şi $\overline{\overline{G}}_e$ pe pereții ghidului, pe suprafața sondei şi la infinit. Prima

integrală pe $S_a$ determină câmpul care acționează asupra sondei şi care se notează $E_a$. Condiția la limită pe sondă $\hat{n}\times\vec{E}=0$ conduce la o integrală pentru curentul sondei

$$\int_{S_0}\vec{J}_s(\vec{r})\cdot\left(-j\omega\mu_0\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\right)ds\times\hat{n}=-\vec{E}_a\times\hat{n} \tag{7.1.74}$$

unde $\vec{r}'$ este situat pe $S_0$. Se admite că câmpul electric $\vec{E}_a(y)\cdot\hat{j}$ care acționează în lungul sondei este proporțional (liniar) cu amplitudinea $U_0$ a tensiunii asociate cu câmpul din apertura ghidului coaxial; astfel se poate scrie

$$\vec{E}_a(y)\cdot\hat{j}=U_0e_a(y) \tag{7.1.75}$$

unde $e_a(y)$ este un câmp electric normat, în lungul sondei.

Impedanța de intrare a sondei definită prin (7.1.72) capătă expresia

$$\underline{Z}_{ins}=\frac{U_0}{I_0}=\frac{U_0^2}{\int_{S_0}\vec{E}_a\cdot\vec{J}_s ds}\frac{\int_{S_0}e_a(y)\cdot J_y ds}{I_0}=\frac{Z}{I_0}\int_0^{d_s}e_a(y)J_y(y)dy \tag{7.1.76}$$

unde

$$\underline{Z}=\frac{U_0^2}{\int_{S_0}\vec{E}_a\cdot\vec{J}_s ds} \tag{7.1.77}$$

reprezintă o funcțională de impedanță care poate fi determinată printr-o metoda variațională. Termenul

$$I(y)=\int_0^{2\pi}J_y(y)rd\phi=2\pi rJ_y(y) \tag{7.1.78}$$

reprezintă curentul total pe sondă, uniform distribuit pe circumferință.

Alegând un set adecvat de funcții-bază $\Psi_n(y)$, curentul $I(y)$ poate fi dezvoltat conform relației

$$I_y(y)=\sum_{n=1}^{N}I_n\Psi_n(y); \tag{7.1.79}$$

dacă funcția-bază $\Psi_n(y)$ se alege astfel încât $\Psi_n(0)=1$, se poate scrie

$$I_0=\sum_{n=1}^{N}I_n \tag{7.1.80}$$

Relația (7.1.74) se referă la componentele tangențiale în lungul sondei; în locul produsului vectorial cu $\hat{n}$ se poate lua produsul scalar cu $\vec{J}(\vec{r}')$ şi apoi se face integrala pe suprafața sondei, avem

$$\int_{S_a}\int_{S_0}\vec{J}_s(\vec{r})\cdot\left(-j\omega\mu_0\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\right)\cdot\vec{J}_s(\vec{r}')ds\,ds'=-\int_{S_0}\vec{E}_a(\vec{r}')\cdot\vec{J}_s(\vec{r}')ds' \tag{7.1.81}$$

Utilizând notația (7.1.77) ultima relație devine (considerând $\delta\underline{Z}$ egală cu zero)

$$\int_{S_a}\int_{S_0}\vec{J}_s(\vec{r})\cdot\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}_s(\vec{r}')ds\,ds'+\frac{\underline{Z}}{U_0^2}\left[\int_{S_0}\vec{J}_s(\vec{r}')\cdot\vec{E}_a(\vec{r}')ds'\right]^2=0 \tag{7.1.82}$$

unde am notat $-j\omega\mu_0\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')=\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}')$; ținând cont de (7.1.76) şi (7.1.82) se obține următoarea expresie pentru $\underline{Z}_{ins}$ [3]

$$\underline{Z}_{ins} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{nm} I_n I_m}{\left[\sum_{n=1}^{N} f_n I_n\right]^2} \frac{\sum_{n=1}^{N} f_n I_n}{\sum_{n=1}^{N} I_n} = \frac{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} G_{nm} I_n I_m}{\sum_{n=1}^{N} I_n \sum_{n=1}^{N} f_n I_n} \tag{7.1.83}$$

în care s-a notat

$$G_{nm} = \frac{-1}{(2\pi r)^2} \int_{S_a}\int_{S_0} \Psi_n(y) G_{yy}(r,r')\, \Psi_m(y')\, ds\, ds'$$
$$f_n = \int_0^{d_s} \Psi_n(y) e_a(y)\, dy \tag{7.1.84}$$

Pentru determinarea mărimii $I_n$ se porneşte de la o dezvoltare a relației (7.1.82) (valabilă pentru $\delta Z = 0$), astfel se poate scrie

$$\sum_{n=1}^{N} G_{nm} I_n = \underline{Z} f_m \sum_{n=1}^{N} f_n I_n = C_0 f_m, \quad m = 1,2,3...,N \tag{7.1.85}$$

unde $C_0 = \underline{Z}\sum_{n=1}^{N} f_n I_n$ reprezintă o constantă pentru fiecare ecuație.

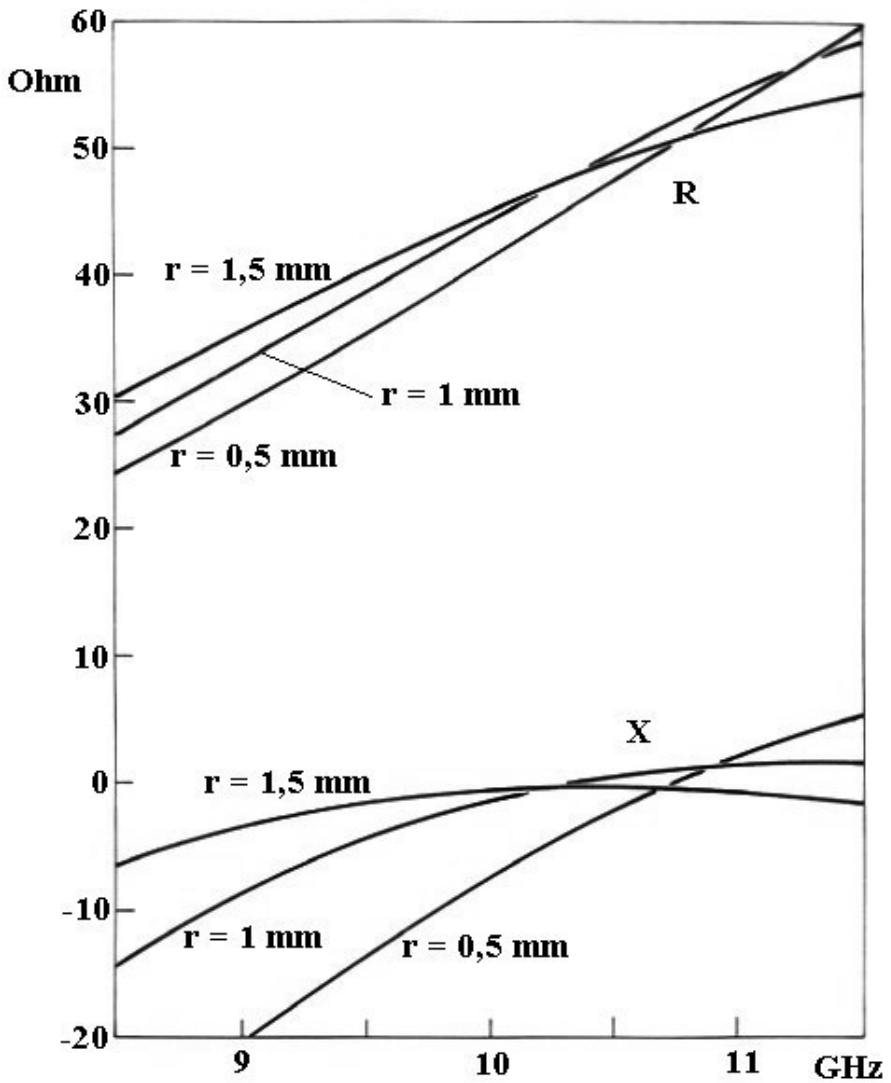



**Fig. 7.8. Variația impedanței de intrare $\underline{Z}_{ins}$ (Rezistența $R_{ins}$ şi reactanța $X_{ins}$) în funcție de frecvență pentru un ghid de bandă X; lungimea sondei este $d_s$ = 0,62 cm; distanța de la scurtcircuit $l_s$ variază in funcție de diametrul sondei**

Determinarea efectivă a impedanței de intrare a antenei $\underline{Z}_{ins}$ se poate efectua prin utilizarea mai multor metode, una foarte răspândită fiind metoda Galerkin. Problema poate fi substanțial simplificată având în vedere că trebuie considerată numai componenta $G_{yy}$ a funcției Green diadice, deoarece s-a presupus că $\vec{J}_s$ are componentă numai după $y$ ( neglijarea componentei radiale este posibilă pentru sonde foarte subțiri). Se construieşte funcția pornind de la potențialul vectorial $A_y$ care este determinat de componenta după $y$ a elementului de curent; funcția Green necesară pentru determinarea componentei de câmp electric $E_y$ va fi [3]

$$G = \frac{j2Z_0}{abk_0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{0n}k_n^2}{\Gamma_{mn}}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi x'}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{n\pi y'}{b}e^{-\Gamma_{mn}(z_>+l_s)}\sinh\Gamma_{mn}(z_<+l_s) \quad (7.1.86)$$

în care s-a notat: $k_n^2=(n\pi/b)^2-k_0^2$; $\Gamma_{mn}^2=(m\pi/a)^2+k_n^2$; $\varepsilon_{0n}$ este factorul Neumann care ia valoarea *1* pentru *n = 0* şi valoarea *2* pentru celelalte valori ale lui n. Dacă sonda este centrată pe mijlocul laturii mari $(x'=a/2)$ se vor lua numai termenii *m = 1, 3, 5,...*; calculul funcției *G* în vederea găsirii unei expresii analitice manevrabile pentru impedanța $\underline{Z}_{ins}$ este extrem de laborioasă.

În continuare se prezintă grafice de variație a părții reale $R_{ins}$ şi a celei imaginare $X_{ins}$ în funcție de frecvența şi lungimea $d_s$ a sondei. De exemplu în Fig. 7.8 sunt prezentate rezultate pentru un ghid de bandă *X* (*a = 2,286 cm, b = 1,016 cm*) şi lungimea sondei $d_s = 0{,}62\ cm$. Distanța $l_s$ până la scurtcircuit se alege din condiția $2\beta_g l_s \cong \pi/2$ la frecvența centrală sau la o altă frecvență specificată din banda de trecere a ghidului. Această distanță are o variație lentă în funcție de raza sondei; de exemplu în graficele din Fig. 7.8 s-a luat $l_s = 0{,}495\ cm$ pentru *r = 1 mm* şi *r = 1,5 mm* şi $l_s = 0{,}505\ cm$ pentru *r = 0,5 mm*.

În Fig. 7.9 sunt arătate variațiile impedanței $(R_{imn},\ X_{ins})$ în funcție de înălțimea sondei pentru un ghid de undă de bandă *X*. Distanța $l_s = 0{,}609\ cm$ s-a ales din condiția $2\beta_g l_s = \pi/2$ la $f = 10\ GHz$, care maximizează încărcarea inductivă datorată undei staționare $TE_{10}\,(H_{10})$. Trebuie subliniat că pentru datele din Fig. 7.9 reactanța sondei descreşte când lungimea sondei devine mai mare de *0,65 cm*.

Acuratețea rezultatelor teoretice este determinată de numărul şi forma funcțiilor-bază utilizate pentru determinarea curentului $I(y)$. Efectuând operații de dezvoltare în serie a diferiților termeni din (7.1.86) şi introducând apoi în (7.1.85) se obține integrala pentru curentul din sondă $I_y(y)$ de forma [3]

$$\frac{jk_0Z_0}{b}\left[\frac{jk_0^2r^2}{16}+\frac{k_0^2r^2}{8\pi}\left(\gamma+\ln\frac{k_0r}{2}\right)-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\pi r}{2a}+\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\left(\frac{e^{-\Gamma_{m0}r}}{\Gamma_{m0}a}-\frac{e^{-m\pi r/a}}{m\pi}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{k_0^2r^2}{2}\right)\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-2\Gamma_{m0}l_s}}{\Gamma_{m0}a}\right]\int_0^{d_s}I(y)dy-\frac{2jZ_0}{k_0b}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}I_0(k_nr)K_0(k_nr)+\right. \quad (7.1.87)$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4K_0(k_n2ma)-2K_0(k_nma)}{2\pi}-\left(1+\frac{k_n^2r^2}{2}\right)\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{e^{-2\Gamma_{mn}l_s}}{\Gamma_{mn}a}\right]k_n^2\cos\frac{n\pi y'}{b}\int_0^{d_s}I(y)\cos\frac{n\pi y}{b}dy=$$
$$=U_0\,e_a(y')$$

unde $K_0$ este funcția Bessel modificată de speța a doua.

Toate seriile din această expresie converg rapid, astfel pot fi reținuți numai un număr mic de termeni. Problema importantă constă în alegerea funcțiilor-bază pentru reprezentarea curentului.

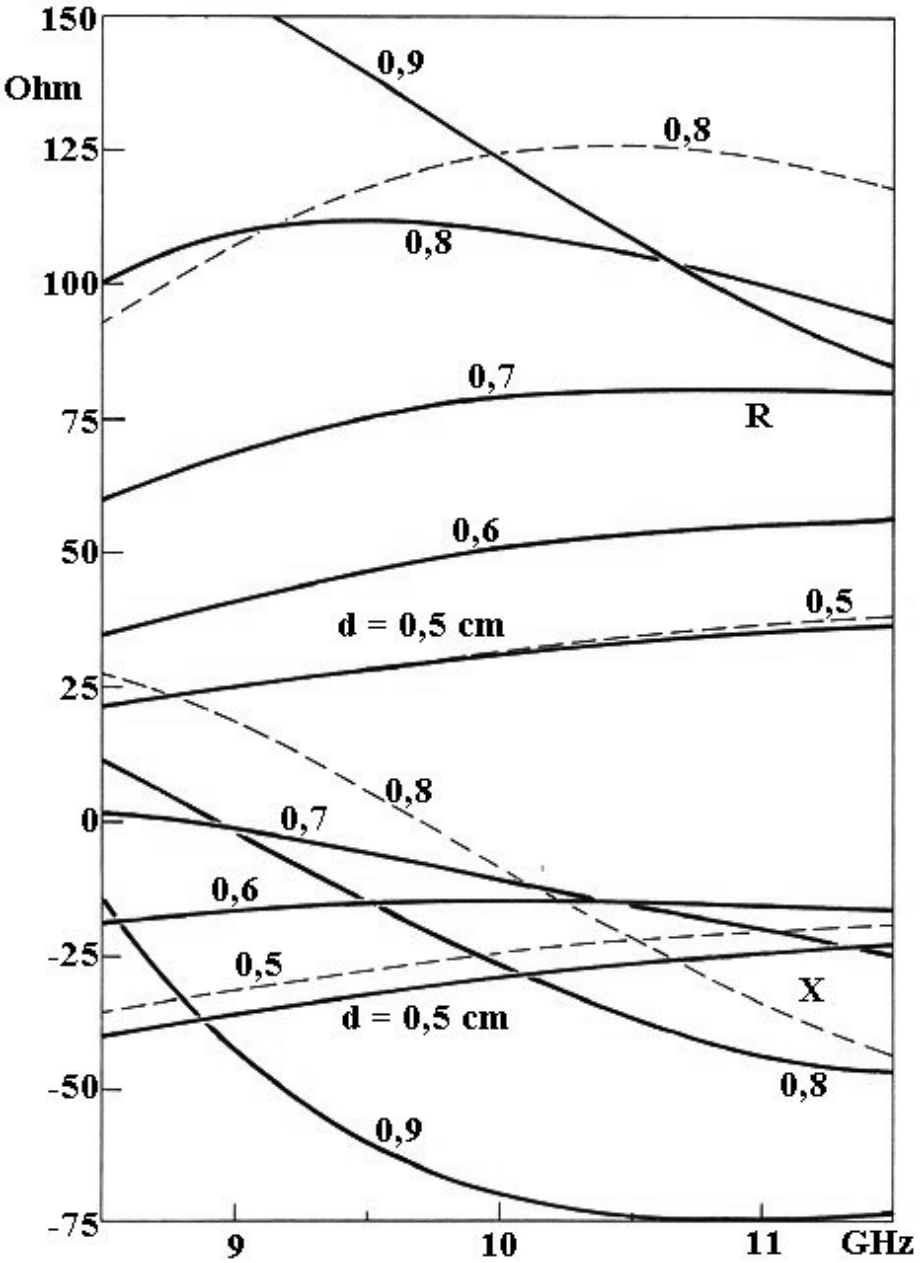



**Fig. 7.9. Variația impedanței de intrare $\underline{Z}_{ins}$ în funcție de înălțimea sondei; graficele sunt calculate pentru $l_s$=0,609 cm şi r = 0,1 cm; curbele trasate cu linie continuă utilizează două funcții-bază iar curbele cu linie întreruptă au utilizat trei funcții-bază**

Alegând în mod adecvat aceste funcții se pot obține rezultate suficient de precise pentru $R_{ins}$ şi $X_{ins}$ ; de exemplu graficele din Fig. 7.8 au fost obținute luând funcțiile-bază

$$\Psi_1(y)=\frac{\sin k_0(d_s-y)}{\sin k_0 d_s}, \qquad \Psi_2(y)=\frac{1-\cos k_0(d_s-y)}{1-\cos k_0 d_s} \tag{7.1.88}$$

Luând trei funcții-bază, cu $\Psi_1(y)$ ca în (7.1.88) şi

$$\Psi_2(y)=\cos 3\pi y/2d_s\,, \quad \Psi_3(y)=\cos 5\pi y/2d_s \tag{7.1.89}$$

au fost obținute curbele cu linie întreruptă din Fig. 7.9.
De asemenea utilizând trei funcții-bază pentru un ghid de bandă *S* ($a = 7{,}2136\ cm$, $b = 3{,}4036\ cm$), la frecvența $f_1 = 2{,}747\ GHz$ au fost obținute valorile: $l_s = 2{,}55\ cm$, $d_s = 1{,}91\ cm$, $r_s = 0{,}7937\ cm$ $(r_0 = 1{,}9393\ cm)$, $Z_{ins} = 57{,}3 - j18\ \Omega$.

## 7.2 EXCITAREA GHIDURILOR PRIN UTILIZAREA BUCLELOR

Aranjamentul tipic este arătat în Fig. 7.10: prin orificiul practicat în peretele mic al ghidului se introduce conductorul central al liniei coaxiale formând o buclă semicirculară de rază $r_b$ cu centrul la $y = b/2$; este convenabil ca originea sistemului de coordonate să fie ales în centrul semibuclei $(x' = 0, y' = y - b/2, z' = 0)$. Distanța dintre planul buclei şi capătul scurtcircuitat al ghidului este foarte mică; pentru calculul componentelor de câmp electric şi magnetic se poate lua într-adevăr $z' \approx 0$, însă distanța $z'$ constituie un parametru important la determinarea părții imaginare (inductive) a impedanței buclei semicirculare privită ca sistem radiant (antenă); din această cauză scurtcircuitul constă dintr-un piston mobil (Fig. 7.10b) cu ajutorul căruia se ajustează impedanța buclei. Planul buclei este paralel cu planul (x,y) astfel vor putea fi excitate numai modurile $TE_{mn}$ $(H_{mn})$, care au componente axiale ale câmpului magnetic; deoarece diametrul buclei este suficient de mic în comparație cu lungimea de undă $(2r_b = d_b \le \lambda_0)$ se poate admite că curentul $I_0$ care parcurge bucla este constant.

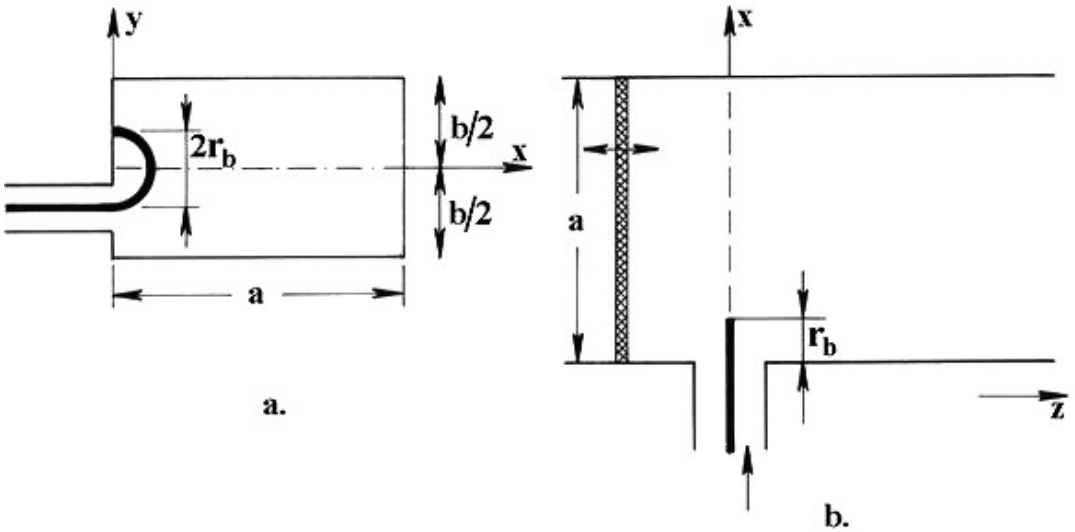



**Fig. 7.10. Excitarea ghidurilor dreptunghiulare cu ajutorul buclelor coaxiale; a – secțiune transversală; b – secțiune longitudinală în planul (x,z) la y = b/2**

Ca urmare a faptului că bucla posedă proprietăți inductive semnificative, care sunt puternic influențate de pereții metalici din vecinătate, pentru calculul impedanței de intrare (impedanța de radiație a antenei-buclă) se face uz de teorema imaginii; astfel sistemul format din buclă şi ghid se înlocuieşte printr-un aranjament bidimensional infinit de antene imagine.

Puterea radiată de antenă se poate evalua prin calculul coeficienților de cuplaj între modul $H_{mn}$ excitat şi buclă; dispunând de puterea radiată se poate calcula rezistența de radiație (partea reală a impedanței). Modurile ortonormate $H_{mn}$ pot fi deduse din funcția scalară

$$\Psi_{hmn}(x,y) = \left( \frac{\varepsilon_{0m}\varepsilon_{0n}}{abjk_0 Z_0 \gamma_{mn} k_{\lambda mn}^2} \right)^{1/2} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(n\pi \frac{2y-b}{b}\right) \tag{7.2.1}$$

unde $\varepsilon_{0m}$, $\varepsilon_{0n}$ sunt factorii Neumann; valoarea lor este *1* pentru *m = 0*, *n = 0* şi este egală cu *2* pentru restul cazurilor. Componentele de câmp sunt

$$\begin{aligned} \vec{h}_{zmn} &= \hat{k}\, k_{\lambda mn}^2 \Psi_{hmn} \\ \vec{h}_{mn} &= -\gamma_{mn} \nabla_T \Psi_{hmn} \\ \vec{e}_{mn} &= \frac{jk_0 Z_0}{\gamma_{mn}} \left(\hat{i}\hat{j} - \hat{j}\hat{i}\right) \cdot \vec{h}_{mn} \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

unde s-au utilizat notațiile: $k_{\lambda mn}^2 = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ ; $\gamma_{mn}^2 = k_{\lambda mn}^2 - k_0^2$ . Introducând şi factorul de propagare avem (similar cu (7.1.54))

$$\begin{aligned} E_{mn}^{\pm} &= \vec{e}_{mn} e^{\mp\gamma_{mn} z} \\ H_{mn}^{\pm} &= \left(\pm \vec{h}_{mn} + \vec{h}_{z\,mn}\right) e^{\mp\gamma_{mn} z} \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

Condiția de normare (7.2.1) a fost aleasă astfel încât să se poată scrie

$$\int_0^a \int_0^b \left(\vec{e}_{mn} \times \vec{h}_{mn}\right) \cdot d\vec{s} = 1 \tag{7.2.4}$$

unde $d\vec{s} = \hat{k} dxdy$ . Câmpul magnetic axial în regiunile $z > 0$ şi $z < 0$ pot fi reprezentate ca o dezvoltare în moduri

$$\vec{H}_{z\,mn} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \vec{h}_{z\,mn} e^{-\gamma_{mn} z} & , \; z > 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} \vec{h}_{z\,mn} e^{\gamma_{mn} z} & , \; z < 0 \end{cases} \tag{7.2.5}$$

unde $C_{mn}$ şi $D_{mn}$ sunt coeficienții de cuplaj antenă-ghid şi în cazul de față au expresiile

$$C_{mn} = D_{mn} = \frac{j\omega\mu_0 I_0}{2} \int_{S_0} \vec{h}_{z\,mn} \cdot d\vec{s} \tag{7.2.6}$$

unde $I_0$ este curentul ce parcurge bucla iar $S_0$ este aria mărginită de buclă. Particularizând pentru modul $H_{10}$ ultima relație devine

$$C_{10} = \frac{j\omega\mu_0 I_0}{2} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{2a}{jk_0 Z_0 \gamma_{10}^2 b\pi^2}\right)^{1/2} \int_{S_0} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \tag{7.2.7}$$

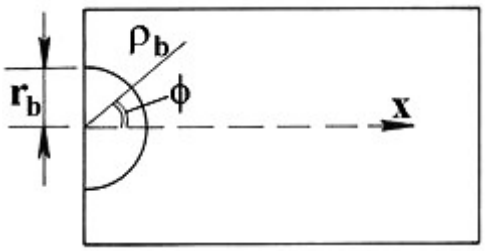



**Fig.7.11. Coordonate cilindrice locale pentru bucla de excitare**

Pentru evaluarea integralei din ultima relație introducem coordonate cilindrice locale $(\rho_b, \phi)$ ca în Fig. 7.11; dezvoltând în serie pe $\cos(\pi x/a)$ se poate scrie

$$\int_0^{r_b} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{a^2} \rho_b^2 \cos^2\phi\right) \rho_b d\rho_b d\phi = \frac{\pi r_b^2}{2} \left(1 - \frac{\pi^2 r_b^2}{8a^2}\right) \approx \frac{\pi r_b^2}{2} \tag{7.2.8}$$

Puterea radiată în ghid de către buclă este dublă față de cea radiată într-o singură direcție, deci se poate scrie

$$P_{rad} = \int_0^a \int_0^b C_{10} C_{10}^* \vec{e}_{10} \times \vec{h}_{10}^* \cdot \hat{k} dxdy = C_{10} C_{10}^* \tag{7.2.9}$$

Ținând cont de (7.2.4), avem

$$\int_0^a \int_0^b \vec{e}_{mn} \times \vec{h}_{mn}^* \cdot \hat{k} dxdy = \begin{cases} 1 & , \; \gamma_{mn} \; imaginar \\ j & , \; \gamma_{mn} \; real \end{cases} \tag{7.2.10}$$

evident se ia cazul $\gamma_{mn}$ imaginar pentru care are loc o propagare efectivă. Introducând expresia lui $C_{10}$ se obține

$$P_{rad} = \frac{k_0 Z_0}{2\beta_{10} ab}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi r_b^2}{2}\right)^2 I_0^2 \tag{7.2.11}$$

în care s-a luat $\beta_{10}^2 = k_0^2 - (\pi/a)^2$. Presupunând că în ghidul coaxial care alimentează bucla se propagă modul fundamental *TEM*, integrala vectorului Poynting pe deschiderea ghidului coaxial este $Z_{in} I_0^2/2$, deoarece s-a admis că $I_0$ are numai parte reală. Puterea totală furnizată de buclă în spațiul învecinat este (vezi (1.4.28)) $P_P = P_{rad} + 2j\omega(W_H - W_E)$. Impedanța de intrare se definește la fel ca pentru antena în spațiu liber

$$\underline{Z}_{in} = \frac{P_{rad} + 2j\omega(W_H - W_E)}{I_0^2/2} \tag{7.2.12}$$

Rezistența de radiație este egală cu rezistența de intrare a buclei

$$R_{rad} = R_{inb} = \frac{k_0 Z_0}{\beta_{10} ab}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi r_b^2}{2}\right)^2 \tag{7.2.13}$$

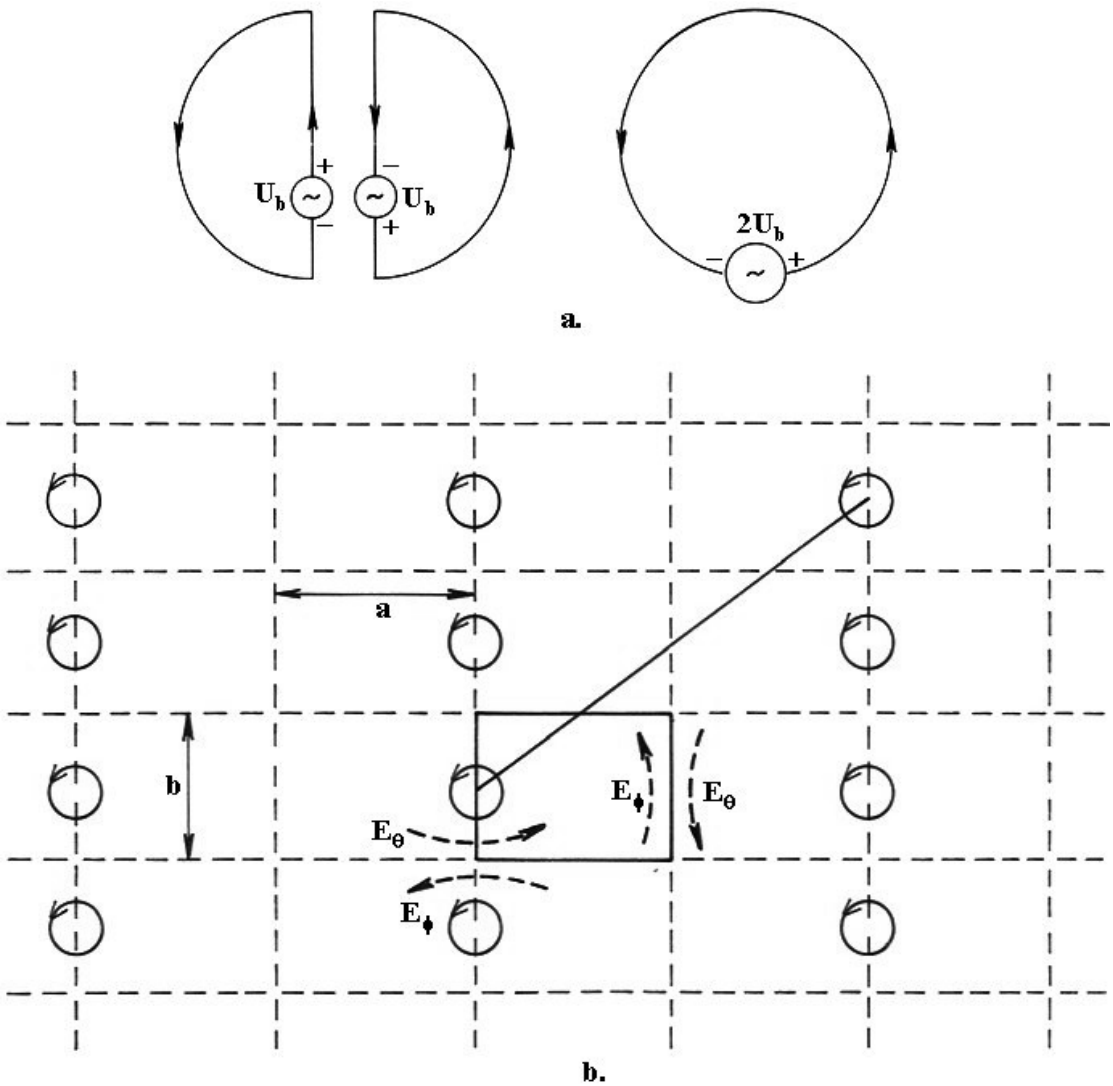



**Fig. 7.12. Antenă de excitare tip semibuclă: a – semibucla şi imaginea sa precum şi bucla echivalentă; b – antenă buclă şi imaginile sale**

Comparând această expresie cu rezistența de radiație a buclei în spațiul liber (6.3.36) se va observa că în cazul antenei-buclă din ghid $R_{rad}$ depinde şi de dimensiunile ghidului şi constanta de fază a modului excitat. De asemenea $R_{rad}$ este proporțională cu pătratul ariei buclei; în cazul buclelor cu dimensiuni mici $R_{rad}$ este suficient de mică, situându-se in limitele $10 \div 30\ \Omega$.

Pentru evaluarea reactanței (inductive) de intrare sistemul format din semibuclă şi ghid se înlocuieşte printr-o rețea de bucle circulare. Curentul din semibuclă şi imaginea sa la $x = 0$ sunt ilustrate în Fig. 7.12a, unde $U_b$ este tensiunea necesară pentru a menține curentul $I_0$ în bucla semicirculară; curentul din bucla circulară echivalentă este menținut de către o tensiune egală cu dublul lui $U_b$. Rețeaua de antene formată din bucle circulare este arătată în Fig. 7.12b. Întâi se calculează câmpul radiat de către o singură antenă circulară (de regulă cea din origine) apoi se evaluează câmpul total radiat de rețeaua de bucle circulare; acest câmp satisface condițiile la limită pe pereții metalici ai ghidului, anume anularea componentei tangențiale a câmpului electric.

Pentru a evalua corect reactanța de intrare a antenei din origine (alimentată în realitate de curentul $I_0$ furnizat de generator) trebuie calculat fluxul total care parcurge bucla din origine datorat antenelor-imagine, la care se adaugă fluxul produs de propriul curent. Sunt necesare precizări cu privire la raportul dintre faza fluxului de inducție magnetică şi faza curentului $I_0$. Fluxul care parcurge antena în fază cu curentul $I_0$ induce o tensiune electromotoare defazată cu $\pi/2$ față de curent; acest flux duce la creşterea reactanței inductive. Fluxul care parcurge antena şi este defazat cu $\pi/2$ față de curentul $I_0$ va produce o tensiune electromotoare în fază cu $I_0$, astfel contribuie la rezistența de radiație, calculată mai sus.

În continuare ne oprim asupra fluxului total produs de toate antenele imagine care parcurge antena originală în fază cu curentul $I_0$, deoarece această componentă de flux este responsabilă pentru reactanța inductivă a impedanței de intrare. În acest scop fiecare imagine este înlocuită printr-un moment magnetic orientat după direcția $z$ $\vec{M}_z = \hat{k}M_z$, unde $M_z = I_0 S_0 = I_0 \pi d_b^2/4$ iar $d_b = 2r_b$ (6.2.27); de asemenea avem

$$\vec{J}_{mz} = j\omega\mu_0 \vec{M}_z \tag{7.2.14}$$

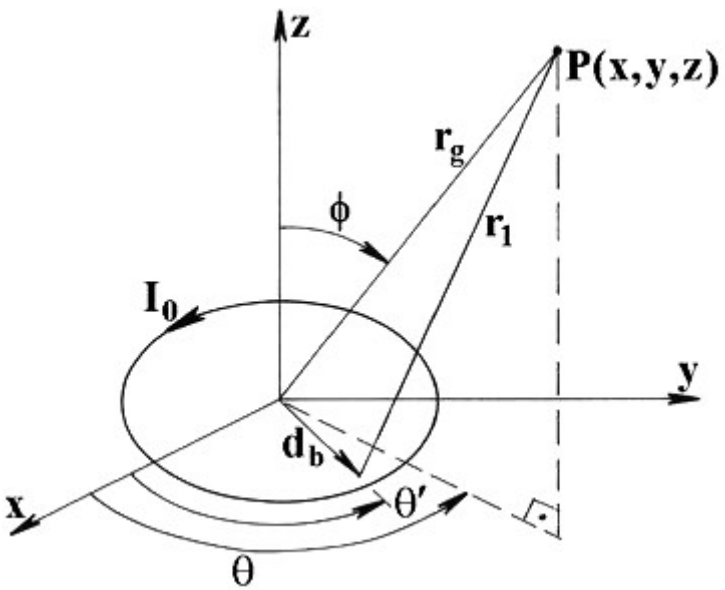



**Fig. 7.13. Sistemul de coordonate sferice al buclei din origine pentru calculul potențialului hertzian**

O procedură convenabilă de găsire a câmpului radiat de rețeaua de dipoli magnetici constă în determinarea potențialului Hertz magnetic $\Pi_z$ care are componentă numai după $z$. Ecuațiile ce definesc potențialul hertzian şi componenta după $z$ a câmpului magnetic sunt

$$\nabla^2 \Pi_z + k_0^2 \Pi_z = -M_z \tag{7.2.15}$$

$$H_z = k_0^2 \Pi_z + \partial^2 \Pi_z / \partial z^2 \tag{7.2.16}$$

Referindu-ne la o antenă-buclă situată în origine (Fig. 7.13.) şi utilizând sistemul de coordonate sferice, pentru potențialul hertzian se găseşte (similar cu (6.2.8))

$$\Pi = \frac{M_z}{4\pi r_g} e^{-jk_0 r_g} \tag{7.2.17}$$

în care $r_g = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$. Pentru un rând de dipoli localizați la $y = nb$, $n = 0,\pm1,\pm2,...,$ potențialul hertzian rezultant va fi

$$\Pi_1 = \frac{M_z}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{exp\left\{-jk_0\left[x^2 + z^2 + (y - nb)^2\right]^{1/2}\right\}}{\left[x^2 + z^2 + (y - nb)^2\right]^{1/2}} \tag{7.2.18}$$

Seriile care intervin pot fi uşor convertite într-un alt tip de serii rapid convergente prin utilizarea formulei Poisson de sumare. Prin intermediul unei transformate Fourier se ajunge la

$$\Pi_1 = \frac{M_z}{\pi b}\left\{\frac{1}{2} K_0\left[jk_0\left(x^2 + z^2\right)^{1/2}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} cos\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) K_0\left[\gamma_{0n}\left(x^2 + z^2\right)^{1/2}\right]\right\} \tag{7.2.19}$$

unde $\gamma_{0n} = \left[(2n\pi/b)^2 - k_0^2\right]^{1/2}$; $K_0$ este funcția Bessel modificată.

Potențialul hertzian provenit de la toți dipolii magnetici din rețea se obține prin înlocuirea coordonatei $x$ din ultima relație prin $x - 2ma$, efectuând sumarea pentru toți $m$. Pentru dipolii localizați la $x = 2ma$, $m = \pm1,\pm2,...,$ din ultima relație rezultă

$$\Pi_2 = \frac{M_z}{2\pi b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_0\left[jk_0\left(z^2 + 4m^2a^2\right)^{1/2}\right] + \frac{2M_z}{\pi b} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} K_0\left[\gamma_{0n}\left(z^2 + 4m^2a^2\right)\right] \tag{7.2.20}$$

La potențialele hertziene găsite mai sus trebuie adăugat şi cel dat de contribuția dipolilor magnetici localizați la $x = 0$, $y = nb$; din (7.2.18) rezultă

$$\Pi_{11} = \frac{M_z}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{exp\left[-jk_0\left(z^2 + n^2b^2\right)^{1/2}\right]}{\left(z^2 + n^2b^2\right)^{1/2}} \tag{7.2.21}$$

Ținând cont că termenul $K_0\left[\gamma_{0n}\left(z^2 + 4m^2a^2\right)\right]$ este foarte mic în comparație cu parametrii incluşi în relațiile respective, expresia (7.2.20) se reduce la

$$\Pi_2 = \frac{M_z}{4ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{0m}z}}{\gamma_{0m}} - \frac{M_z}{2\pi b} K_0(jk_0 z) \tag{7.2.22}$$

unde $\gamma_{0m} = \left[(m\pi/a)^2 - k_0^2\right]^{1/2}$. Expresia finală a vectorului Hertz total este

$$\Pi_z = \frac{M_z}{4ab} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{0m}z}}{\gamma_{0m}} - \frac{M_z}{2\pi b} K_0(jk_0 z) + \frac{M_z}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{exp\left[-jk_0\left(z^2 + n^2b^2\right)^{1/2}\right]}{\left(z^2 + n^2b^2\right)^{1/2}} \tag{7.2.23}$$

Conform relației (7.2.16) câmpul magnetic se determină luând termenul $k_0^2 \Pi_z$ şi derivata de ordinul al doilea din $\Pi_z$, evaluate în origine $z = 0$. Fluxul total care străbate antena-buclă din origine în fază cu curentul $I_0$ este dat de partea reală a lui $H_z$ adică de $Re(k_0 H_z)$ şi $Re\left(\partial^2 H_z / \partial z^2\right)$. Acest flux reprezintă produsul $\Phi_{mn} = \mu_0 H_z S_0$; se obține [3]

$$\sum_{m,n}\Phi_{mn}=\mu_0\pi r_b^2 I_0\pi r_b^2\left[\frac{k_0^2}{4\pi b}ln\frac{k_0^2ab}{4\pi(1-\cos k_0 b)}-\frac{k_0^2}{4\pi b}(2-\gamma)-\frac{13\pi}{24a^2b}-\frac{0{,}6}{\pi b^3}-\frac{3k_0^2b}{576\pi}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2ab}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{k_0^2}{\gamma_{0m}}+\gamma_{0m}-\frac{n\pi}{a}-\frac{k_0^2a}{2m\pi}\right)\right] \tag{7.2.24}$$

La acest flux se adaugă fluxul produs de bucla din origine care contribuie la inductanța totală cu selfinductanța $\Phi_{00}$ a acestei bucle; acest flux total va fi

$$\Phi_T=\sum_{m,n}\Phi_{mn}+\Phi_{00} \tag{7.2.25}$$

Tensiunea electromotoare indusă totală este $j\omega\Phi_T$ şi trebuie să fie egală cu $2U_b$, astfel se poate scrie

$$2U_b=j\omega\Phi_T \tag{7.2.26}$$

Impedanța de intrare a buclei se defineşte ca raportul $U_b/I_0$

$$\underline{Z}_{in}=\frac{j\omega\Phi_T}{2I_0}=R_{in}+jX_{in} \tag{7.2.27}$$

prin urmare

$$X_{in}=Re(\omega\Phi_T/2I_0)=X_{mn}+X_{00} \tag{7.2.28}$$

unde $X_{00}$ este o selfinductanță.

În structurile uzuale antena-buclă trebuie să radieze numai într-un singur sens, $z>0$; pentru realizarea acestei condiții se plasează un piston de scurtcircuit mobil la distanța $l_b$ față de buclă, unde $\lambda_g/4\le l_b\le\lambda_g/2$. Modurile evanescente excitate de către antenă nu sunt influențate de către piston, deoarece acestea descresc la valori neglijabile față de modul dominant, la distanțe $l_b\ge\lambda_g/4$. Efectul pistonului asupra modului dominant $H_{10}$ este echivalent cu suprapunerea unui mod $H_{10}$ radiat de o antenă imagine parcursă de curentul $-I_0$ plasată la distanța $z=-2l_b$. Câmpul magnetic axial total corespunzător modului $H_{10}$ care se propagă în ghid pe direcția $z>0$ devine (vezi (7.2.5))

$$C_{10}\vec{h}_{z10}\left(e^{-\gamma_{10}z}-e^{-\gamma_{10}(z+2l_b)}\right)=2jC_{10}\vec{h}_{z10}e^{-\gamma_{10}(z+l_b)}\sin\beta_{10}l_b \tag{7.2.29}$$

în care s-a notat $\beta_{10}=|\gamma_{10}|$. Rezultă că amplitudinea undei care se propagă în sensul $+z$ este multiplicată cu $2\sin\beta_{10}l_b$; fluxul de putere este mărit cu factorul $4\sin^2\beta_{10}l_b$ în sensul $+z$ şi este redus la zero în sensul $-z$. Puterea totală radiată de buclă pe modul $H_{10}$ se calculează conform relației (7.2.9) şi se obține expresia (7.2.11) multiplicată cu $4\sin^2\beta_{10}l_b$

$$P_{rad}=\frac{k_0Z_0}{4ab\beta_{10}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi r_b^2}{2}\right)^2 I_0^2\,4\sin^2\beta_{10}l_b \tag{7.2.30}$$

Rezistența de intrare se obține prin divizare cu $(I_0^2/2)$; avem

$$R_{inb}=\frac{k_0Z_0}{ab\beta_{10}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\frac{\left(\pi r_b^2\right)^2}{2}\sin^2\beta_{10}l_b \tag{7.2.31}$$

Energia reactivă asociată undei staționare $H_{10}$ între buclă şi pistonul de scurtcircuit este dată de relația

$$2j\omega\left(W_H - W_E\right)_{10} = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b E_y H_x^* dx\, dy \tag{7.2.32}$$

La $z = 0$ avem

$$\begin{aligned} \vec{E}_y &= jE_y = C_{10}\left(1 - e^{-j2\beta_{10}l_b}\right)\vec{e}_{10} \\ \vec{H}_x &= \hat{i}H_x = -C_{10}\left(1 + e^{-j2\beta_{10}l_b}\right)\vec{h}_{10} \end{aligned} \tag{7.2.33}$$

Ținând cont de condiția de normare (7.2.10) şi înlocuind pe $C_{10}$ din (7.2.7) se obține

$$2j\omega\left(W_H - W_E\right)_{10} = jC_{10}C_{10}^* \sin 2\beta_{10}l_b = jP_{rad}\sin 2\beta_{10}l_b \tag{7.2.34}$$

unde $P_{rad}$ are expresia (7.2.11). Contribuția suplimentară a reactanței inductive dată de unda staționară se obține prin divizare cu $\left(I_0^2/2\right)$ a ultimei relații

$$X_{st} = \frac{k_0 Z_0}{ab\beta_{10}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi r_b^2}{2}\right)^2 \sin 2\beta_{10}l_b \tag{7.2.35}$$

Reactanța inductivă totală va fi

$$X_{inT} = X_{st} - X_{in} = X_{st} - X_{mn} - X_{00} \tag{7.2.36}$$

unde $X_{in}$ este dată de (7.2.28) fiind datorată parcurgerii buclei din origine de către fluxul magnetic produs de toate antenele imagine, precum şi de către fluxul propriu; pentru a diminua termenul inductiv $X_{in}$ se alege în mod adecvat distanța $l_b$, situată de regulă în intervalul $\lambda_g/4 \le l_b \le \lambda_g/2$.

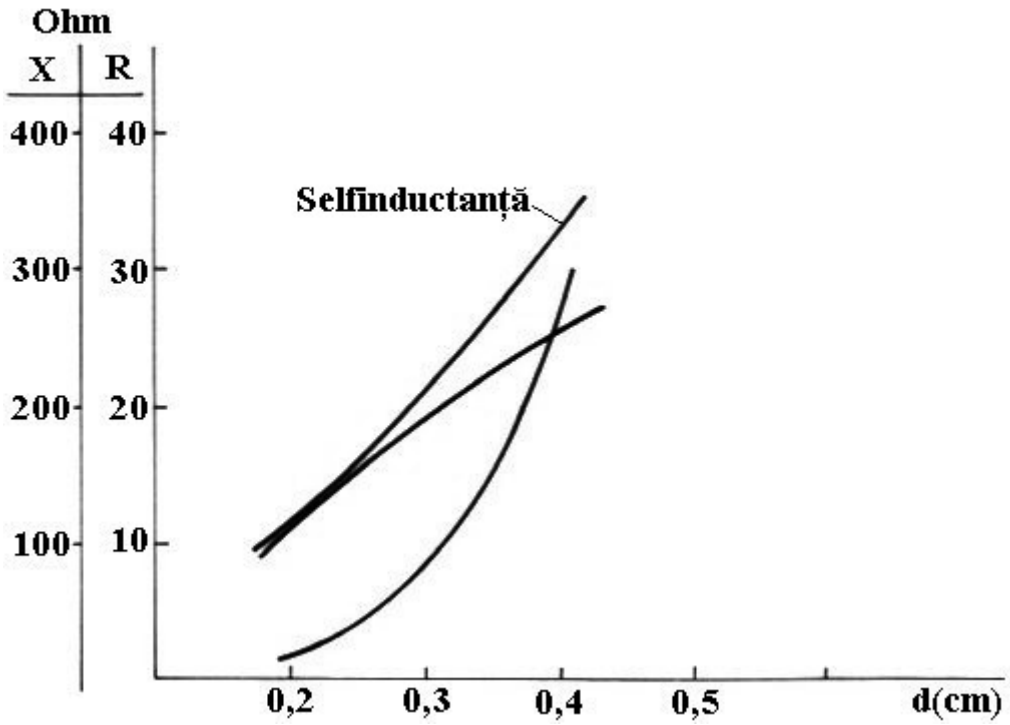



**Fig. 7.14. Variații ale rezistenței de radiație în funcție de diametrul buclei; ghid de bandă X, $\lambda_0$ = 3,14 cm, raza conductorului $r_c$ = 0,5 cm**

Variații ale rezistenței de radiație $R_{rad} = R_{inb}$ şi a reactanței inductive în funcție de raza buclei $r_b$ sunt arătate în Fig. 7.14; s-a considerat un ghid de bandă $X$ $(a = 22{,}86\ cm,\ b = 10{,}16\ cm)$

cu $\lambda_0 = 31{,}4\ mm$ şi $k_0 = 2\ cm^{-1}$; raza conductorului din care este realizată bucla semicirculară are valoarea $r_c = 0{,}5\ mm$. Se observă că selfinductanța $X_{00}$ are valori foarte mari. Astfel, prezența pistonului de scurtcircuit nu poate produce apariția unei reactanțe capacitive (care încarcă bucla) suficiente pentru a reduce total reactanța inductivă; reactanța capacitivă maximă care poate fi obținută este egală în valoare cu rezistența de radiație $R_{rad}$.

## 7.3. EXCITAREA GHIDURILOR PRIN APERTURI (FANTE)

### 7.3.1. Relații generale introductive

**1°. Considerente fizice introductive**

Acest tip de excitare a ghidurilor şi cavităților se realizează de regulă prin practicarea de aperturi în pereții ghidurilor şi/sau a cavităților rezonante (Fig. 7.15.); de asemenea aperturile (fantele) pot fi utilizate şi în cazul cuplajului dintre ghidul metalic şi o linie microstrip (Fig. 7.15c). În cazul ghidurilor metalice prin utilizarea unei rețele de aperturi adecvat dispuse, se obțin cuploare direcționale şi divizoare de putere, sisteme larg răspândite în echipamentele de microunde clasice.

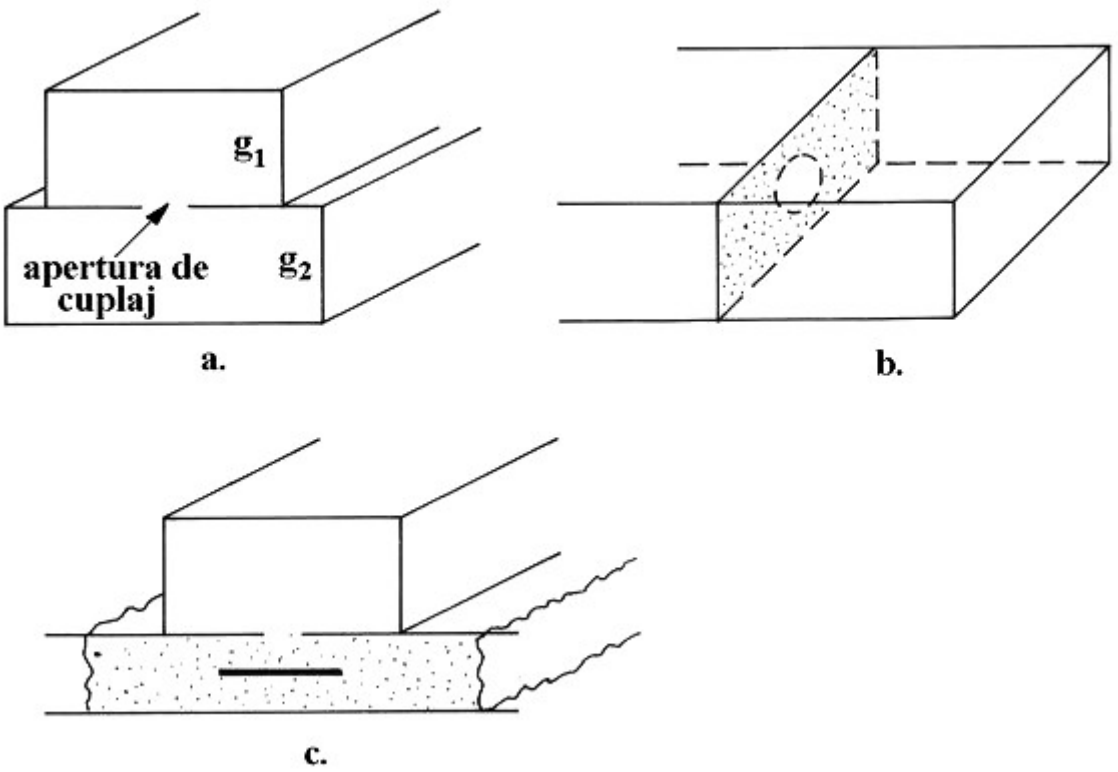



**fig. 7.15. Exemple de cuplaj prin aperturi: a – cuplaj între două ghiduri metalice; b – cuplaj ghid-cavitate; c – cuplaj ghid-linie microstrip**

Câmpul electromagnetic poate fi cuplat de la un ghid primar $g_1$ către unul secundar $g_2$ prin intermediul unei mici aperturi practicate în peretele comun (Fig. 7.16) aleasă într-o poziție convenabilă; aperturile cele mai utilizate pot avea forme circulare, eliptice, dreptunghiulare. În cazul aperturilor ce dimensiuni liniare mici în comparație cu lungimea de undă se poate dezvolta o teorie simplificată care statuează că o apertură mică este echivalentă cu o combinație de dipoli radianți infinitesimali, electric sau magnetic; momentele de dipol sunt proporționale cu componenta normală a câmpului electric, respectiv componenta tangențială ale câmpului magnetic al undei incidente care se propagă în ghidul primar $g_1$.

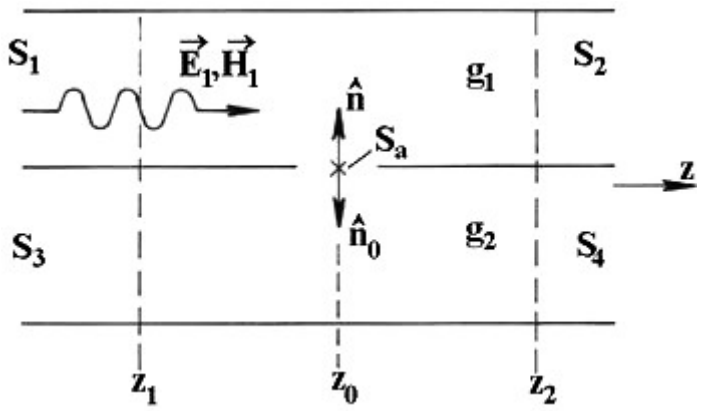



**Fig. 7. 16. Ghiduri cuplate printr-o apertură mică în peretele comun**

În limitele unor considerente introductive (fenomenologice) ne referim întâi, pe scurt, la procesele fizice elementare ce au loc în apertură şi în imediata vecinătate. Pătrunderea prin apertura practicată într-un perete metalic a componentei normale a câmpului $\vec{E}$ este schițată în Fig. 7.17b; structura respectivă a câmpului electric poate fi echivalată cu cea dată de doi curenți de polarizare electrică infinitesimali, normali pe peretele metalic şi de sens opus (Fig. 7.17c). Pătrunderea componentei tangențiale a câmpului $\vec{H}$ este schițată în Fig. 7.18b; structura câmpului magnetic poate fi echivalată cu cea dată de doi curenți de polarizare magnetică infinitesimali, paraleli cu peretele metalic şi orientați în sensuri opuse (Fig. 7.18c).

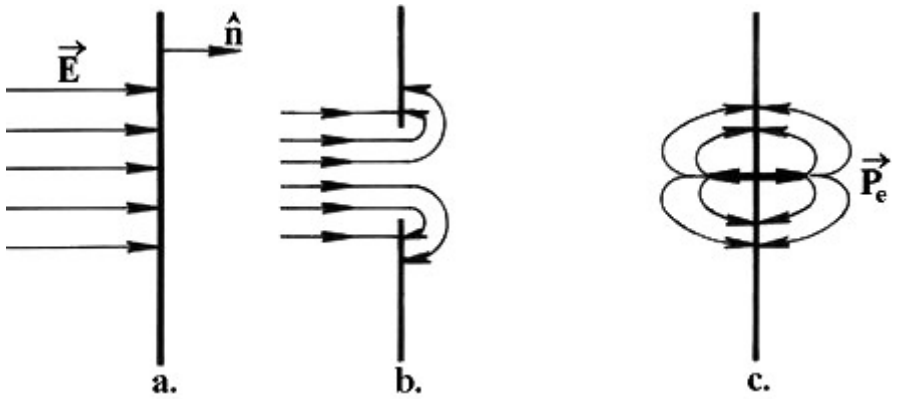



**Fig. 7.17. Ilustrarea vectorului de polarizare electrică (echivalent) la pătrunderea câmpului electric perpendicular printr-o apertură de dimensiuni mici: a – câmp electric normal pe un perete conductor; b – linii de câmp electric în vecinătatea aperturii; c – linii de câmp electric produse de vectorul echivalent de polarizare electrică**

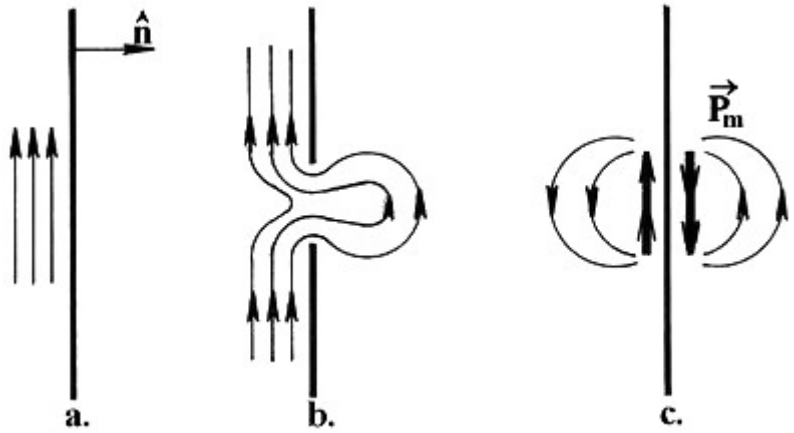



**Fig. 7.18. Ilustrarea vectorului de polarizare magnetică (echivalent) la pătrunderea câmpului magnetic tangențial printr-o apertură de dimensiuni mici: a – câmp magnetic tangențial la peretele metalic; b – linii de câmp magnetic în vecinătatea aperturii; c – linii de câmp magnetic produse de vectorul echivalent de polarizare magnetică**

Curenții de polarizare electrică $\vec{J}_{ep}$ şi cel de polarizare magnetică $\vec{J}_{mp}$ sunt definiți prin relațiile (1.2.16) şi (1.2.18); notând acești curenți $\vec{J}_{pol} = \vec{J}_{ep}$, $\vec{J}_{m\,pol} = \vec{J}_{mp}$ se poate scrie

$$\vec{J}_{ep} = j\omega\vec{P}_e \tag{7.3.1}$$

$$\vec{J}_{mp} = j\omega\mu_0\vec{P}_m \tag{7.3.2}$$

Asupra mărimilor $\vec{P}_e$ şi $\vec{P}_m$ sunt necesare câteva precizări: $\vec{P}_e = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$ este vectorul densitate de polarizare electrică $\left[C/m^2\right]$ şi reprezintă numărul de dipoli electrici pe unitate de volum iar $\vec{E}$ este câmpul electric aplicat asupra mediului considerat; $\vec{P}_m = \chi_m\vec{H}$ (notat prin $\vec{M}$ în (1.2.17)) este vectorul densitate de polarizare magnetică $\left[A/m\right]$ şi reprezintă numărul de dipoli magnetici pe unitate de volum iar $\vec{H}$ este câmpul magnetic aplicat. La rezolvarea problemelor unde $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ sunt câmpuri rezultante (locale) este convenabilă definirea vectorilor $\vec{P}_e$ şi $\vec{P}_m$ prin intermediul polarizabilităților, electrică $\alpha_e$, respectiv magnetică $\alpha_m$ (vezi Cap.8). Întrucât $\vec{P}_e$ şi $\vec{P}_m$ sunt momente echivalente de dipol electric, respectiv magnetic, se poate scrie

$$\vec{P}_e = \varepsilon_0\alpha_e\hat{n}E_n\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) \tag{7.3.3}$$

$$\vec{P}_m = -\alpha_m\vec{H}_T\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) \tag{7.3.4}$$

unde $\hat{n}E_n$ este componenta de câmp electric, normală pe apertură; $\vec{H}_T$ este componenta de câmp magnetic , tangențială la apertură; $\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)$ defineşte coordonatele de localizare ale aperturii. Mărimile $\alpha_e$ şi $\alpha_m$ reprezintă, sub formă generală, tensori de polarizabilitate şi sunt calculate în Cap. 8 pentru diferite medii; în cazul de față aceste mărimi sunt determinate de către forma şi dimensiunile aperturii: pentru o apertură circulară avem $\alpha_e = 2r_a^3/3$, $\alpha_m = 4r_a^3/3$, unde $r_a$ este raza aperturii; pentru o apertură dreptunghiulară avem $\alpha_e = \alpha_m = \pi cd^2/16$, unde c şi d sunt dimensiunile dreptunghiului.

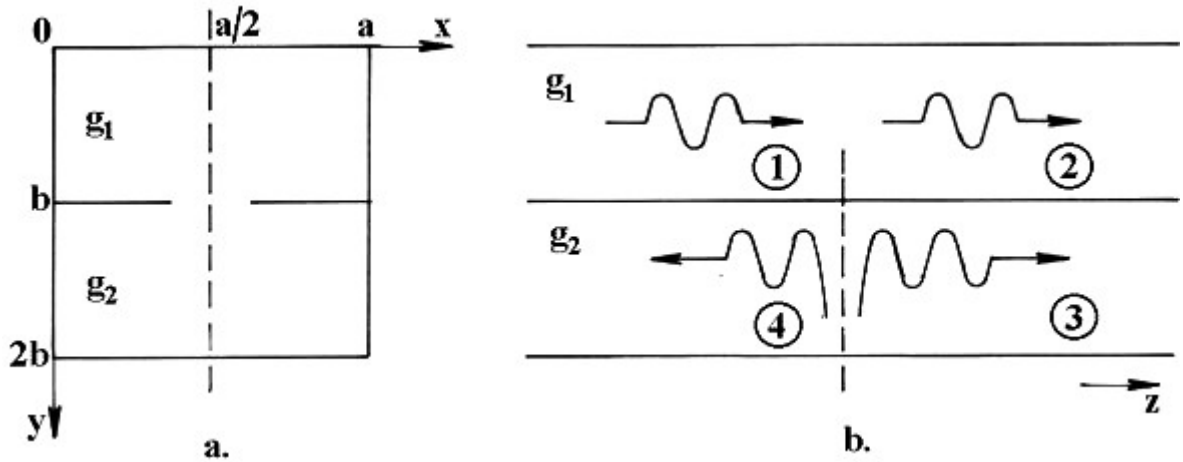



**Fig. 7. 19. Excitarea modului $TE_{10}$ printr-o apertură circulară în peretele mare comun la cele doua ghiduri: a – secțiune transversală; b – ilustrarea câmpurilor care se propagă în cele doua ghiduri**

Pentru exemplificarea considerentelor fenomenologice ne referim la o apertură circulară practicată în peretele mare, comun la cele două ghiduri (Fig.7.19). Presupunem că in ghidul $g_1$ se propagă modul $TE_{10}$ $(H_{10})$ în sensul +$z$, astfel câmpul incident este caracterizat prin componentele de interes $E_y$ şi $H_x$, având expresiile

$$\vec{E}_y = \hat{j}E_y = \hat{j}A_{10}\sin(\pi x/a)e^{-j\beta_{10}z} \tag{7.3.5}$$

$$\vec{H}_x = -\hat{i}H_x = \frac{-\hat{i}A_{10}}{Z_{10}}\sin(\pi x/a)e^{-j\beta_{10}z} \tag{7.3.6}$$

unde constanta de amplitudine $A_{10}$ este determinată de puterea transportată de unda incidentă (sau de condițiile de normare). Câmpul de excitare în centrul aperturii $(x = a/2,\ y = b,\ z = 0)$ este

$$E_y = A_{10;}\quad H_x = -A_{10}/Z_{10} \tag{7.3.7}$$

Ținând cont de definițiile (7.3.3), (7.3.4) şi de expresiile curenților de polarizare, se poate scrie

$$J_{epy} = j\omega\varepsilon_0\alpha_e A_{10}\delta(x-a/2)(y-b)\delta(z) \tag{7.3.8}$$

$$J_{mpx} = j\omega\mu_0\alpha_m(A_{10}/Z_{10})\delta(x-a/2)(y-b)\delta(z) \tag{7.3.9}$$

Câmpul excitat în ghidul $g_2$ se propagă sub formă de moduri $TE_{10}$, în ambele sensuri, $z<0$ şi $z>0$ (Fig. 7.19.b); componentele de interes $E_y$ şi $H_x$ au expresiile

$$E_y^- = A_{10}^-\sin(\pi x/a)e^{j\beta_{10}z} \tag{7.3.10}$$

$$H_x^- = \left(A_{10}^-/Z_{10}\right)\sin(\pi x/a)e^{j\beta_{10}z} \tag{7.3.11}$$

pentru $z<0$ şi

$$E_y^+ = A_{10}^+\sin(\pi x/a)e^{-j\beta_{10}z} \tag{7.3.12}$$

$$H_x^+ = \left(-A_{10}^+/Z_{10}\right)\sin(\pi x/a)e^{-j\beta_{10}z} \tag{7.3.13}$$

pentru $z>0$, unde: $A_{10}^+$, $A_{10}^-$ sunt constante de amplitudine (necunoscute) pentru undele directe, respectiv inverse.

Câmpul total în ghidul $g_2$ este excitat de ambii curenți de polarizare definiți prin (7.3.8) şi (7.3.9). Pentru determinarea constantelor de amplitudine $A_{10}^+$, $A_{10}^-$ se procedează similar ca în secțiunea 7.1.2. Aplicăm teorema de reciprocitate Lorentz sub formă integrală (AIII,(III.2.27)) şi considerăm prezenți ambii curenți de polarizare, avem

$$A_{10}^+ = \frac{-1}{P_{10}}\int_V\left(E_y^-J_{epy} - H_x^-J_{mpx}\right)dV = \frac{-j\omega A_{10}}{P_{10}}\left(\varepsilon_0\alpha_e - \frac{\mu_0\alpha_m}{Z_{10}^2}\right) \tag{7.3.14}$$

$$A_{10}^- = \frac{-1}{P_{10}}\int_V\left(E_y^+J_{epy} - H_x^+J_{mpx}\right)dV = \frac{-j\omega A_{10}}{P_{10}}\left(\varepsilon_0\alpha_e + \frac{\mu_0\alpha_m}{Z_{10}^2}\right) \tag{7.3.15}$$

unde $P_{10}$ este o constantă de normare având expresia $P_{10} = ab/Z_{10}$ ; ultimele două expresii pot fi privite ca generalizări ale unor relații de forma (7.1.60), (7.1.61). Relațiile (7.3.14) şi (7.3.15) arată că curentul de polarizare electrică (dipolul electric echivalent indus) excită acelaşi câmp în ambele direcții $z<0$ şi $z>0$, în timp ce curentul de polarizare magnetică (dipolul magnetic echivalent indus) excită câmpuri de faze opuse în direcțiile $z<0$ şi $z>0$.

**2°. Relații generale în cazul unei singure aperturi**

Studiul riguros al excitării ghidurilor prin aperturi este extrem de laborios şi se bazează pe utilizarea diferitelor variante ale principiului de echivalență (Love, Schelkunoff). Aici prezentăm principalele etape de calcul. Referindu-ne la Fig. 7.16 aceşti paşi sunt: considerăm întâi că apertura este închisă de un perete magnetic perfect; câmpul incident din ghidul $g_1$, considerat în absența

aperturii, va induce un curent magnetic $\vec{J}_m$ şi o sarcină magnetică $\rho_m$ pe suprafaţa peretelui magnetic, legate printr-o relaţie de continuitate de forma (1.2.14) $\nabla \cdot \vec{J}_m = -j\omega\rho_m$; aceste surse produc un câmp perturbator (scattered) în ghidul $g_1$, care se poate exprima ca un câmp radiat de către distribuţia de surse; după determinarea câmpului perturbator se deschide apertura plasându-se în ea curentul $-\vec{J}_m$. Câmpul radiat de către această sursă în ambele sensuri, împreună cu câmpul incident reprezintă soluţia totală unică a problemei de cuplaj; câmpul total obţinut posedă componente tangenţiale $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ care sunt continue pe deschiderea aperturii.

Considerând apertura închisă de un perete magnetic se presupune un mod normal incident pe apertură $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$ propagându-se de la stânga spre dreapta. Ca urmare a discontinuităţii de perete magnetic este excitat un câmp perturbator $(\vec{E}_s, \vec{H}_s)$ de o asemenea manieră încât câmpul total să satisfacă următoarele condiţii la limită pe peretele magnetic din deschiderea aperturii (vezi (1.3.57))

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 + \vec{H}_s) = 0; \quad \hat{n} \times \vec{H}_s = -\hat{n} \times \vec{H}_1 \tag{7.3.16}$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 + \vec{E}_s) = 0; \quad \hat{n} \cdot \vec{E}_s = -\hat{n} \cdot \vec{E}_1 \tag{7.3.17}$$

Componenta normală de câmp magnetic precum şi componenta tangenţială de câmp electric nu sunt zero pe deschiderea aperturii; prin urmare vor exista o sarcină magnetică $\rho_m$ şi o distribuţie de curent magnetic $\vec{J}_m$, definite prin relaţiile (1.3.47), (1.3.50)

$$\rho_m = \mu_0 \hat{n} \cdot \vec{H}_s \tag{7.3.18}$$

$$-\vec{J}_m = \hat{n} \times \vec{E}_s \tag{7.3.19}$$

Pentru câmpul incident $(\vec{E}_1, \vec{H}_1)$ avem $\hat{n} \times \vec{E}_1 = 0$, $\hat{n} \cdot \vec{H}_1 = 0$, deoarece s-a presupus că $\vec{E}_1$ şi $\vec{H}_1$ sunt determinate când apertura este închisă (perete electric, (1.3.56)).

Câmpul de împrăştiere $(\vec{E}_s, \vec{H}_s)$ poate fi dezvoltat în moduri normale (similar cu (7.1.54)): pentru $z > 0$ avem

$$\vec{E}_s^+ = \sum_p A_p \vec{E}_p^+ \tag{7.3.20}$$

$$\vec{H}_s^+ = \sum_p A_p H_p^+ \tag{7.3.21}$$

iar pentru $z < 0$ se scrie

$$\vec{E}_s^- = \sum_p B_p \vec{E}_p^- \tag{7.3.22}$$

$$\vec{H}_s^- = \sum_p B_p \vec{H}_p^- \tag{7.3.23}$$

unde: indicele $p$ desemnează orice mod posibil *TE* sau *TM*; câmpurile $\vec{E}_p$, $\vec{H}_p$ sunt funcţii ale modurilor normale şi satisfac ecuaţii de propagare Helmholtz fără surse.

Câmpurile perturbatoare (de împrăştiere) satisfac ecuaţiile Maxwell de evoluţie de forma

$$\nabla \times \vec{E}_s = -j\omega\mu_0 \vec{H}_s - \vec{J}_m \tag{7.3.24}$$

$$\nabla \times \vec{H}_s = j\omega\varepsilon_0 \vec{E}_0 \tag{7.3.25}$$

Prin aplicarea teoremei de reciprocitate Lorentz de forma

$$\int_{S_a} (\vec{E}_p^{\pm} \times \vec{H}_s^+ - \vec{E}_s^+ \times \vec{H}_p^{\pm}) \cdot \hat{n} ds = -\int_V \vec{J}_m \cdot \vec{H}_p^{\pm} dV \tag{7.3.26}$$

pentru coeficienții de dezvoltare în moduri normale $A_p$, $B_p$ se obține

$$2B_p = \int_{S_a} \vec{H}_p^+ \cdot \vec{J}_m ds \tag{7.3.27}$$

$$2A_p = \int_{S_a} \vec{H}_p^- \cdot \vec{J}_m ds \tag{7.3.28}$$

unde $S_a$ este aria aperturii.

Revenim la discuția proceselor fizice de cuplaj efectiv între cele două ghiduri. Atunci când apertura este deschisă câmpul din ghidul $g_2$ este radiat de către un curent echivalent $-\vec{J}_m$ (7.3.19) pe aria aperturii. Câmpul din ghidul $g_1$ va fi suma totală a câmpului radiat de $-\vec{J}_m$ şi câmpul $\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_s\right)$, $\left(\vec{H}_1 + \vec{H}_s\right)$ existent în $g_1$ când s-a presupus apertura închisă de un perete magnetic; admitem că câmpul radiat de curentul magnetic echivalent $-\vec{J}_m$ este $\left(\vec{E}_{s1}, \vec{H}_{s1}\right)$ în ghidul $g_1$ şi $\left(\vec{E}_{s2}, \vec{H}_{s2}\right)$ în ghidul $g_2$. Pe apertură câmpul magnetic total trebuie să fie continuu, deci ținând cont de condițiile (7.3.16) avem

$$\hat{n}_0 \times \vec{H}_{s2} = \hat{n}_0 \times \left(\vec{H}_{s1} + \vec{H}_s + \vec{H}_1\right) = \hat{n}_0 \times \vec{H}_{s1} \tag{7.3.29}$$

unde normala pe apertură $\hat{n}_0$ este îndreptată de la ghidul $g_1$ spre ghidul $g_2$; de asemenea, şi câmpul electric total trebuie să fie continuu, astfel ținând cont de (7.3.17) şi (7.3.19) avem

$$\hat{n}_0 \times \vec{E}_{s2} = \hat{n}_0 \times \left(\vec{E}_{s1} + \vec{E}_s + \vec{E}_1\right); \quad \hat{n}_0 \times \left(\vec{E}_{s1} - \vec{E}_{s2}\right) = -\vec{J}_m \tag{7.3.30}$$

Câmpul din ghidul $g_2$ poate fi dezvoltat în moduri normale: pentru $z > 0$ avem

$$\begin{aligned} \vec{E}_{s2}^+ &= \sum_p C_p \vec{E}_{p2}^+ \\ \vec{H}_{s2}^+ &= \sum_p C_p \vec{H}_{p2}^+ \end{aligned} \tag{7.3.31}$$

iar pentru $z < 0$ se poate scrie

$$\begin{aligned} \vec{E}_{s2}^- &= \sum_p D_p \vec{E}_{p2}^- \\ \vec{H}_{s2}^- &= \sum_p D_p \vec{H}_{p2}^- \end{aligned} \tag{7.3.32}$$

Dacă ghidurile $g_1$ şi $g_2$ sunt identice atunci $-\vec{J}_m$ va radia câmpuri identice în cele două ghiduri; coeficienții de dezvoltare în moduri normale $C_p$, $D_p$ pot fi determinați prin relații similare cu (7.3.27) şi (7.3.28), însă trebuie ținut cont de faptul că componenta normală şi cea tangențială a câmpului magnetic într-un ghid ($g_1$ sau $g_2$) suferă numai jumătate din saltul de discontinuitate pe regiunea de sursă față de cel suferit ce câmpurile $\vec{E}_s$ şi $\vec{H}_s$. Momentele de dipol efective asociate cu curentul $-\vec{J}_m$ şi sarcina magnetică care radiază în ghidul $g_2$ sunt $-\vec{P}_{0m} = -\vec{P}_m/2$ şi $-\vec{P}_{0e} = -\vec{P}_e/2$; o jumătate din discontinuitate din regiunea de sursă este produsă de câmpurile $\left(\vec{E}_{s2}, \vec{H}_{s2}\right)$ iar cealaltă jumătate de câmpurile $\left(\vec{E}_{s1}, \vec{H}_{s1}\right)$. Rezultă că câmpul total în ghidul $g_1$ este echivalent cu suma câmpului incident $\left(\vec{E}_1, \vec{H}_1\right)$ şi a celui dat de către dipolii de amplitudine $\vec{P}_{0m}$ şi $\vec{P}_{0e}$; câmpul radiat de dipolii $-\vec{P}_{0m}$ şi $-\vec{P}_{0e}$ anulează jumătate din câmpul $\left(\vec{E}_s, \vec{H}_s\right)$ radiat de dipolii $\vec{P}_m$ şi $\vec{P}_e$.

Câmpul perturbator în ghidul $g_1$ este radiat de către dipolii $\vec{P}_{0e} = \vec{P}_e/2$, $\vec{P}_{0m} = \vec{P}_m/2$; conform teoriei propuse de Bethe aceşti dipoli induşi pot fi exprimați în funcție de câmpul incident

$\left(\vec{E}_1, \vec{H}_1\right)$ sub forma

$$\vec{P}_{0e} = \varepsilon_0 \alpha_e \hat{n}\hat{n} \cdot \vec{E}_1 \tag{7.3.33}$$

$$\vec{P}_{0m} = \overline{\overline{\alpha}}_m \cdot \vec{H}_1 \tag{7.3.34}$$

unde: $\vec{P}_{0e}$, $\vec{P}_{0m}$ sunt consideraţi egali cu dipolii induşi de $\vec{E}_1$ şi $\vec{H}_1$; $\alpha_e$ este polarizabilitatea electrică; $\overline{\overline{\alpha}}_m$ este funcţia diadică a polarizabilităţii magnetice. Determinarea exactă a polarizabilităţilor $\alpha_e$ şi $\overline{\overline{\alpha}}_m$ pentru aperturi de formă oarecare constituie probleme extrem de laborioase, care depăşesc tematica lucrării de faţă; mai jos se prezintă câteva relaţii de interes. În cazul aperturii eliptice, având semiaxele $l_1$ şi $l_2$ se obţine [3]

$$\alpha_e = \frac{\pi l_1^3 \left(1 - e^2\right)}{3E(e)} \tag{7.3.35}$$

$$\overline{\overline{\alpha}}_m = \hat{a}_u \hat{a}_u \frac{\pi l_1^3 e^2}{3[K(e) - E(e)]} + \hat{a}_v \hat{a}_v \frac{\pi l_1^3 e^2 \left(1 - e^2\right)}{3\left[E(e) - \left(1 - e^2\right)K(e)\right]} \tag{7.3.36}$$

unde: $e = \left(1 - l_2^2 / l_1^2\right)^{1/2}$ reprezintă excentricitatea elipsei; *u, v, w* sunt coordonatele locale ale elipsei iar $\hat{a}_u$, $\hat{a}_v$ sunt versorii pe direcţiile respective; $K(e)$ şi $E(e)$ reprezintă integrale eliptice complete (de modul *e*) de ordinul întâi, respectiv al doilea. Pentru valori mici ale excentricităţii integralele eliptice devin

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{e^2}{4}\right); \quad E = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{e^2}{4}\right) \tag{7.3.37}$$

unde s-a considerat că *u* este orientat după axa mare $l_1$ a elipsei. În cazul aperturii circulare $(e = 0)$, avem $l_1 = l_2 = r_a$, astfel se poate scrie

$$\alpha_e = (-2/3) r_a^3 \tag{7.3.38}$$

$$\overline{\overline{\alpha}}_m = (4/3) r_a^3 \left(\hat{a}_u \hat{a}_u + \hat{a}_v \hat{a}_v\right) \tag{7.3.39}$$

Un alt aspect fizic important care trebuie luat în considerare, în special la verificarea legii conservării energiei electromagnetice la cuplajul dintre două ghiduri este conceptul de *câmp de reacţie* $\left(\vec{E}_r, \vec{H}_r\right)$. Notăm prin $\left(\vec{E}_{g1}, \vec{H}_{g1}\right)$ câmpul generator, incident în ghidul $g_1$ în absenţa aperturii; de asemenea, notăm prin $\left(\vec{E}_{g2}, \vec{H}_{g2}\right)$ câmpul în ghidul $g_2$. Problema cuplajului constă în specificarea intensităţii dipolilor echivalenţi induşi care radiază în ghidul $g_1$, respectiv $g_2$. Intensităţile acestor dipoli se exprimă ca

$$\vec{P}_{0e} = \mp \varepsilon_0 \alpha_e \cdot \left(\vec{E}_{g1} - \vec{E}_{g2} + \vec{E}_{1r} - \vec{E}_{2r}\right) \tag{7.3.40}$$

$$\vec{P}_{0m} = \mp \alpha_m \cdot \left(\vec{H}_{g1} - \vec{H}_{g2} + \vec{H}_{1r} - \vec{H}_{2r}\right) \tag{7.3.41}$$

unde semnul minus se aplică la ghidul $g_2$ iar semnul plus se aplică la ghidul $g_1$. Câmpurile de reacţie $\vec{E}_{1r}$, $\vec{H}_{1r}$ reprezintă câmpuri de mod dominant produse de dipolii induşi $\vec{P}_{0e}$, $\vec{P}_{0m}$ în ghidul $g_1$ şi evaluate în centrul aperturii; la rândul lor câmpurile de reacţie $\vec{E}_{2r}$, $\vec{H}_{2r}$ reprezintă câmpurile de mod dominant produse de dipolii $-\vec{P}_{0e}$, $-\vec{P}_{0m}$, care sunt radiate în ghidul $g_2$.

### 7.3.2 Cuplajul modului $TE_{10}$ prin aperturi eliptice

Considerăm două ghiduri metalice rectangulare având în comun peretele mic (Fig. 7.20); cuplajul se efectuează printr-o apertură eliptică cu semiaxele $l_1$ şi $l_2$. Celor două ghiduri li se ataşează sistemele de coordonate $(x_1, y_1, z_1)$, respectiv $(x_2, y_2, z_2)$ iar centrul aperturii este plasat la $z_1 = z_2 = 0,\ y_1 = y_2 = b/2$ şi $x_1 = 0,\ x_2 = a$. Admiţând că în ghidul $g_1$ există un mod $H_{10}$ incident, se presupune că numai modul $H_{10}$ se propagă, astfel urmează să evaluăm numai amplitudinile modurilor perturbatoare $H_{10}$. Funcţiile normate ale modului $H_{10}$ sunt de forma (vezi (7.1.54))

$$\begin{aligned} \vec{E}_{10}^{+} &= \vec{e}_{10} e^{-\gamma_{10} z} \\ \vec{E}_{10}^{-} &= \vec{e}_{10} e^{\gamma_{10} z} \\ \vec{H}_{10}^{+} &= \left(\vec{h}_{10} + \vec{h}_{z10}\right) e^{-\gamma_{10} z} \\ \vec{H}_{10}^{-} &= \left(-\vec{h}_{10} + \vec{h}_{z10}\right) e^{\gamma_{10} z} \end{aligned} \tag{7.3.42}$$

unde

$$\begin{aligned} \vec{e}_{10} &= \hat{j} e_{10};\ e_{10} = -jk_0 Z_0 \left(\frac{2}{jk_0 ab\gamma_{10} Z_0}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ \vec{h}_{10} &= \hat{i} h_{10};\ h_{10} = \gamma_{10} \left(\frac{2}{jk_0 ab\gamma_{10} Z_0}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \\ \vec{h}_{z10} &= \hat{k} h_{z10};\ h_{z10} = \left(\frac{2}{jk_0 ab\gamma_{10} Z_0}\right)^{1/2} \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \end{aligned} \tag{7.3.43}$$

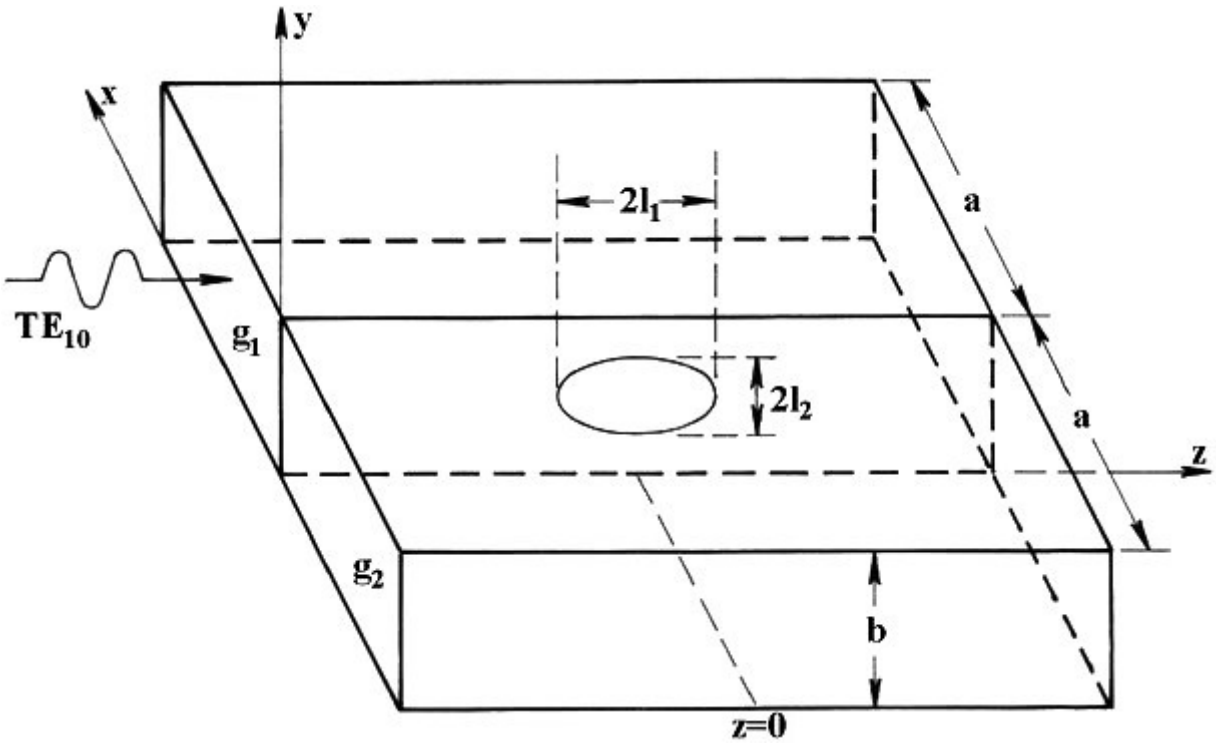



**Fig. 7.20. Cuplajul modului $TE_{10}$ prin apertura eliptică în peretele mic (comun) al ghidurilor**

Notăm câmpul incident în ghidul $g_1$ prin $\left(A_{10}\vec{E}_{10}^{+}, A_{10}\vec{H}_{10}^{+}\right)$ unde $A_{10}$ este o constantă de amplitudine. Câmpul incident $TE_{10}$ nu are componentă de câmp electric normală pe apertură, prin urmare nu va exista un dipol electric indus, $\vec{P}_{e0} = 0$; în schimb câmpul magnetic incident are o componentă tangenţială pe direcţia axei mari a elipsei, astfel va exista un dipol magnetic indus,

direcționat după axa *z*, $\vec{P}_{0m} = \hat{k}P_{0m}$; acest dipol va produce în ghidul $g_1$ un câmp perturbator având expresia

$$\vec{H}_{s1} = \begin{cases} (j\omega\mu_0/2)\vec{H}_{10}^{-} \cdot \vec{P}_{0m}\vec{H}_{10}^{+} \ , & z > 0 \\ (j\omega\mu_0/2)\vec{H}_{10}^{+} \cdot \vec{P}_{0m}\vec{H}_{10}^{-} \ , & z < 0 \end{cases} \tag{7.3.44}$$

Acest câmp are componentă după *z*, în centrul aperturii, de forma

$$H_{s1z} = \frac{\pi^2 P_{0m}}{\gamma_{10} a^3 b} = H_{r1} \tag{7.3.45}$$

Dipolul $-\vec{P}_{0m} = -\hat{k}P_{0m}$ care radiază în ghidul $g_2$ produce un câmp perturbator de forma

$$H_{s2z} = -\frac{\pi^2 P_{0m}}{\gamma_{10} a^3 b} = H_{r2} \tag{7.3.46}$$

unde $H_{r1}, H_{r2}$ sunt câmpuri de reacție definite prin relațiile (7.3.40), (7.3.41); ținând cont de aceste relații și de (7.3.33), (7.3.34), intensitatea dipolului magnetic indus $P_{0m}$ capătă expresia

$$P_{0m} = \frac{\alpha_m A_{10}(\pi/a)(2/jk_0\gamma_{10}abZ_0)^{1/2}}{1 - \alpha_m\left(2\pi^2/\gamma_{10}a^3 b\right)} \tag{7.3.47}$$

Problema practică care prezintă interes constă în determinarea coeficientului de transmisie între ghidurile $g_1$ și $g_2$. În acest scop vom utiliza expresii convenabile pentru câmpurile perturbatoare în cele două ghiduri de undă:

- în ghidul $g_1$

$$\vec{E}_{s1} = a_1\vec{E}_{10}^{+}, \ \vec{H}_{s1} = a_1\vec{H}_{10}^{+} \quad , \quad z > 0 \tag{7.3.48}$$

$$\vec{E}_{s1} = b_1\vec{E}_{10}^{-}, \ \vec{H}_{s1} = b_1\vec{H}_{10}^{-} \quad , \quad z < 0 \tag{7.3.49}$$

- în ghidul $g_2$

$$\vec{E}_{s2} = c_1\vec{E}_{10}^{+}, \ \vec{H}_{s2} = c_1\vec{H}_{10}^{+} \quad , \quad z > 0 \tag{7.3.50}$$

$$\vec{E}_{s2} = d_1\vec{E}_{10}^{-}, \ \vec{H}_{s2} = d_1\vec{H}_{10}^{-} \quad , \quad z < 0 \tag{7.3.51}$$

Ținând cont de (7.3.44), (7.3.41) și de (7.3.43), în cazul de față pentru ghidul $g_1$ se poate scrie

$$\begin{aligned} 2b_1 &= j\omega\mu_0\vec{H}_{10}^{+} \cdot \vec{P}_{0m} = j\omega\mu_0\vec{h}_{z10} \cdot \vec{P}_{0m} \\ 2a_1 &= j\omega\mu_0\vec{H}_{10}^{-} \cdot \vec{P}_{0m} = j\omega\mu_0\vec{h}_{z10} \cdot \vec{P}_{0m} = 2b_1 \end{aligned} \tag{7.3.52}$$

Procedând similar pentru ghidul $g_2$ se obține

$$\begin{aligned} 2c_1 &= -j\omega\mu_0\vec{H}_{10}^{-} \cdot \vec{P}_{0m} = -j\omega\mu_0\vec{h}_{z10} \cdot \vec{P}_{0m} \\ 2d_1 &= -j\omega\mu_0\vec{H}_{10}^{+} \cdot \vec{P}_{0m} = 2c_1 \end{aligned} \tag{7.3.53}$$

În sistemul de coordonate ales (Fig. 7.20), pentru ghidul $g_1$ avem $x = 0$, iar pentru ghidul $g_2$ avem $x = a$; astfel ultima relație din (7.3.43) se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} \vec{h}_{z10} &= \left(\frac{2}{jk_0\gamma_{10}abZ_0}\right)^{1/2}\frac{\pi}{a}\hat{k} \quad \text{pentru ghidul } g_1 \\ \vec{h}_{z10} &= -\left(\frac{2}{jk_0\gamma_{10}abZ_0}\right)^{1/2}\frac{\pi}{a}\hat{k} \quad \text{pentru ghidul } g_2 \end{aligned} \tag{7.3.54}$$

prin urmare avem $c_1 = d_1 = a_1 = b_1$. Trebuie observat că componentele tangențiale de câmp magnetic ale undelor de perturbație în cele două ghiduri sunt de semn opus la nivelul aperturii; acest fapt era de aşteptat deoarece diferența dintre ele este egală cu componenta tangențială de câmp magnetic incident.

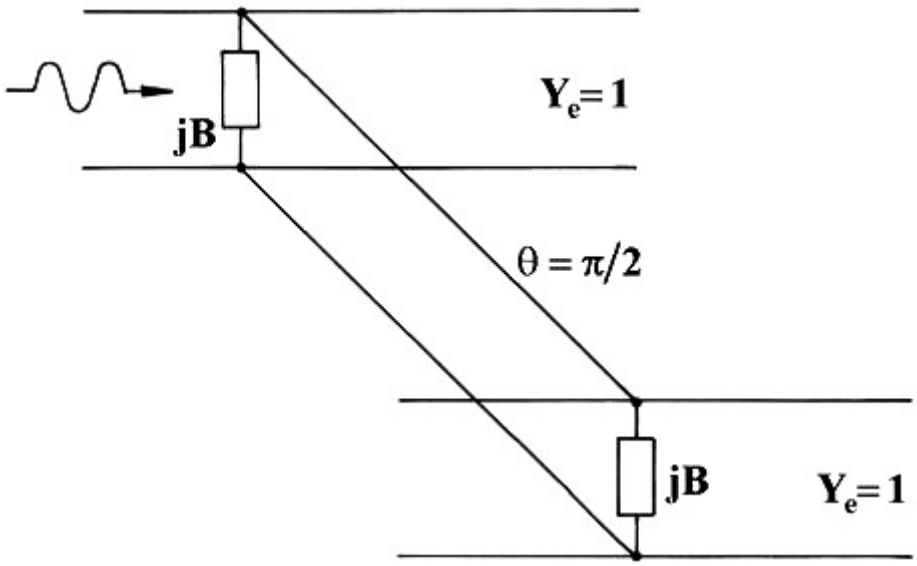



**Fig.7. 21. Circuit echivalent asociat aperturii de cuplaj din Fig. 7.20**

Câmpul total în ghidul $g_1$ reprezintă suma dintre câmpul incident şi cel perturbator. Se introduce un coeficient de reflexie $\Gamma$ definit prin relația $b_1 = \Gamma A_{10}$, astfel se obține

$$\Gamma = \frac{-j\alpha_m \pi^2 / \left(\beta_{10} a^3 b\right)}{1 + 2j\alpha_m \pi^2 / \left(\beta_{10} a^3 b\right)} \tag{7.3.55}$$

în care $\alpha_m$ reprezintă primul termen din (7.3.36) iar $\gamma_{10}$ a fost înlocuit prin $j\beta_{10}$ (s-a considerat ghid fără pierderi). Pe baza considerentelor expuse mai sus se constată că coeficientul de transmisie $T_{12}$ a câmpului din ghidul $g_1$ în ghidul $g_2$ pentru modul dominant $TE_{10}$ este egal cu coeficientul de reflexie definit prin relația (7.3.55), deci $T_{12} = \Gamma$. Pe baza unui circuit echivalent asociat aperturii de cuplaj (Fig. 7.21) [3], care consideră că ghidurile $g_1$ şi $g_2$ sunt echivalente cu două linii de transmisie având admitanțele caracteristice normate, $Y_e = 1$, iar la nivelul aperturii sunt conectate susceptanțele normate *jB*; cuplajul dintre cele două ghiduri este asigurat printr-o linie de cuplaj având lungimea electrică $\theta = \pi/2$ şi admitanța $Y_{lc} = B$. Admitanța de intrare văzută de la ghidul $g_1$ este

$$\underline{Y}_{in} = 1 + jB + \frac{B^2}{2 + jB} = \frac{2 + j3B}{2 + jB} \tag{7.3.56}$$

Coeficientul de reflexie se defineşte similar ca în secțiunea 3.1.2

$$\underline{\Gamma} = \frac{1 - \underline{Y}_{in}}{1 + \underline{Y}_{in}} = \frac{-j(B/2)}{1 + jB} \tag{7.3.57}$$

Comparând cu (7.3.55) se obține susceptanța normată

$$B = \frac{2\pi^3 l_1^3 e^2}{3\beta_{10} a^3 b\left[K(e) - E(e)\right]} = \frac{2\alpha_m \pi^2}{\beta_{10} a^3 b} \tag{7.3.58}$$

unde $K(e)$ şi $E(e)$ au expresiile (7.3.37).
Conform circuitului echivalent din Fig. 7.21 se constată că între câmpul transmis în ghidul $g_2$ şi câmpul incident există un defazaj de $\pi/2$.

### 7.3.3 Excitarea ghidurilor metalice prin intermediul aperturii în peretele transversal

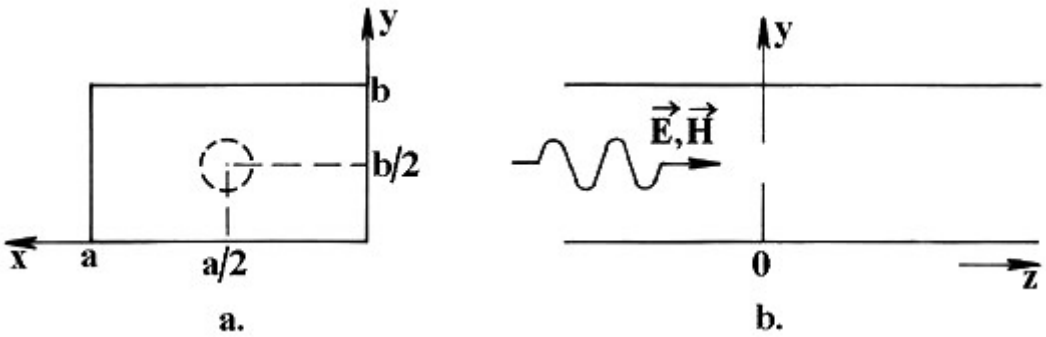



**Fig. 7.22. Excitarea ghidurilor prin apertură în peretele transversal:**
**a – secţiune transversală; b – secţiune longitudinală**

Considerăm două ghiduri metalice infinite, de aceiaşi secţiune transversală cuplate printr-o apertură circulară practicată în peretele transversal comun (Fig. 7.22); în ghiduri se propagă modul dominant $TE_{10}$. Având în vedere că la procesele de excitaţie prin apertură participă numai componentele normale de câmp electric şi cele tangenţiale de câmp magnetic, pentru determinarea momentelor echivalente (induse) de dipol se ia în considerare numai componenta $H_x$ a câmpului magnetic (componenta normală pe apertură $E_z$ este zero şi conform (7.3.3) momentul de dipol electric este zero, $\vec{P}_e = 0$). La apertură au loc procese de transmisie şi reflexie ilustrate în Fig. 7.23. Admiţând că apertura este închisă câmpul electromagnetic, incident şi reflectat în regiunea $z < 0$, poate fi descris prin relaţiile

$$\vec{E}_y = \hat{j}E_y; \quad E_y = A\left(e^{-j\beta_{10}z} - e^{j\beta_{10}z}\right)\sin(\pi x/a) \tag{7.3.59}$$

$$\vec{H}_x = \hat{i}H_x; \quad H_x = \left(-A/Z_0\right)\left(e^{-j\beta_{10}z} - e^{j\beta_{10}z}\right)\sin(\pi x/a) \tag{7.3.60}$$

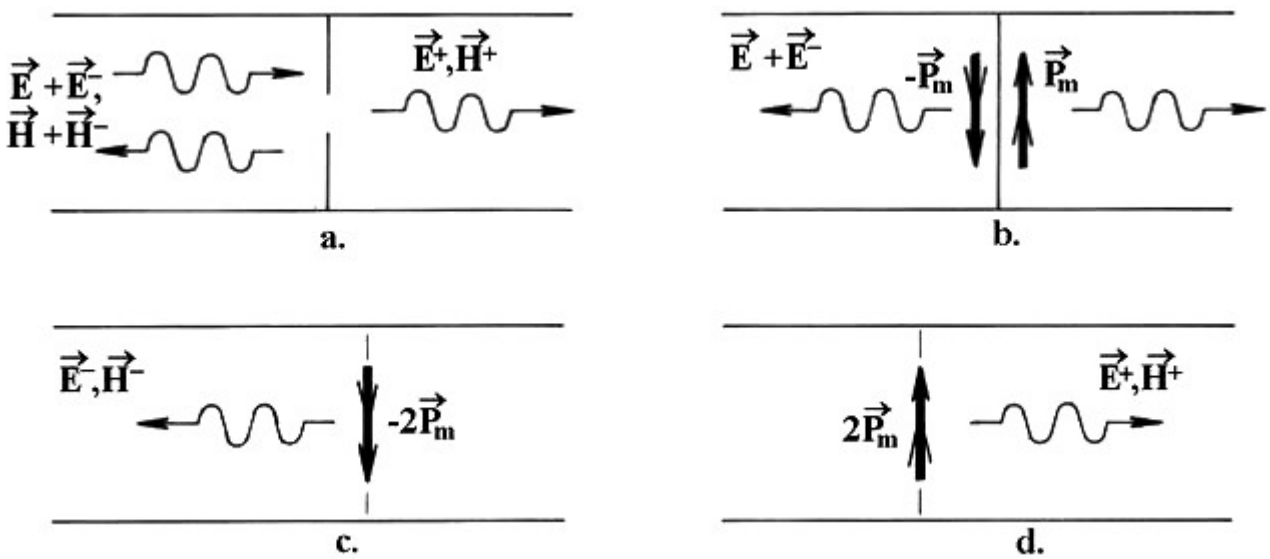



**Fig. 7.23. Procese de transmisie şi reflexie la excitarea prin apertură în peretele transversal: a – procese fizice elementare; b – vectorii echivalenţi de polarizare magnetică; c, d – detalierea teoremei imaginii**

Dacă considerăm că apertura este deschisă singurul moment de dipol indus este $\vec{P}_m$, care are expresia

$$\vec{P}_m = -\hat{i}\,\alpha_m H_x \delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta(z) = \hat{i}\,\frac{2A\alpha_m}{Z_{10}}\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta(z) \qquad (7.3.61)$$

Câmpul perturbator produs de acest dipol indus este $\left(\vec{E}^-,\vec{H}^-\right)$ în regiunea $z<0$ (ghidul $g_1$) şi $\left(\vec{E}^+,\vec{H}^+\right)$ în regiunea $z>0$ (ghidul $g_2$); în regiunea $z<0$ câmpul $\left(\vec{E}^-,\vec{H}^-\right)$ se suprapune cu cel incident (Fig. 7.23a). Se poate considera că câmpurile perturbatoare în vecinătatea aperturii sunt produse de către dipolii induşi $-\vec{P}_m$ şi $\vec{P}_m$, dispuşi de o parte şi de cealaltă a unui perete metalic, aşa cum este ilustrat prin modelul din Fig.7.23b; Pe baza teoriei imaginii peretele conductor poate fi îndepărtat fapt ce duce la dublarea intensităţii dipolilor echivalenţi (Fig. 7.23c,d).

Ţinând cont de teorema de reciprocitate şi de faptul că singurul curent de polarizare este

$$\vec{J}_{mp} = j\omega\mu_0\vec{P}_m = \hat{i}\,\frac{2j\omega\mu_0 A\alpha_m}{Z_{10}}\delta\left(x-\frac{a}{2}\right)\delta\left(y-\frac{b}{2}\right)\delta(z) \qquad (7.3.62)$$

se pot scrie relaţii generale, similare cu (7.1.60), (7.1.63)

$$A_p^+ = \frac{1}{P_p}\int_V \vec{H}_p^-\cdot\vec{J}_{mp}dV = \frac{1}{P_p}\int_V\left(-\vec{h}_p+\hat{k}h_{zp}\right)\cdot\vec{J}_{mp}e^{j\beta_p z}dV \qquad (7.3.63)$$

$$A_p^- = \frac{1}{P_p}\int_V \vec{H}_p^+\cdot\vec{J}_{mp}dV = \frac{1}{P_p}\int_V\left(\vec{h}_p+\hat{k}h_{zp}\right)\cdot\vec{J}_{mp}e^{-j\beta_p z}dV \qquad (7.3.64)$$

unde $p$ specifică modul de propagare. Particularizând pentru modul $TE_{10}$ $\left(\vec{h}_p=\vec{h}_{10}=\hat{i}h_{10x}\right.$, $\left.\vec{h}_{zp}=0\right)$ avem

$$A_{10}^+ = \frac{-1}{P_{10}}\int_V \vec{h}_{10}\cdot\left(2j\omega\mu_0\vec{P}_m\right)dV = \frac{j4A\beta_{10}\alpha_m}{ab} \qquad (7.3.65)$$

$$A_{10}^- = \frac{-1}{P_{10}}\int_V \vec{h}_{10}\cdot\left(-2j\omega\mu_0\vec{P}_m\right)dV = \frac{j4A\beta_{10}\alpha_m}{ab} \qquad (7.3.66)$$

în care s-a utilizat $\vec{h}_{10}=\left(-\hat{i}/Z_{10}\right)sin(\pi x/a)$ şi $P_{10}=ab/Z_{10}$. Câmpul total va fi descris de relaţiile

$$E_y = \left[Ae^{-j\beta_{10}z}+\left(A_{10}^- - A\right)e^{j\beta_{10}z}\right]sin(\pi x/a) \qquad (7.3.67)$$

$$H_x = \left(1/Z_{10}\right)\left[-Ae^{-j\beta_{10}z}+\left(A_{10}^- - A\right)e^{j\beta_{10}z}\right]sin(\pi x/a) \qquad (7.3.68)$$

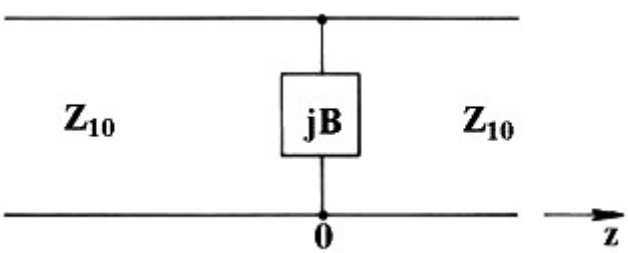



**Fig. 7.24. Circuit echivalent al aperturii în peretele transversal**

Coeficientul de reflexie şi cel de transmisie sunt definiţi prin relaţiile

$$\underline{\Gamma} = \frac{A_{10}^- - A}{A} = \frac{j4\beta_{10}\alpha_m}{ab} - 1 \qquad (7.3.69)$$

$$\underline{T}_{12} = \frac{A_{10}^{+}}{A} = \frac{j4\beta_{10}\alpha_m}{ab} \tag{7.3.70}$$

Trebuie observat că $|\underline{\Gamma}| > 1$, fapt irealizabil fizic, situație ce decurge din aproximările utilizate. Pentru explicare se efectuează o comparație a expresiei (7.3.69) cu coeficientul de reflexie al unei linii de transmisie pe care se conectează o susceptanță normată *jB* (Fig. 7.24). În cazul valorilor ridicate ale susceptanței coeficientul de reflexie al acestei linii se poate aproxima sub forma

$$\underline{\Gamma} = \frac{1-\underline{Y}_{in}}{1+\underline{Y}_{in}} = \frac{1-(1+jB)}{1+(1+jB)} = \frac{-jB}{2+jB} \cong -1-\frac{j2}{B} \tag{7.3.71}$$

Comparând cu (7.3.69) se poate considera că apertura este echivalentă cu o susceptanță inductivă $B = -ab/2\beta_{10}\alpha_m$ .

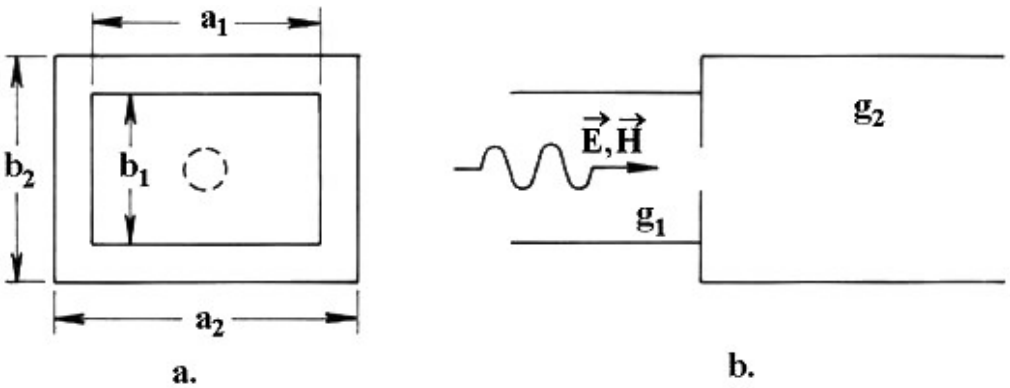



**Fig. 7.25. Cuplaj între două ghiduri cu secțiuni diferite, prin apertură în peretele transversal**

Un caz mai general al excitării ghidurilor prin aperturi în peretele transversal este arătat în Fig. 7.25, unde ghidurile $g_1$ şi $g_2$ sunt de arii transversale diferite; considerând că ariile $S_1 = a_1 \times b_1$ şi $S_2 = a_2 \times b_2$ diferă moderat, se poate admite că ambele ghiduri suportă modul $TE_{10}$ de propagare. Similar cu (7.3.59) câmpul din ghidul $g_1$ este descris de relațiile

$$\vec{E}_{1g} = A\left(\vec{E}_{10}^{+} - \vec{E}_{10}^{-}\right) \tag{7.3.72}$$

$$\vec{H}_{1g} = A\left(\vec{H}_{10}^{+} - \vec{H}_{10}^{-}\right) \tag{7.3.73}$$

Acest mod are componentă de câmp magnetic după direcția *x*, astfel în apertură va exista un moment de dipol magnetic indus $\vec{P}_{0m} = \hat{i}P_{0m}$, definit în secțiunea 7.3.1, utilizând teoria imaginii; câmpul perturbator produs de acest dipol este identic cu cel radiat de către dipolul $P_{0m}$ în ghidul infinit. Câmpurile perturbatoare (de reacție) în cele două ghiduri sunt definite prin relațiile (7.3.41) şi (7.3.44) ÷ (7.3.46), şi în cazul de față au expresiile:

- pentru ghidul $g_1$

$$H_{1r} = j\omega\mu_0\vec{H}_{10}^{+} \cdot \left(\hat{i}P_{0m}\right)\vec{H}_{10}^{-} \cdot \hat{i} = -\frac{j2\beta_{10}^{(1)}}{a_1 b_1}P_{0m} \tag{7.3.74}$$

- pentru ghidul $g_2$

$$H_{2r} = j\omega\mu_0\vec{H}_{10}^{-} \cdot \left(-\hat{i}P_{0m}\right)\vec{H}_{10}^{+} \cdot \hat{i} = \frac{j2\beta_{10}^{(2)}}{a_1 b_1}P_{0m} \tag{7.3.75}$$

unde $\beta_{10}^{(1)}$ şi $\beta_{10}^{(2)}$ sunt constantele de propagare ale modului dominant $TE_{10}$ în ghidul $g_1$, respectiv $g_2$. Ținând cont de (7.3.41) se poate scrie relația

$$P_{0m} = \alpha_m \left[ 2A\gamma_{10} \left( \frac{2}{ja_1 b_1 k_0 \gamma_{10} Z_0} \right)^{1/2} - \frac{j2\beta_{10}^{(1)}}{a_1 b_1} P_{0m} - \frac{j2\beta_{10}^{(2)}}{a_2 b_2} P_{0m} \right] \tag{7.3.76}$$

din care se scoate

$$P_{0m} = \frac{2\alpha_m A\gamma_{10} \left(2/ja_1 b_1 k_0 Z_0\right)^{1/2}}{1 + j\alpha_m \left( \frac{2\beta_{10}^{(1)}}{a_1 b_1} + \frac{2\beta_{10}^{(2)}}{a_2 b_2} \right)} \tag{7.3.77}$$

Notând prin $A_{10} = j\omega\mu_0 \vec{P}_{0m} \cdot \vec{H}_{10}^{+}$ amplitudinea câmpului perturbator din ghidul $g_1$, amplitudinea totală a câmpului în acest ghid va fi

$$A_{10} - A = j\omega\mu_0 \vec{P}_{0m} \cdot \vec{H}_{10}^{+} - A \tag{7.3.78}$$

din care se scoate coeficientul de reflexie $\underline{\Gamma} = \left(A_{10} - A\right)/A$, adică

$$\underline{\Gamma} = \frac{j4\alpha_m \beta_{10}^{(1)}/a_1 b_1}{1 + j2\alpha_m \left(\beta_{10}^{(1)}/a_1 b_1 + \beta_{10}^{(2)}/a_2 b_2\right)} - 1 \tag{7.3.79}$$

Admitanța aperturii prezentată față de ghidul $g_1$ este

$$\underline{Y}_{in} = \frac{1 - \underline{\Gamma}}{1 + \underline{\Gamma}} = \frac{\beta_{10}^{(2)} a_1 b_1}{\beta_{10}^{(1)} a_2 b_2} - j \frac{a_1 b_1}{2\beta_{10}^{(1)} \alpha_m} \tag{7.3.80}$$

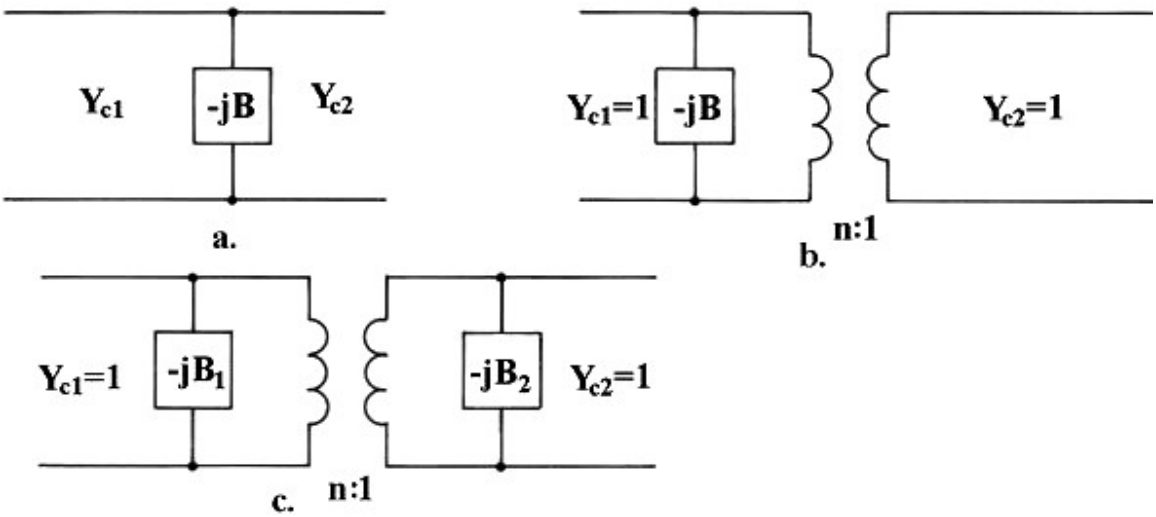



**Fig. 7.26. Circuite echivalente pentru cuplajul între două ghiduri cu secțiuni diferite, prin apertură în peretele transversal: a – folosirea unei singure susceptanțe; b – separarea ghidurilor printr-un transformator ideal; c – folosirea a două susceptanțe**

Este utilă şi pentru acest tip de cuplaj reprezentarea proceselor de cuplaj prin circuite echivalente; considerând ghidul $g_1$ de impedanță normată $Y_{c1} = 1$ se obține circuitul din Fig. 7.26, unde ghidul de ieşire $g_2$ are admitanța caracteristică $Y_{c2} = \left(\beta_{10}^{(2)} a_1 b_1\right) / \left(\beta_{10}^{(1)} a_2 b_2\right)$, iar în paralel cu apertura este plasată susceptanța normată de valoare $B = a_1 b_1 / 2\beta_{10}^{(1)} \alpha_m$. Susceptanța normată poate fi plasată de o singură parte a unui transformator ideal (Fig. 7.26b), sau poate fi divizată pe ambele părți ale transformatorului ideal (Fig. 7.26c); în acest caz avem $Y_{c2} = 1$. În ultima figură avem $B_1 = B/2$ şi $B_2 = B/2n^2$, unde $n^2 = \beta_{10}^{(1)} a_2 b_2 / \beta_{10}^{(2)} a_1 b_1$ iar $n:1$ reprezintă raportul de transformare.

## 7.4. EXCITAREA CAVITĂȚILOR REZONANTE

### 7.4.1. Considerente introductive referitoare la excitarea rezonatoarelor electrice

Ca urmare a fenomenelor de rezonanță şi a valorii ridicate a factorului de calitate, modul rezonant este excitat cu o amplitudine relativ mare față de celelalte moduri care ar putea apărea; drept urmare o particularitate importantă a proceselor de excitare a rezonatoarelor electrice constă în faptul că sunt necesare aperturi, sonde sau bucle de dimensiuni foarte mici pentru a excita câmpuri de amplitudini suficiente. În legătură cu acest aspect este utilă precizarea conceptului de excitare critică; notând prin $\underline{Z}_{in}$ impedanța de intrare a circuitului echivalent serie al unei cavități rezonante metalice (Fig. 5.18a), în vecinătatea rezonanței se poate scrie (5.4.56)

$$\underline{Z}_{in} = R_s + j\left(\omega_{0p}L - \frac{1}{\omega_{0p}C}\right) \cong R_s\left[1 + j\xi Q_0\right] \tag{7.4.1}$$

unde: $Q_0 = \omega_0 L/R_s$ este factorul de calitate intrinsec al cavității; $\omega_{0p}$ este frecvența de rezonanță a cavității cu pierderi definită prin relația generală (5.4.8). Dacă se consideră că cavitatea este excitată cu ajutorul unei linii de transmisie (sau segment de ghid) având impedanța de undă caracteristică $Z_{c0}$, atunci se poate defini un factor de calitate echivalent al liniei $Q_{ec} = \omega_0 L/Z_{c0}$. În condiții de rezonanță avem $\underline{Z}_{in} = R_s$ iar condiția de adaptare a cavității cu linia de excitare se exprimă prin egalitatea $R_s = Z_{c0}$, fapt ce semnifică că întreaga putere incidentă este absorbită în cavitate. Adesea se introduce un coeficient de cuplaj definit prin relația $g_c = Q_0/Q_{ec}$: dacă $g_c = 1$ cuplajul este numit critic; dacă $g_c < 1$ avem un cuplaj subcritic, iar dacă $g_c > 1$ cuplajul este numit supracritic.

Ne referim acum la excitarea cavităților rezonante paralelipipedice prin intermediul unei mici aperturi circulare, practicate în peretele transversal terminal al ghidului de alimentare (Fig. 7.27). Această problemă de cuplaj este similară cu cea arătată în Fig. 7.25.; diferența constă în faptul că în cavitatea rezonantă există fenomene de rezonanță, prin urmare câmpurile de reacție sunt datorate numai modurilor rezonante din cavitate. Pentru a pune în evidență acest aspect este necesară o extindere a relațiilor obținute în Cap. 5 (secțiunile 5.4 şi 5.8.3).

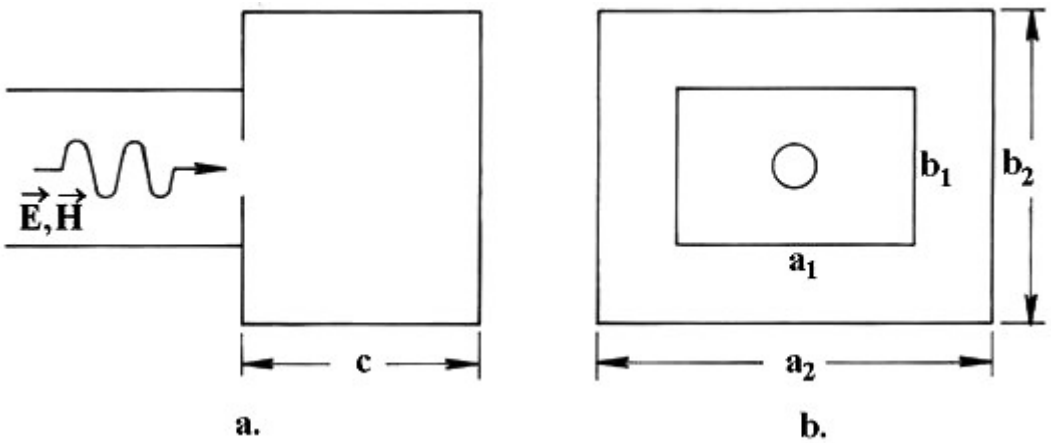



**Fig. 7.27. Excitarea cavității rezonante prin apertura practicată în peretele transversal al ghidului de alimentare: a – secțiune longitudinală, b – secțiune transversală**

Sub formă generală în cavitățile rezonante sunt prezente două tipuri de moduri (câmpuri): rotaționale (solenoidale) notate $(\vec{E}_p, \vec{H}_p)$ şi irotaționale notate $(\vec{F}_p, \vec{G}_p)$, unde $p$ indică orice mod oscilant posibil. La problemele de excitare se urmărește determinarea amplitudinilor diferitelor

componente; pentru determinarea acestor amplitudini se pleacă de la o dezvoltare a ecuațiilor Maxwell simetrice, cu surse

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu_0 \vec{H} - \vec{J}_m \tag{7.4.2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{J}_e \tag{7.4.3}$$

unde $\vec{J}_e, \vec{J}_m$ sunt densități de volum. Presupunem că câmpurile pot fi dezvoltate în termenii modurilor rezonante din cavitate [3], [10]

$$\vec{E} = \sum_p \left( e_p \vec{E}_p + f_p \vec{F}_p \right) \tag{7.4.4}$$

$$\vec{H} = \sum_p \left( h_p \vec{H}_p + g_p \vec{G}_p \right) \tag{7.4.5}$$

unde: $e_p, f_p, h_p$ şi $g_p$ sunt constante de amplitudine. În general constantele de amplitudine se determină prin utilizarea condițiilor la limită; de exemplu una din condiții este $\vec{E}_T = \underline{Z}_s \hat{n} \times \vec{H}$, însă ca urmare a condițiilor $\hat{n} \times \vec{E}_p = 0, \hat{n} \times \vec{F}_p = 0$, dezvoltarea câmpului electric nu este uniform convergentă pe frontiere (pereții metalici); $\hat{n}$ este versorul normalei pe suprafața metalică îndreptată spre interior; $\underline{Z}_s$ este impedanța de suprafață (2.5.74) văzută din interiorul cavității spre pereții metalici. Absența convergenței uniforme sugerează faptul că seriile (7.4.4) şi (7.4.5) nu pot fi derivate termen cu termen; pentru înlăturarea acestui neajuns se procedează la integrarea ecuațiilor Maxwell, după ce în prealabil sunt multiplicate scalar cu una din funcțiile modale. Considerăm ecuația (7.4.2) multiplicată scalar cu funcția modală solenoidală $\vec{H}_p$; efectuând integrarea avem

$$\int_V \vec{H}_p \cdot \nabla \times \vec{E} dV = \int_V -j\omega\mu_0 \vec{H} \cdot \vec{H}_p dV - \int_V \vec{H}_p \cdot \vec{J}_m dV \tag{7.4.6}$$

Utilizând identitatea vectorială $\nabla \cdot \left( \vec{H}_p \times \vec{E} \right) = \nabla \times \vec{H}_p \cdot \vec{E} - \vec{H}_p \cdot \nabla \times \vec{E} = k_p \vec{E}_p \cdot \vec{E} - \vec{H}_p \cdot \nabla \times \vec{E}$, şi aplicând teorema divergenței celui de al doilea termen, integrala din membrul stâng ia forma

$$\int_V \vec{H}_p \cdot \nabla \times \vec{E} dV = \int_V k_p \vec{E}_p \cdot \vec{E} dV + \oint_S -\vec{H}_p \cdot \hat{n} \times \vec{E} ds = \int_V k_p \vec{E}_p \cdot \vec{E} dV + \underline{Z}_s \oint_S \vec{H}_p \cdot \vec{H}_T ds \tag{7.4.7}$$

în care $k_p$ este numărul de undă corespunzător modului *p*; relația (7.4.6) devine

$$\int_V k_p \vec{E}_p \cdot \vec{E} dV + \underline{Z}_s \oint_S \vec{H}_p \cdot \vec{H}_T ds = -j\omega\mu_0 \int_V \vec{H} \cdot \vec{H}_p dV - \int_V \vec{H}_p \cdot \vec{J}_m dV \tag{7.4.8}$$

Procedând similar, prin utilizarea celorlalte funcții nodale, se obține

$$\int_V k_p \vec{H}_p \cdot \vec{H} dV = j\omega\varepsilon_0 \int_V \vec{E}_p \cdot \vec{E} dV + \int_V \vec{E}_p \cdot \vec{J}_e dV \tag{7.4.9}$$

$$j\omega\mu_0 \int_V \vec{G}_p \cdot \vec{H} dV + \int_V \vec{G}_p \cdot \vec{J}_m dV = -\underline{Z}_s \oint_S \vec{G}_p \cdot \vec{H}_T ds \tag{7.4.10}$$

$$j\omega\varepsilon_0 \int_V \vec{F}_p \cdot \vec{E} dV + \int_V \vec{F}_p \cdot \vec{J}_e dV = 0 \tag{7.4.11}$$

Dacă introducem dezvoltările (7.4.4), (7.4.5) în ultimele patru ecuații se obține

$$k_p e_p + j\omega\mu_0 h_p = -\underline{Z}_s \oint_S \vec{H}_p \cdot \vec{H}_T ds - \int_V \vec{H}_p \cdot \vec{J}_m dV \tag{7.4.12}$$

$$k_p h_p - j\omega\varepsilon_0 e_p = \int_V \vec{E}_p \cdot \vec{J}_e dV \tag{7.4.13}$$

$$j\omega\mu_0 g_p = -\underline{Z}_s \oint_S \vec{G}_p \cdot \vec{H}_T ds - \int_V \vec{G}_p \cdot \vec{J}_m dV \tag{7.4.14}$$

$$j\omega\varepsilon_0 f_p = -\int_V \vec{F}_p \cdot \vec{J}_e dV \tag{7.4.15}$$

Din aceste relații se poate observa că într-o cavitate cu pierderi se pot alege tipuri de moduri astfel încât ele să fie decuplate, prin urmare integrala de suprafață $\vec{H}_T \cdot \vec{H}_p$ se reduce la integrala din $h_p \vec{H}_p \cdot \vec{H}_p$ iar puterea disipată prin pierderi în pereții metalici poate fi exprimată prin relația (5.4.9)

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int_S \vec{H}_p \cdot \vec{H}_p^* = \frac{\omega W}{Q_p} \tag{7.4.16}$$

astfel integrala de suprafață din (7.4.12) devine

$$\underline{Z}_s \oint_S h_p \vec{H}_p \cdot \vec{H}_p ds = h_p 2(1+j) P_c = (1+j)\frac{\omega\mu_0}{Q_p} h_p \tag{7.4.17}$$

Ecuațiile (7.4.12), (7.4.13) pot fi rescrise sub forma

$$k_p e_p = -j\omega\mu_0 h_p - (1+j)\frac{\omega\mu_0}{Q_p} h_p - \int_V \vec{H}_p \cdot \vec{J}_m dV \tag{7.4.18}$$

$$k_p h_p = j\omega\varepsilon_0 e_p + \int_V \vec{E}_p \cdot \vec{J}_e dV \tag{7.4.19}$$

din care se scot expresiile constantelor de amplitudine $e_p$ şi $h_p$; avem [3]

$$e_p = \frac{-jk_0 Z_0 \left(1 + \frac{1-j}{Q_p}\right) \int_V \vec{E}_p \cdot \vec{J}_e dV - k_p \int_V \vec{H}_p \cdot \vec{J}_m dV}{k_p^2 - k_0^2 \left(1 + \frac{1-j}{Q_p}\right)} \approx \frac{\int_V \left(-jk_0 Z_0 \vec{E}_p \cdot \vec{J}_e - k_p \vec{H}_p \cdot \vec{J}_m\right) dV}{k_p^2 - k_0^2 \left(1 + \frac{1-j}{Q_p}\right)} \tag{7.4.20}$$

$$h_p \cong \frac{\int_V \left(k_p \vec{E}_p \cdot \vec{J}_e - jk_0 Y_0 \vec{H}_p \cdot \vec{J}_m\right) dV}{k_p^2 - k_0^2 \left(1 + \frac{1-j}{Q_p}\right)} \tag{7.4.21}$$

În scopul determinării expresiilor pentru constantele $f_p$ şi $g_p$ este convenabilă introducerea unei funcții modale scalare $\Psi_p$ care generează modurile irotaționale $\vec{F}_p$ şi $\vec{G}_p$; astfel (7.4.15) poate fi scrisă sub forma

$$j\omega\varepsilon_0 f_p = -\int_V \vec{J}_e \cdot \nabla \Psi_p dV = \int_V \Psi_p \nabla \cdot \vec{J}_e dV + \oint_S \Psi_p \hat{n} \cdot \vec{J}_e ds \tag{7.4.22}$$

din care rezultă că dacă $\nabla \cdot \vec{J}_e = 0$ în volumul $V$ însă $\hat{n} \cdot \vec{J}_e \neq 0$ pe suprafață, constanta de amplitudine $f_p$ este diferită de zero. Totodată ultima relație permite interpretări fizice utile în cazul excitării cavităților prin aperturi. Funcția $\Psi_p$ poate fi privită ca o funcție scalară de potențial utilizată pentru dezvoltarea potențialului scalar în funcție de surse de volum $\nabla \cdot \vec{J}_e$ şi surse de suprafață $\hat{n} \cdot \vec{J}_e$; în cazul excitării prin apertură sursa de suprafață poate fi aproximată printr-un dipol electric indus în apertură. În mod similar, se poate considera o funcție scalară $\Phi_p$ care

generează modurile irotaționale $\vec{G}_p$; această funcție este necesară pentru dezvoltarea potențialului scalar magnetic care provine de la o sursă de sarcină magnetică. Un curent magnetic tangențial sau un dipol în apertură vor fi cuplate cu modurile $\vec{G}_p$ deoarece $\hat{n}\times\vec{G}_p$ este diferit de zero pe suprafața S.

### 7.4.2 Excitarea modului $TE_{101}$

Vom considera o cavitate rezonantă paralelipipedică formată prin plasarea unui perete transversal cu apertură, la distanța *c* de capătul scurtcircuitat al ghidului (Fig. 7.28). Presupunem că modul rezonant dominant din cavitate este $TE_{101}$. Ținând cont de expresiile generale ale componentelor de câmp în cavitățile paralelipipedice (5.8.70) în care se pune m = 1, n = 0, p = 1, şi de condițiile de normare la unitate de forma (7.1.2), (7.1.5) aplicate la cavitate se poate scrie

$$\vec{E}_{101} = \hat{j}E_{101};\quad E_{101} = (4/abc)^{1/2}\sin(\pi x/a)\sin(\pi z/c) \tag{7.4.23}$$

şi $\vec{H}_{101} = (1/k_{101})\nabla\times\vec{E}_{101}$, deci

$$\vec{H}_{101} = \left(\frac{4}{abc}\right)^{1/2}\frac{1}{k_{101}}\left(-\hat{\imath}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{c} + \hat{k}\frac{\pi}{a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi z}{c}\right) \tag{7.4.24}$$

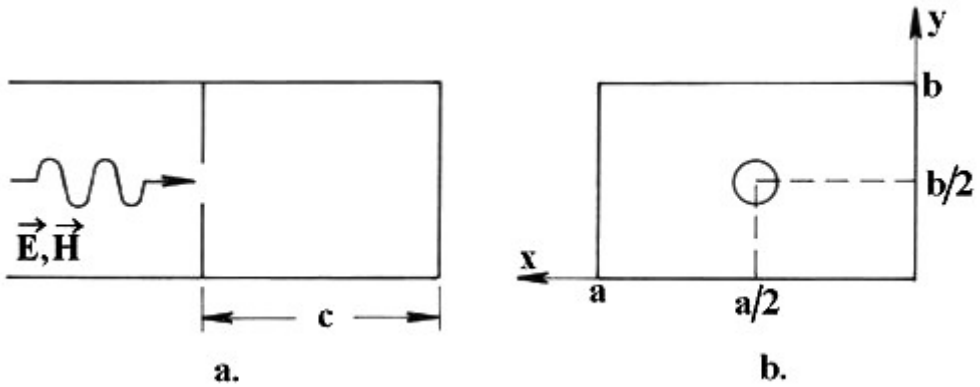



**Fig. 7.28. Excitarea modului TE într-o cavitate paralelipipedică printr-o apertură mică: a – secțiune longitudinală; b – secțiune transversală**

La fel ca şi în cazul cuplajului a două ghiduri printr-o apertură în peretele transversal, singura componentă de câmp care produce un moment de dipol indus $\vec{P}_m$ în apertură este componenta $\vec{H}_x = \hat{\imath}H_x$, astfel componenta după *z* a câmpului magnetic se neglijează. Ținem cont de (7.4.21) în care se pune $\vec{J}_e = 0$, $\vec{H}_p = \vec{H}_{101}$, $k_p = k_{101}$, $\vec{J}_m = j\omega\mu_0\vec{P}_m$ şi $\vec{P}_m = \alpha_m\vec{H}_x$; dipolul magnetic indus $-\vec{P}_{0m} = -\vec{P}_m/2 = -\hat{\imath}P_{0m}$ va excita modul $TE_{101}$ cu o amplitudine dată de (7.4.20), (7.4.21); astfel se poate scrie [3]

$$h_{101} = -\frac{k_0^2\hat{\imath}P_{0m}\cdot\vec{H}_{101}}{k_{101}^2 - k_0^2\left(1+\frac{1-j}{Q}\right)} = \frac{(4/abc)^{1/2}k_0^2P_{0m}(\pi/ck_{101})}{k_{101}^2 - k_0^2\left(1+\frac{1-j}{Q}\right)} \tag{7.4.25}$$

unde $k_{101}^2 = (\pi/a)^2 + (\pi/c)^2$ iar $Q$ este factorul de calitate al modului de oscilație $TE_{101}$. Componenta după *x* a câmpului magnetic în centrul aperturii este

$$h_{x101}(x = a/2, y = b/2, z = 0) = -h_{101}\left(\frac{4}{abc}\right)^{1/2}\frac{\pi}{ck_{101}} \tag{7.4.26}$$

Acest câmp este privit ca un câmp de reacție deoarece are valori foarte importante atunci când cavitatea este acordată pe modul $TE_{101}$; în ghidul dreptunghiular câmpul de reacție este acelaşi ca pentru apertura în peretele transversal (7.3.74), astfel ecuația pentru $P_{0m}$ este

$$P_{0m} = \alpha_m \left\{ j2A\beta_{10} - j\frac{2\beta_{10}}{ab} P_{0m} + \frac{4\pi^2 k_0^2 P_{0m}}{abc^3 k_{101}^2 \left[ k_{101}^2 - k_0^2 \left( 1 + \frac{1-j}{Q} \right) \right]} \right\} \tag{7.4.27}$$

care se poate scrie condensat

$$P_{0m} = \frac{j2\alpha_m \beta_{10} A}{1 + jX + U} \tag{7.4.28}$$

în care s-a notat

$$X = 2\alpha_m \beta_{10} / ab$$

$$U = \frac{4\alpha_m \pi^2 k_0^2}{abc^3 k_{101}^2 \left[ k_{101}^2 - k_0^2 \left( 1 + \frac{1-j}{Q} \right) \right]} \tag{7.4.29}$$

iar A este amplitudinea modului incident $TE_{10}$ din ghid. Considerând apertura de dimensiuni foarte mici, modul total $TE_{10}$ reflectat este

$$-A + j\omega\mu_0 P_{0m} \hat{i} \cdot \vec{H}_{10}^{+} = -A + \frac{j4\alpha_m \beta_{10} A/ab}{1 + jX + U} \tag{7.4.30}$$

Coeficientul de reflexie se obține prin divizare cu $A$ a ultimei expresii

$$\underline{\Gamma} = -1 + \frac{j4\alpha_m \beta_{10}/ab}{1 + jX + U} \tag{7.4.31}$$

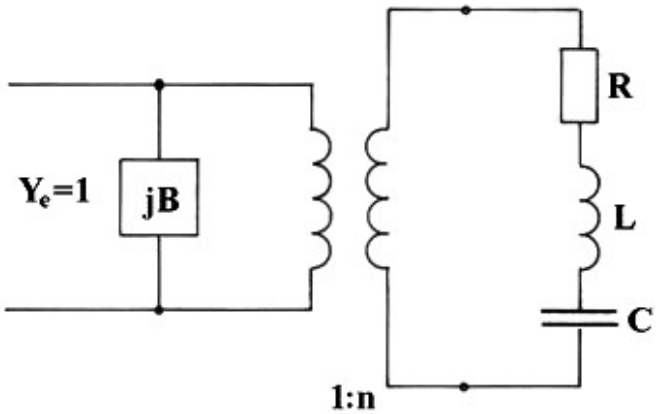



**Fig. 7.29. Circuitul echivalent pentru structura din Fig. 7.28**

În scopul găsirii valorilor uzuale pentru dimensiunile aperturii este convenabilă reprezentarea procesului de cuplaj printr-un circuit echivalent ce conține un transformator (Fig. 7.29). Se defineşte admitanța de intrare, similar cu (7.3.80), anume

$$\underline{Y}_{in} = \frac{1-\underline{\Gamma}}{1+\underline{\Gamma}} = \frac{1+U}{jX} = -jB + \underline{Y} \tag{7.4.32}$$

în care $B = ab/2\alpha_m \beta_{10}$, $jB$ reprezintă susceptanța aperturii iar $\underline{Y}$ are expresia

$$\underline{Y} = \frac{j2k_0^2\pi^2}{\beta_{10}c^3k_{101}^2\left[k_{101}^2 - k_0^2\left(1+\frac{1-j}{Q}\right)\right]} \tag{7.4.33}$$

Referindu-ne la circuitul echivalent trebuie observat că inductanța $L$ include atât inductanța cavității rezonante ideale $L_c$ cât şi o inductanță parazită $L_s$ datorată impedanței de suprafață a pereților. Admitanța de intrare văzută dinspre ghid a circuitului echivalent este

$$\underline{Y}_{in} = \frac{n}{j\omega L_c + j\omega L_s - j/\omega C + R} - jB\,; \tag{7.4.34}$$

Numitorul fracției din această expresie se poate pune sub forma

$$N = \frac{j}{\omega\omega_0^2 C}\left(\omega^2 + \omega\omega_0^2 L_c C - \omega_0^2 - j\omega\omega_0^2 RC\right) \tag{7.4.35}$$

în care $\omega_0 = (L_c C)^{-1/2}$ este frecvența de rezonanță a cavității fără pierderi. Utilizând relațiile

$$\frac{1}{Q} = \frac{R}{\omega_0 L_0} = \omega_0 RC = \frac{\omega_0 L_s}{\omega_0 L_c} = \omega_0^2 L_s C \tag{7.4.36}$$

şi considerând aproximația $\omega_0^2\omega RC = \omega_0\omega/Q \cong \omega^2/Q$ în vecinătatea rezonanței expresia impedanței de intrare devine

$$\underline{Y}_{in} = \frac{j\omega\omega_0^2 Cn^2}{\omega_0^2 - \omega^2\left(1+\frac{1-j}{Q}\right)} - jB \tag{7.4.37}$$

Pentru determinarea raportului de transformare $n$ din Fig. 7.29 trebuie cunoscută magnitudinea impedanței (sau a admitanței) cavității. În acest scop este necesară cunoaşterea capacității echivalente $C$; pentru aceasta se determină o tensiune echivalentă $U_c$ la bornele capacitorului ca integrala câmpului electric $E_y$ pe centrul cavității $(x = a/2, z = c/2)$. Conform (7.4.23) se poate scrie

$$E_y = \frac{U_c}{b}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) \tag{7.4.38}$$

iar valoarea lui $C$ se determină cu ajutorul energiei electrice (reactive) $W_e$ înmagazinată în cavitate

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{4}\int_V |E_y|^2\,dV = \frac{\varepsilon_0 ac}{16b}U_c^2\,; \tag{7.4.39}$$

considerând relația $W_e = CU_c^2/4$ rezultă valoarea capacității $C = \varepsilon_0\, ab/4b$. Introducând această valoare în (7.4.37) se obține

$$\underline{Y}_{in} = \frac{jk_0Y_0\omega_0^2 acn^2}{4b\left[\omega_0^2 - \omega^2\left(1+\frac{1-j}{Q}\right)\right]} - jB \tag{7.4.40}$$

în care s-a utilizat egalitatea $\omega\varepsilon_0 = k_0/Z_0 = k_0Y_0$. Comparând ultima expresie cu (7.4.33) se obține

$$n = \frac{2\pi}{c^2 k_{101}}\left(\frac{2bZ_0}{k_0\beta_{10}a}\right)^{1/2} \tag{7.4.41}$$

În problemele practice de excitare a cavităților se urmăreşte determinarea dimensiunilor aperturii pentru un mod dat; pentru a realiza acest deziderat este convenabil să facem uz de anumite aproximații. Având în vedere că efectele de dezacord ale susceptanței aperturii $-jB$ sunt nesemnificative, vom defini o frecvență de rezonanță a cavității cuplate cu segmentul de ghid ca frecvența pentru care admitanța $\underline{Y}$ devine reală. Din (7.4.33) rezultă că anularea părții imaginare a lui $\underline{Y}$ are loc când este satisfăcută relația

$$\left(\frac{1+Q}{Q}k_0^2 - k_{101}^2\right)\left[Bc^3\beta_{10}k_{101}^2 - k_0^2\left(Bc^3\beta_{10}k_{101}^2\frac{1+Q}{Q}\right)\right] = \frac{Bc^3\beta_{10}k_{101}^4}{Q^2} \qquad (7.4.42)$$

În cazul cavităților cu factor de calitate ridicat termenul drept se poate considera egal cu zero, astfel se poate scrie

$$k_0^2 = \frac{k_{101}^2}{1+\dfrac{2\pi^2}{Bc^3\beta_{10}k_{101}^2}} \approx k_{101}^2 - \frac{2\pi^2}{Bc^3\beta_{10}} = k_{101}^2 - \frac{4\pi^2\alpha_m}{abc^3} \qquad (7.4.43)$$

Făcând aproximația $k_0^2 - k_{101}^2 \cong 2k_{101}\left(k_0 - k_{101}\right)$ ultima relație devine

$$k_0 = k_{101} - \frac{2\pi^2\alpha_m}{k_{101}abc^3} \qquad (7.4.44)$$

Pentru a obține un cuplaj ghid-cavitate critic se impune $Y_{in} = 1$, astfel susceptanța $\underline{Y}$ din (7.4.32) trebuie să aibă o conductanță egală cu unitatea. Referindu-ne la relația (7.4.33) şi ținând cont de aproximațiile făcute mai sus, condiția $Re(\underline{Y}) = 1$ permite să scriem

$$\frac{2\pi^2k_0^2}{c^3\beta_{10}k_{101}^2Q} = \left(k_{101}^2 - k_0^2\frac{1+Q}{Q}\right)^2 + \frac{k_0^4}{Q^2} \approx \left(\frac{4\pi^2\alpha_m}{abc^3}\right)^2 + \frac{k_0^4}{Q^2} \approx \left(\frac{4\pi^2\alpha_m}{abc^3}\right)^2 \qquad (7.4.45)$$

care se rezolvă în raport cu polarizabilitatea $\alpha_m$

$$\alpha_m = \frac{k_0^2abc}{2\pi k_{101}\left[2\beta_{10}Q/c\right]^{1/2}} \qquad (7.4.46)$$

Conform relațiilor (5.2.14), (5.2.15) se poate aproxima $k_{101} = k_0$ pentru a determina o primă valoare aproximativă a polarizabilității din (7.4.46); cu această valoare aproximativă a lui $\alpha_m$ se calculează valoarea corectă a lui $k_0$ folosind (7.4.44); apoi această nouă valoare a lui $k_0$ se introduce în (7.4.46) obținându-se o valoare mai precisă a polarizabilității.

Considerăm o cavitate paralelipipedică în banda *X*, având dimensiunile $a = c = 22\ mm$, $b = 10\ mm$ şi factorul de calitate $Q = 6000$. Pentru numărul de undă de rezonanță al modului $TE_{101}$ se obține $k_{101} \cong 202\ m^{-1}$; considerând $k_0 \cong k_{101}$, constanta de propagare în ghid a modului $TE_{10}$ este $\beta_{10} = \left[k_0^2 - k_{10}^2\right]^{1/2} \cong \left[k_{101}^2 - (\pi/a)^2\right]^{1/2} = \pi/c$. Introducem în (7.4.46) şi obținem $\alpha_m \cong 17{,}63\cdot10^{-9}\ m^3$; cu această valoare a polarizabilității introdusă în (7.4.44) se obține valoarea corectă pentru $k_0$, anume $k_0 = 202 - 0{,}735 = 201{,}65\ m^{-1}$ şi se recalculează $\alpha_m$ pe baza relației (7.4.46); diferența este nesemnificativă. Având în vedere expresia polarizabilității în cazul aperturii circulare $\alpha_m = 4r_a^3/3$, pentru raza aperturii se obține valoarea $r_a = 2{,}35\cdot10^{-3}\ m$. Efectuând calcule similare pentru o cavitate în banda *S*, având dimensiunile

$a = 113\ mm, b = 59\ mm, c = 70\ mm$ şi factorul de calitate $Q \cong 5000$, pentru modul dominat de oscilație $TE_{101}$ se obține $\alpha_m = 1548{,}64 \cdot 10^{-9}\ m^3$ $\left(k_{101} \cong 52{,}8\ m^{-1}\right)$ iar raza aperturii de excitație va avea valoarea $r_a = 8{,}7\ mm$. În pofida aproximărilor introduse în relațiile (7.4.42) ÷(7.4.46), dimensiunile aperturilor obținute prin calcule dau rezultate satisfăcătoare în practică.

## Bibliografie Capitolul 7

1. D.M. Pozar „Microwave Engineering”, Addison Wesley Publ.Company, N.Y., (1990, reprinted 1996)
2. A. Ishimaru „Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering”, Prentice – Hall Intern. Edition, N.Y., (1991)
3. R.E. Collin „Field Theory of Guided Waves”, sec. edition, Oxford University Press, (1991)
4. G.H. Bryant „Principles of Microwave Measurements”, Peter Peregrinus, London, (1988)
5. J.L. Amalric „Initiation à l'Etude des Antennes”, Litografiat, INP (ENSEEIHT), Toulose, (1996)
6. C.T. Tai „Dyadic Green's Functions in Electromagnetic Theory”, IEEE Press N.Y., (1994)
7. L. Levin „Theory of Waveguides”, Butterworth and Co. Publ. Ltd, London, (1975)
8. D.I. Voskresenki (editor) „Antenny i SVC ustroistva” (l. rusă), Radio-Sviazi, Moskva, (1981)
9. G. Rulea „Bazele teoretice şi experimentale ale Tehnicii Microundelor”, Ed. Şt. Encicl., (1989)
10. G. Dôme „RF Systems. Waveguides and Cavities” in AIP Conference Proceedings 153, (M. Month and M. Dienes, editors) vol 2, N.Y. (1987)
11. C.T. Tai „Generalized Vector and Dyadic Analysis” IEEE Press, N.Y., (1992)

# ANEXE

## ANEXA I. ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL. SISTEME DE COORDONATE

### A I.1. Elemente de calcul vectorial

Sunt prezentate succint principalele formule de calcul vectorial care se utilizează la studiul propagării undelor electromagnetice în diferite medii şi sisteme de ghidare.

**1°. Operații elementare cu vectori.**

**Produse scalare şi vectoriale**. Presupunem un vector $\vec{a}$, definit prin componentele $a_1, a_2, a_3$ în sistemul de coordonate cartesiene (Fig. A I.1).

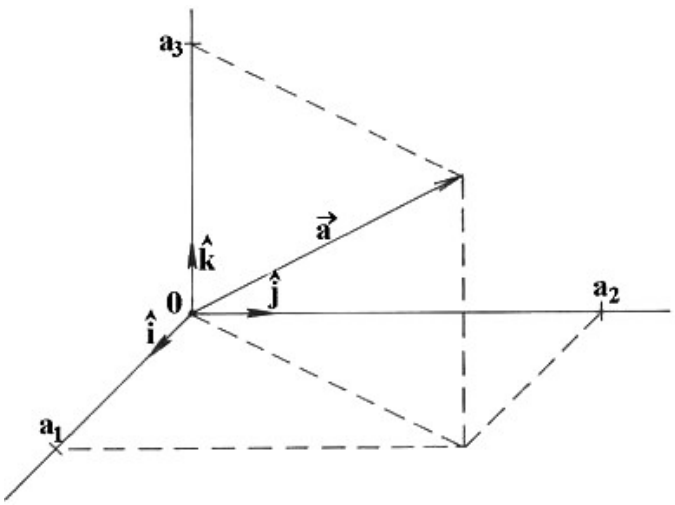



**Fig. A I.1. Definirea componentelor vectorului $\vec{a}$ în coordonate cartesiene**

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \tag{I.1.1}$$

unde $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ este sistemul ortogonal de versori; versorul pe direcția vectorului $\vec{a}$ este $\hat{a} = \vec{a}/|a|$, unde $|a|$ este magnitudinea (norma) vectorului $\vec{a}$. Considerând doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, definiți prin (I.1.1), care fac unghiul $\gamma$ între ei, produsele vectoriale şi scalare sunt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma; \qquad 0 \le \gamma \le \pi \tag{I.1.2}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\gamma\, \hat{n}; \qquad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\gamma \tag{I.1.3}$$

unde $\hat{n}$ este versorul perpendicular atât pe $\vec{a}$ cât şi pe $\vec{b}$; mărimea $|\vec{a} \times \vec{b}|$ este egală cu aria paralelogramului cu laturile $|\vec{a}|$ şi $|\vec{b}|$.

**Proprietăți ale produsului scalar**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|, \quad |\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|; \tag{I.1.4}$$

$$|\vec{a}| = [\vec{a} \cdot \vec{a}]^{1/2}; \; |a_1\hat{i}| = |a_1|, \; |a_2\hat{j}| = |a_2|, \; |a_3\hat{k}| = |a_3|;$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

**Proprietăți ale produsului vectorial**

$$\begin{gathered}\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a};\\ \vec{a}\times\vec{a}=0;\\ \vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c};\\ \left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right),\qquad \lambda-scalar\end{gathered} \tag{I.1.5}$$

Generalizare

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}a_j b_k \tag{I.16}$$

unde $\varepsilon_{ijk}$ este tensorul complet antisimetric definit prin

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & dacă\ (i,j,k)\ reprezintă\ o\ permutare\ pară\ (simetrică)\ a\ grupului\ (1,2,3)\\ -1 & dacă\ (i,j,k)\ reprezintă\ o\ permutare\ impară\ (1,2,3)\\ 0 & în\ celelalte\ cazuri\end{cases} \tag{I.1.7}$$

Adoptând sistemul de coordonate cartesian cu versorii $\left(\hat{i},\hat{j},\hat{k}\right)$, astfel încât $\hat{i}\times\hat{k}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}\ \left(\hat{i}\times\hat{i}=0,\ \hat{j}\times\hat{j}=0,\ \hat{k}\times\hat{k}=0\right)$ produsul $\vec{a}\times\vec{b}$ se poate pune sub forma

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\hat{i}+\left(a_3b_1-a_1b_3\right)\hat{j}+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\hat{k} \tag{I.1.8}$$

Produse duble

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=-\vec{b}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=-\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right) \tag{I.1.9}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c}=b\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c} \tag{I.1.10}$$

Pe baza ultimelor două relații se pot obține expresiile generale:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix} \tag{I.1.10a}$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}\right)\vec{d} \tag{I.1.10b}$$

**2°. Operatori vectoriali diferențiali.**

Aceşti operatori se aplică atât câmpurilor scalare cât şi celor vectoriale. Câmpul scalar este definit printr-o funcție scalară de punct $f\left(\vec{r}\right)=f\left(x,y,z\right)$, împreună cu domeniul ei de existență; suprafața $f\left(\vec{r}\right)=const.$ este numită suprafață de nivel. Câmpul vectorial este definit printr-o funcție vectorială de punct $\vec{F}\left(\vec{r}\right)=\vec{F}\left(x,y,z\right)$; liniile vectoriale (linii de curent) în orice punct $\vec{r}$ au direcția vectorului de câmp $\vec{F}\left(\vec{r}\right)$ şi se definesc prin ecuația diferențială

$$d\vec{r}\times\vec{F}\left(\vec{r}\right)=0 \tag{I.1.11}$$

**Definirea operatorilor diferențiali.**

*Gradientul* unei funcții scalare $\vec{f}\left(\vec{r}\right)$ se defineşte astfel

$$grad\ f\left(\vec{r}\right)=\nabla f=\lim_{\delta_1\to 0}\frac{\int_{S_1} f\left(\vec{r}\right)dS}{\int_{V_1} dV} \tag{I.1.12}$$

unde: $V_1$ este volumul elementar ce conține punctul $(\vec{r})$; $S_1$ este suprafața închisă ce limitează volumul $V_1$; $\delta_1$ este distanța cea mai mare de la punctul $(\vec{r})$ până la suprafața $S_1$; $\nabla f(\vec{r})$ reprezintă o funcție vectorială.

Operatorul diferențial (vectorial) fundamental notat prin $\nabla$ (numit operator „nabla" sau Hamilton) este definit prin relația

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{I.1.13a}$$

Acest operator se comportă ca un vector în sensul că el se combină cu vectorii conform regulilor de algebră vectorială; el reprezintă un operator necomutativ, astfel totdeauna apare la stânga mărimii asupra căreia se operează. La manipularea diferitelor expresii ce conțin $\nabla$, acesta este considerat ca un vector iar operatorul de derivare se efectuează în expresia finală simplificată. Derivarea unei funcții scalare $f(x,y,z)$ în raport cu distanța $l$ în lungul unei curbe continue $x(l), y(l), z(l)$ se scrie

$$\frac{df}{dl} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dl} \tag{I.1.13b}$$

şi reprezintă o derivată direcțională. Tangenta (unitate) la curbă este

$$\hat{\tau} = \hat{i}\frac{dx}{dl} + \hat{j}\frac{dy}{dl} + \hat{k}\frac{dz}{dl}; \tag{I.1.13c}$$

ținând cont de (I.1.13a) gradientul funcției $f$ este

$$\nabla f = \hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{I.1.13d}$$

astfel se poate considera că derivata direcțională (I.1.13b) reprezintă proiecția lui $\nabla f$ pe $\hat{\tau}$, adică

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \nabla f \cdot \hat{\tau} \tag{I.1.13e}$$

*Divergența* unei funcții vectoriale $\vec{F}(\vec{r})$ se defineşte prin expresia

$$div\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\delta_1 \to 0} \frac{\int_{S_1} d\vec{s} \cdot \vec{F}(\vec{r})}{\int_{V_1} dV} \tag{I.1.14}$$

iar $\nabla \cdot \vec{F}(\vec{r})$ reprezintă o funcție scalară.

*Rotorul* unei funcții vectoriale $\vec{F}(\vec{r})$ se defineşte ca

$$rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = \lim_{\delta_1 \to 0} \frac{\int_{S_1} d\vec{s} \times d\vec{F}}{\int_{V_1} dV} \tag{I.1.15}$$

iar $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$ este o funcție vectorială.

**3°. Identități vectoriale** ce conțin *grad, div, rot*

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g \tag{I.1.16}$$

$$\nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + (\nabla f) \cdot \vec{F} \tag{I.1.17}$$

$$\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F} \tag{I.1.18}$$

$$\nabla\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right)=\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G}+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}+\vec{F}\times\left(\nabla\times\vec{G}\right)+\vec{G}\times\left(\nabla\times\vec{F}\right) \tag{I.1.19}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\vec{G}\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)-\vec{F}\cdot\left(\nabla\times\vec{G}\right) \tag{I.1.20}$$

$$\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)f\vec{F}=\vec{F}\left(\vec{G}\cdot\nabla f\right)+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F} \tag{I.1.21}$$

$$\nabla\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\vec{F}\left(\nabla\cdot\vec{G}\right)-\vec{G}\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)+\left(\vec{G}\cdot\nabla\right)\vec{F}-\left(\vec{F}\cdot\nabla\right)\vec{G} \tag{I.1.22}$$

Identităţile vectoriale ce conţin operatorul diferenţial de ordinul al doilea $\nabla^2$ (operator Laplace)

$$div\,grad\,f=\nabla\cdot\left(\nabla f\right)=\nabla^2 f \tag{I.1.23}$$

$$grad\,div\,\vec{F}=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)=\nabla^2\vec{F}+\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right) \tag{I.1.24}$$

$$rot\,rot\,\vec{F}=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{F}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)-\nabla^2\vec{F} \tag{I.1.25}$$

$$rot\,grad\,f=\nabla\times\left(\nabla f\right)=0 \tag{I.1.26}$$

$$div\,rot\,\vec{F}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{F}\right)=0 \tag{I.1.27}$$

Se observă că avem $\nabla\cdot\nabla=\nabla^2$.

## A I.2. Sisteme de coordonate

**1°. Coordonate cartesiene** (Fig. A I.2)

În acest caz sistemul de versori este $\left(\hat{i},\hat{j},\hat{k}\right)$ iar vectorul de poziţie $\vec{r}(x,y,z)$ este

$$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \tag{I.2.1}$$

şi conform (I.1.13c) avem

$$\frac{d\vec{r}}{dl}=\hat{i}\frac{dx}{dl}+\hat{j}\frac{dy}{dl}+\hat{k}\frac{dz}{dl}; \tag{I.2.2}$$

Operatorul $\nabla$ reprezintă un invariant diferenţial, adică o valoare unică pentru un punct dat din spaţiu, indiferent de sistemul de coordonate; în sistemul de coordonate cartesian se pune sub forma (I.1.13a)

$$\nabla=\hat{i}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{I.2.3}$$

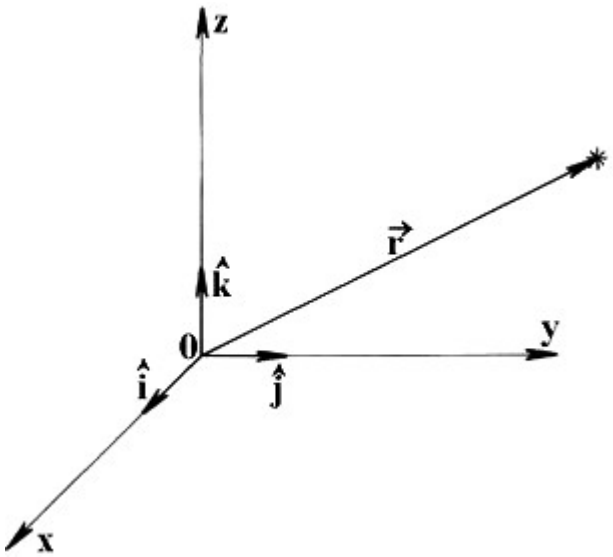



**Fig. A I.2. Definirea vectorului de poziţie $\vec{r}$ în coordonate cartesiene**

Considerând funcțiile $f(\vec{r})$ şi $\vec{F}(\vec{r})$ se pot scrie relațiile

$$\nabla f = \left( \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right) f \tag{I.2.4.}$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \tag{I.2.5}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{I.2.6}$$

în care s-a notat

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{i}F_x(\vec{r}) + \hat{j}F_y(\vec{r}) + \hat{k}F_z(\vec{r}) \tag{I.2.7}$$

Prin analogie cu (I.1.8) avem

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{j}\left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{k}\left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \tag{I.2.8}$$

Laplaceanul funcției $\vec{F}(\vec{r})$ se scrie, ținând cont de (I.1.25)

$$\nabla^2 \vec{F} = \hat{i}\nabla^2 F_x + \hat{j}\nabla^2 F_y + \hat{k}\nabla^2 F_z \tag{I.2.9}$$

**2°. Coordonate cilindrice** (Fig. A I.3)

Sistemul de versori $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{k})$ şi coordonatele $(\rho, \phi, z)$ sunt definite prin relațiile

$$\begin{aligned} &\hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = \hat{\phi} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\rho} = 0 \\ &\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{k},\ \hat{\phi} \times \hat{k} = \hat{\rho},\ \hat{k} \cdot \hat{\rho} = \hat{\phi} \\ &x = \rho \cos\phi,\ y = \rho \sin\phi,\ z = z \end{aligned} \tag{I.2.10}$$

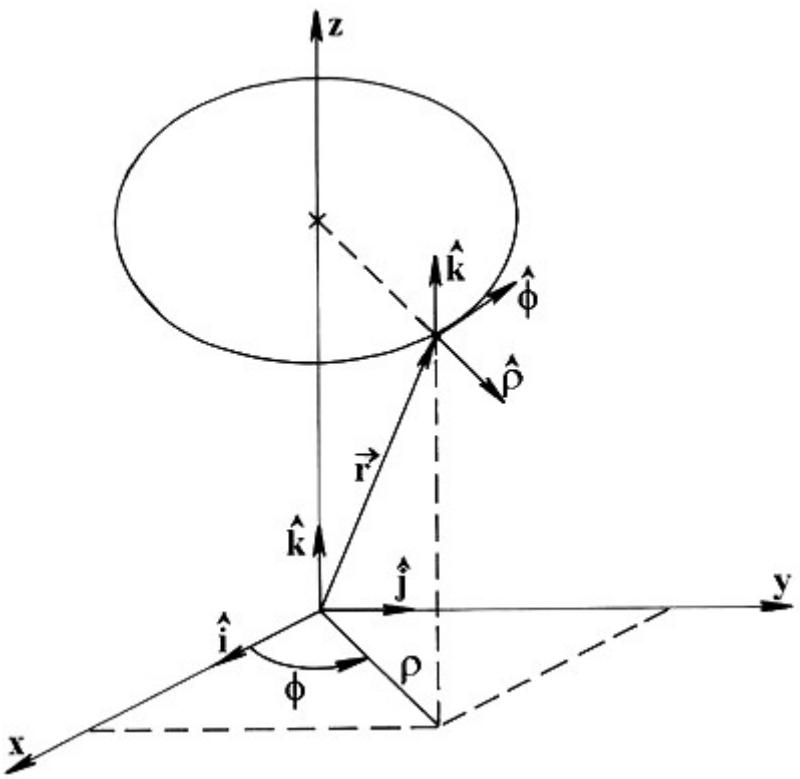



**Fig. A I.3. Sistemul de coordonate cilindrice**

iar $\hat{\rho}$ şi $\hat{\phi}$ pot fi exprimate prin relaţii specifice coordonatelor polare

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi \\ \hat{\phi} &= -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi\end{aligned} \tag{I.2.11}$$

astfel se pot scrie expresiile

$$\begin{aligned}&\frac{d\hat{\rho}}{d\phi} = \hat{\phi},\ \frac{d\hat{\phi}}{d\phi} = -\hat{\rho};\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \hat{\phi}\rho\frac{d\phi}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt} \\ &\nabla = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \tag{I.2.12}$$

Considerând funcţiile

$$\begin{aligned}f(\vec{r}) &= f(\rho,\phi,z), \\ \vec{F}(\vec{r}) &= \hat{\rho}F_\rho(\vec{r}) + \hat{\phi}F_\phi + \hat{k}F_z(\vec{r})\end{aligned} \tag{I.2.13}$$

sunt adevărate relaţiile

$$\nabla f(\vec{r}) = \left(\hat{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \hat{\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f(\rho,\phi,z) \tag{I.2.14}$$

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{I.2.15}$$

$$\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{I.2.16}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F}(\vec{r}) &= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z\end{vmatrix} = \\ &= \hat{\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \hat{\phi}\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right) + \hat{k}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right]\end{aligned} \tag{I.2.17}$$

Ţinând cont de (I.1.25) se poate scrie laplaceanul $\nabla^2$ astfel

$$\nabla^2\vec{F}(\vec{r}) = \hat{\rho}\left(\nabla^2 F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right) + \hat{\phi}\left(\nabla^2 F_\phi - \frac{F_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right) + \hat{k}\nabla^2 F_z \tag{I.2.18}$$

unde $\nabla^2 F_\rho, \nabla^2 F_\phi$ şi $\nabla^2 F_z$ reprezintă operatori Laplace ai unor mărimi scalare care se determină prin expresii de forma (I.2.15). Detalii ale relaţiei (I.2.18) pot fi găsite în [2], sau pot fi obţinute prin utilizarea identităţilor (I.1.24), (I.1.25).

**3°. Coordonate sferice** (Fig. A I.4)

Sistemul de versori $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi})$ şi coordonatele respective sunt definite prin relaţiile

$$\begin{aligned}&\hat{r}\cdot\hat{\theta} = \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = \hat{\phi}\cdot\hat{r} = 0 \\ &\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\phi},\ \hat{\theta}\times\hat{\phi} = \hat{r},\ \hat{\phi}\times\hat{r} = \hat{\theta} \\ &x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta\end{aligned} \tag{I.2.19}$$

Legătura dintre versorii $(\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi})$ şi sistemul de coordonate cartesian este

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta \\ \hat{\theta} &= \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta \\ \hat{\phi} &= -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi\end{aligned} \tag{I.2.20}$$

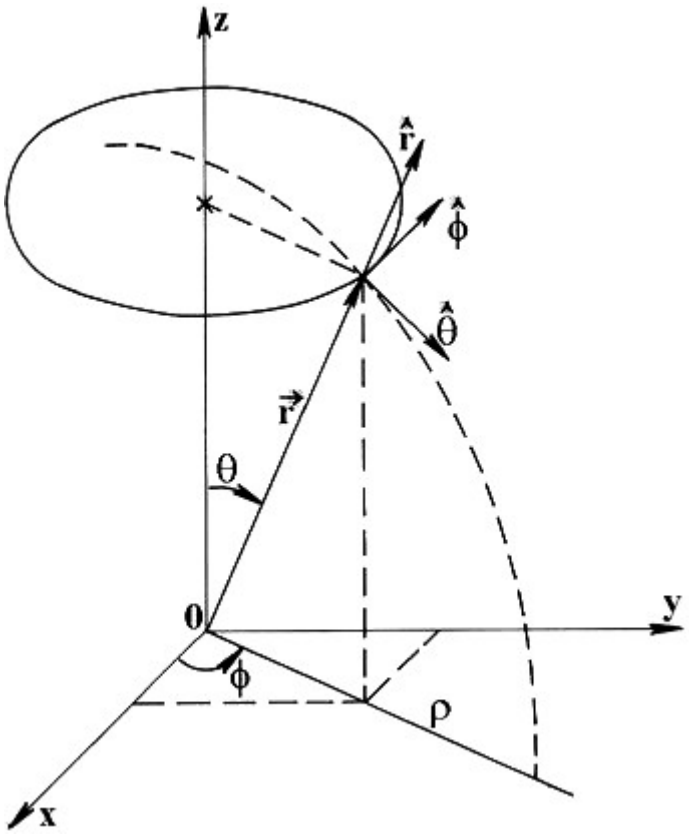



**Fig. A I.4. Sistemul de coordonate sferice**

astfel se pot scrie expresiile

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} &= \hat{\theta},\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{r},\ \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta\,\hat{\phi},\ \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} = \cos\theta\,\hat{\phi} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + r\sin\theta\frac{d\phi}{dt}\hat{\phi} \\ \nabla &= \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\end{aligned} \tag{I.2.21}$$

Considerând funcțiile

$$f(\vec{r}) = f(r,\theta,\phi),\ \vec{F}(\vec{r}) = \hat{r}F_r(\vec{r}) + \hat{\theta}F_\theta(\vec{r}) + \hat{\phi}F_\phi(\vec{r}) \tag{I.2.22}$$

avem

$$\nabla f(\vec{r}) = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) f(r,\theta,\phi) \tag{I.2.23}$$

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} \tag{I.2.24}$$

$$\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2F_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,F_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} \tag{I.2.25}$$

$$\nabla\times\vec{F}(\vec{r})=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\phi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta\,F_\phi\end{vmatrix}= \tag{I.2.26}$$

$$=\hat{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(F_\phi\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right]+\hat{\theta}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\theta\right)\right]+\hat{\phi}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rF_\theta\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]$$

Ţinând cont de (I.1.25) se poate scrie

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{F}(\vec{r})=\hat{r}&\left[\nabla^2F_r-\frac{2}{r^2}F_r-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(F_\theta\sin\theta\right)-\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\right]+\\&+\hat{\theta}\left[\nabla^2F_\theta-\frac{F_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\right]+\\&+\hat{\phi}\left[\nabla^2F_\phi-\frac{F_\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}\right]\end{aligned} \tag{I.2.27}$$

unde $\nabla^2F_r$, $\nabla^2F_\theta$ şi $\nabla^2F_\phi$ se determină după relaţii de forma (I.2.24). Unele detalieri ale ultimei relaţii pot fi găsite în [2] sau pot fi utilizate identităţile (I.1.24), (I.1.25). Adesea la studiul proceselor de radiaţie este necesară trecerea de la sistemul de coordonate sferice la cel cartesian. Relaţiile de legătură sunt

$$\begin{aligned}\hat{i}&=\hat{r}\sin\theta\cos\phi+\hat{\theta}\cos\theta\cos\phi-\hat{\phi}\sin\phi\\ \hat{j}&=\hat{r}\sin\theta\sin\phi+\hat{\theta}\cos\theta\sin\phi+\hat{\phi}\cos\phi\\ \hat{k}&=\hat{r}\cos\theta-\hat{\theta}\sin\theta\end{aligned} \tag{I.2.28}$$

**4°. Aplicaţie: Unghi solid**. Conform Fig. A I.5a, unghiul solid subînscris de aria $S$ în punctul $P$ este definit ca aria $\Omega$ a unei sfere de rază unitate cu centrul în $P$ interceptată (delimitată) de generatoarele conului respectiv. În calcule uzuale interesează exprimarea unui element de unghi solid $d\Omega$ în coordonate sferice; În acest scop ne referim la Fig. A I.5b. Delimităm un element diferenţial de arie $d\vec{S}_0=\hat{n}dS_0$ unde

$$dS_0=AB.AC=r\sin\theta d\phi\cdot rd\theta=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi \tag{I.2.29}$$

Elementul de unghi solid $d\Omega$ corespunde unei sfere de rază $r=1$, astfel avem

$$d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\phi \tag{I.2.30}$$

Se poate face o generalizare considerând elementul de arie $d\vec{S}$ a cărui normală $\hat{n}$ face unghiul $\theta'$ cu vectorul de poziţie $\vec{r}$; în acest caz se poate scrie $dS_0=dS\cos\theta'$, prin urmare este adevărată relaţia

$$d\Omega=\frac{dS_0}{r^2}=\frac{dS\cos\theta'}{r^2}=\frac{d\vec{S}\cdot\vec{r}}{r^3} \tag{I.2.31}$$

Unghiul solid se măsoară în steradieni; definirea steradianului este arătată în Fig. AI.5c: reprezintă unghiul solid cu vârful în centrul sferei de rază *r*, care este subînscris de o suprafaţă sferică având aria egală cu $r^2$.

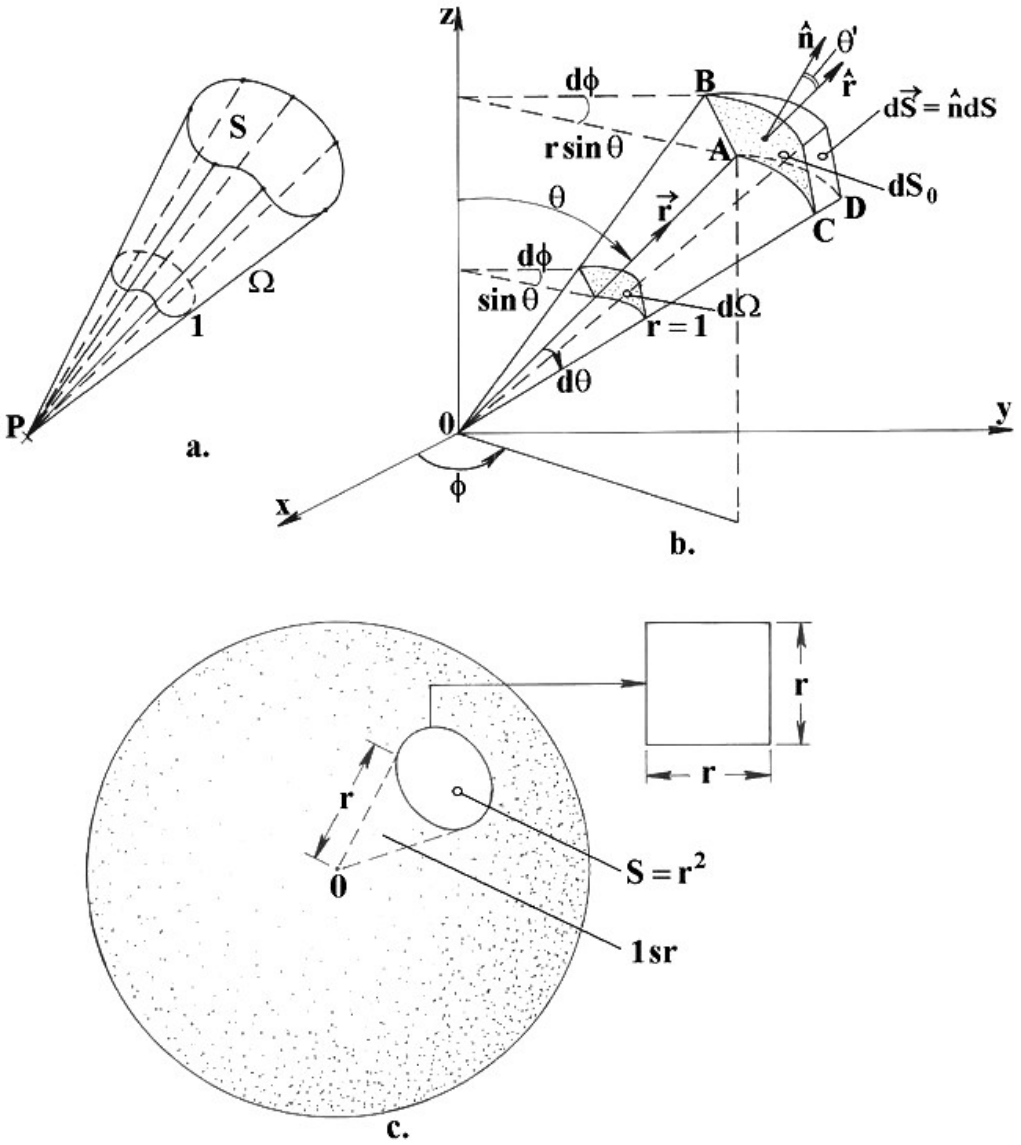



**Fig. A I.5. Unghi solid: a – definiție generală;**
**b – exprimarea unui element de unghi solid în coordonate sferice; c – definirea steradianului**

# ANEXA II. FUNCȚII SPECIALE

Anexa A II include câteva din funcțiile speciale utilizate la analiza câmpului electromagnetic în diferite medii şi sisteme de propagare.

## A II.1. Funcții delta $\delta$ (Dirac)

Funcția $\delta$ (Dirac) este o funcție improprie care există în vecinătatea unui punct $x = x_0$ şi se anulează în orice alt punct al spațiului; în spațiul *unidimensional* se scriu relațiile de definiție

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \neq 0, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \tag{II.1.1}$$

$$\int_I \delta(x - x_0)dx = 1 \tag{II.1.2}$$

unde intervalul $I$ include punctul $x_0$. Trebuie subliniat că nu există o funcție (în sensul matematic uzual) care să satisfacă condițiile (II.1.1) şi (II.1.2), fapt pentru care adesea se utilizează termenul de „funcție simbolică” sau funcție generalizată, a cărei dimensiune este inversul lungimii.

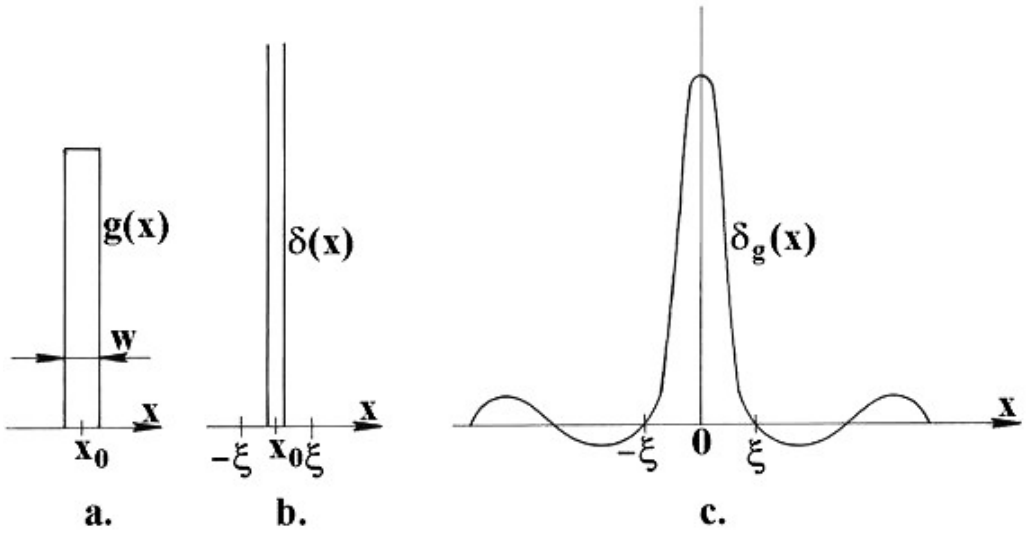



**Fig. A II.1. Funcția Dirac: a – reprezentare prin trecerea la limită a impulsului dreptunghiular; b – integrarea funcției $\delta(x)$; c – reprezentarea lui $\delta(x)$ prin funcții continue**

Funcția $\delta(x-x_0)$ are câteva proprietăți importante pe care le enumerăm mai jos. Dacă $g(x)$ este un impuls dreptunghiular de înălțime $h$ şi lărgime $w$ (Fig. A II.1a), avem

$$\delta(x)=\lim_{w\to 0} g(x), \quad \text{cu} \quad hw=1. \tag{II.1.3}$$

Delimităm intervalul infinitezimal $(-\xi,\xi)$ care include punctul $x_0$ (Fig. A II.1b); se poate scrie

$$\int_{-\xi}^{\xi}\delta(x)dx=1, \quad \int_{0}^{\xi}\delta(x)dx=\frac{1}{2} \tag{II.1.4}$$

Fie $f(x)$ o funcție continuă în punctul $x=x_0$; sunt adevărate relațiile

$$\begin{gathered}\int_I f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\\ f(x)\delta(x-x_0)=f(x_0)\delta(x-x_0)\\ f(x)\delta'(x)=-f'(x)\delta(x)\\ f(x)\delta^{(n)}(x)=(-1)^{(n)}f(x)\delta(x)\end{gathered} \tag{II.1.5}$$

unde $\delta',\delta^{(n)}$ reprezintă derivata de ordin unu, respectiv $n$ ale funcției $\delta(x)$.

Adesea este utilă reprezentarea lui $\delta(x)$ prin funcții continue. Două reprezentări sunt de interes

$$\begin{gathered}\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}e^{jtx}dt\\ \delta_\xi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\xi}^{\xi}e^{jtx}dt=\frac{\sin\xi x}{\pi x}\end{gathered} \tag{II.1.6}$$

ultima relație este reprezentată în Fig. A II.1c unde avem $\delta_\xi(0)=\lim_{x\to 0}\left[\xi\delta_\xi(x)\right]=\xi/\pi$ şi $\delta_\xi(\pm\pi/\xi)=0$. De asemenea, se pot scrie dezvoltările

$$\delta(-x)=\delta(x),\quad x\delta(x)=0$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

$$f(x)\delta(x-a)=\frac{1}{2}[f(a-0)+f(a+0)]\delta(x-a) \tag{II.1.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(a-x)\delta(x-b)dx=\delta(a-b)$$

$$\delta\left(x^2-a^2\right)=\frac{1}{2}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$$

în ultima relație $a$ şi $-a$ sunt rădăcinile funcției $g(x)=x^2-a^2$.

*Spațiul tridimensional.* Relațiile prezentate mai sus se generalizează pentru spațiul tridimensional.

*a) Coordonate cartesiene*. Notația generală este

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \tag{II.1.8}$$

Enumerăm câteva proprietăți mai importante

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=0 \quad \text{pentru} \quad x\neq x_0, y\neq y_0, z\neq z_0 \tag{II.1.9}$$

$$\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=1 \tag{II.1.10}$$

cu condiția ca $\vec{r}_0$ să fie cuprins în $V$, iar $dV=dxdydz$

$$\int_V f(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)dV=\begin{vmatrix} f(\vec{r}_0) & daca \quad \vec{r}_0\in V \\ 0 & in\,celelalte\,cazuri \end{vmatrix} \tag{II.1.11}$$

Utilizând o relație similară cu (II.1.6) avem

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_1\int_{-\infty}^{\infty}dk_2\int_{-\infty}^{\infty}dk_3\,e^{j\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)} \tag{II.1.12}$$

unde $\vec{k}=(k_1,k_2,k_3)$.

*b) Coordonate cilindrice* $(\rho,\phi,z)$. Avem o transformare de coordonate $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$, $z=z$, prin urmare ținând cont de (II.1.8) avem

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0)}{\rho} \tag{II.1.13}$$

Subzistă relațiile

$$\begin{aligned} &\delta(\rho-\rho_0)=0, && \rho\neq\rho_0 \\ &\delta(\phi-\phi_0)=0, && \phi\neq\phi_0 \\ &\delta(z-z_0)=0, && z\neq z_0 \end{aligned} \tag{II.1.14}$$

$$\int\delta(\rho-\rho_0)d\rho=1,\quad \int\delta(\varphi-\varphi_0)d\varphi=1,\quad \int\delta(z-z_0)dz=1 \tag{II.1.15}$$

iar $dV=\rho d\rho d\phi dz$.

Dacă se consideră coordonatele polare plane

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)}{\rho} \tag{II.1.16}$$

*c) Coordonate sferice* $(r,\theta,\phi)$. Avem o transformare de coordonate de tipul (AI,(I.2.19)) $x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ z = r\cos\theta$ ; prin urmare se poate scrie expresia

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{\delta(r-r_0)\delta(\theta-\theta_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r^2\sin\theta} \tag{II.1.17}$$

în care s-a considerat $x_0 = r_0\sin\theta_0\cos\phi_0,\ y_0 = r_0\sin\theta_0\sin\phi_0,\ z_0 = r_0\cos\theta_0$.

Subzistă relațiile

$$\begin{aligned} &\delta(r-r_0) = 0, && r \neq r_0 \\ &\delta(\theta-\theta_0) = 0, && \theta \neq \theta_0 \\ &\delta(\phi-\phi_0) = 0, && \phi \neq \phi_0 \end{aligned} \tag{II.1.18}$$

$$\int_r \delta(r-r_0)dr = 1,\ \int_\theta (\theta-\theta_0)d\theta = 1,\ \int_\phi \delta(\phi-\phi_0)d\phi = 1 \tag{II.1.19}$$

iar

$$dV = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \tag{II.1.20}$$

*d)* În încheierea secțiunii se prezintă câteva relații care implică funcții Dirac.

Dacă $u_n(x)$ este un set ortonormat complet de funcții pe intervalul $I$, atunci funcția continuă $\Phi(x)$ are dezvoltarea

$$\Phi(x) = \sum_n c_n u_n(x) \tag{II.1.21}$$

unde $c_n$ sunt coeficienți Fourier

$$c_n = \int_I u_n(x)\Phi(x)dx \tag{II.1.22}$$

Se poate scrie

$$\Phi(x) = \int_I \delta(x-x_0)\Phi(x_0)dx_0 = \int_I \left[\sum_n u_n(x)u_n(x_0)\right]\Phi(x_0)dx_0 \tag{II.1.23}$$

prin urmare

$$\delta(x-x_0) = \sum_n u_n(x)u_n(x_0) \tag{II.1.24}$$

Utilizând teorema divergenței se poate demonstra relația

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{II.1.25}$$

în care pentru simplificare s-a considerat $r_0 = 0$.

## A II.2. Funcții Bessel

Sub denumirea generică de „funcții Bessel” în această secțiune sunt prezentate diferite funcții ce reprezintă soluții ale unor ecuații diferențiale de ordinul al doilea, scrise în coordonate cilindrice sau sferice care pot fi rezolvate prin metoda separării variabilelor (metoda Fourier).

### A II.2.1. Funcții Bessel cilindrice

**1°. Relații generale.**

Ecuația (2.4.14) din Cap. 2, precum şi cele similare utilizate în capitolele care au urmat, sunt ecuații Bessel în coordonate cilindrice. Dacă în (2.4.14) se notează $k_\lambda\rho = z$ se obțin formele clasice ale ecuației diferențiale Bessel în coordonate cilindrice

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{d\Phi}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)\Phi=0$$
$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z\frac{d\Phi}{dz}\right]+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)\Phi=0 \qquad \text{(II.2.1)}$$

unde $\Phi(z)$ reprezintă o funcție scalară. În general soluțiile sunt funcții cilindrice scrise sub forma unor sume de doi termeni

$$\Phi_n(z)=A_1J_n(z)+A_2N_n(z) \qquad \text{(II.2.2)}$$

$$\Phi_n(z)=B_1H_n^{(1)}(z)+B_2H_n^{(2)}(z) \qquad \text{(II.2.3)}$$

unde: $J_n(z)$ este funcția Bessel de speța întâia şi ordin $n$; $N_n(z)$ este funcția Neumann de speța întâia şi ordin $n$ (adesea $N_n(z)$ este numită funcție Bessel de speța doua şi ordin $n$); $H_n^{(1)}(z)$ este funcția Hankel de speța întâia şi ordin $n$; $H_n^2(z)$ este funcția Hankel de speța doua şi ordin $n$.

Este utilă scrierea unor expresii uzuale de dezvoltare pentru $J_n(z)$ şi $J_{-n}(z)$, precum şi a corelațiilor dintre funcțiile cuprinse în soluțiile (II.2.2) şi (II.2.3).

Funcțiile $J_n(z)$ şi $J_{-n}(z)$ se pot exprima prin sumele infinite

$$J_n(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$
$$J_{-n}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad \text{(II.2.4)}$$

unde $\Gamma(k+n+1)$ şi $\Gamma(k-n+1)$ sunt funcții $\Gamma$ (vezi A II.4); în general $\Gamma(n)=(n-1)!$ (factorialul generalizat $p!$ se defineşte în termenii funcției $\Gamma$, astfel se poate scrie $k!=\Gamma(k+1)$, $(k+n)!=\Gamma(k+n+1)$).

Dacă $n$ este *întreg*, în general soluțiile $J_n(z)$, $J_{-n}(z)$ şi $N_n(z)$ sunt liniar dependente

$$J_n(z)=(-1)^nJ_{-n}(z) \qquad \text{(II.2.5)}$$

$$N_n(z)=\frac{J_n(z)\cos n\pi-J_{-n}(z)}{\sin n\pi} \qquad \text{(II.2.6)}$$

Funcțiile Hankel se exprimă sub forma

$$H_n^{(1)}(z)=J_n(z)+jN_n(z)=\frac{j}{\sin n\pi}\left[e^{-jn\pi}J_n(z)-J_{-n}(z)\right] \qquad \text{(II.2.7)}$$

$$H_n^{(2)}(z)=J_n(z)-jN_n(z)=\frac{-j}{\sin n\pi}\left[e^{jn\pi}J_n(z)-J_{-n}(z)\right] \qquad \text{(II.2.8)}$$

Trebuie subliniat că funcțiile $N_n(z), H_n^{(1)}(z)$ şi $H_n^{(2)}(z)$ au singularități în punctul $z=0$, prin urmare nu se pot utiliza la rezolvarea unor probleme care necesită ca în punctul $z\to 0$ mărimile fizice să aibă valori finite.

**2°. Relații de recurență.**

Notând prin $C_n(z)$ oricare din funcțiile $J_n(z), N_n(z), H_n^{(1)}(z)$ şi $H_n^{(2)}(z)$, sunt satisfăcute relațiile

$$nC_n(z)+zC_n'(z)=zC_{n-1}(z) \tag{II.2.9}$$

$$nC_n(z)-zC_n'(z)=zC_{n+1}(z) \tag{II.2.10}$$

unde $C_n'(z)$ semnifică derivata în raport cu argumentul $z$ ; din ultima relație rezultă

$$C_0'(z)=-C_1(z) \tag{II.2.11}$$

Combinând (II.2.9) şi (II.2.10) se poate scrie

$$C_{n-1}(z)+C_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}C_n(z) \tag{II.2.12}$$

$$C_{n-1}(z)-C_{n+1}(z)=2C_n'(z) \tag{II.2.13}$$

**3°. Valori limită** (comportare asimptotică pentru $|z|<<1$ şi $|z|>>1$).

În aplicații practice sunt utile expresii simplificate pentru valori mici ale argumentului, $z\to 0$ $(|z|<<1)$, precum şi pentru valori mari, $|z|>>1(|z|>>n)$. Pentru valori mici $|z|<<1$ avem

$$J_n(z)\cong\left(\frac{z}{2}\right)^n\frac{1}{\Gamma(n+1)};\qquad J_0(z)\approx 1-\left(\frac{z}{2}\right)^2 \tag{II.2.14}$$

$$N_n(z)\cong-\frac{\Gamma(n)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\quad\text{cu}\quad n>0 \tag{II.2.15}$$

Cât priveşte $N_0(z)$ se pot utiliza două formule

$$N_0(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\left[\ln z+C_0-\ln 2\right]\\ -\dfrac{2}{\pi}\log\left(\dfrac{2}{\gamma z}\right)\end{cases} \tag{II.2.16}$$

unde: $C_0=0{,}5772$ este constanta Euler – Maskeronni; $\gamma=1{,}781$ este constanta Euler.

$$H_n^{1}(z)\cong J_n(z)\left[1-\frac{j}{\pi n J_n^2(z)}\right] \tag{II.2.17}$$

$$H_n^{(2)}(z)\cong J_n(z)\left[1+\frac{j}{\pi n J_n^2(z)}\right] \tag{II.2.18}$$

Pentru valori mari, $|z|>>1$ avem

$$J_n(z)\cong\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{II.2.19}$$

$$N_n(z)\cong\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \tag{II.2.20}$$

$$H_n^{(1)}(z)\cong\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}e^{-j(n\pi/2+\pi/4)} \tag{II.2.21}$$

$$H_n^{(2)}(z)\cong\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}e^{-j(n\pi/2+\pi/4)}e^{-jz} \tag{II.2.22}$$

**4°. Rădăcini ale funcţiilor Bessel.**

Determinarea configuraţiilor de câmp electromagnetic în diferite structuri cilindrice necesită cunoaşterea rădăcinilor $J_n(z)$, $J_n'(z)$ sau $N_n(z)$. Rădăcinile ecuaţiei $J_n(z)=0$ se notează $\rho_{nm}$ şi reprezintă rădăcina a $m$-a a funcţiei Bessel de ordin $n$ (şi speţa întâia); câteva valori sunt date în Tabelul A II.1. În mod similar rădăcinile ecuaţiei $J_n'(z)=0$ se notează $\rho_{nm}'$ şi reprezintă a $m$-a rădăcină a derivatei funcţiei Bessel; valori uzuale sunt date în Tabelul A II.2. rădăcinile ecuaţiei $N_n(z)=0$ se pot obţine prin utilizarea unei relaţii de forma (II.2.6).

**Tabel A II.1 Rădăcinile ecuaţiei $J_n(z) = 0$**

| $n$ \ $\rho_{nm}$ | $\rho_{n1}$ | $\rho_{n2}$ | $\rho_{n3}$ | $\rho_{n4}$ | $\rho_{n5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,40483 | 5,52008 | 8,65373 | 11,79153 | 14,93092 |
| 1 | 3,83171 | 7,01559 | 10,17347 | 13,32369 | 16,47063 |
| 2 | 5,13562 | 8,41724 | 11,61984 | 14,79595 | 17,95982 |
| 3 | 6,38016 | 9,76102 | 13,01520 | 16,22347 | 19,40942 |

**Tabel A II.2 Rădăcinile ecuaţiei $J_n'(z) = 0$**

| $n$ \ $\rho_{nm}'$ | $\rho_{n1}'$ | $\rho_{n2}'$ | $\rho_{n3}'$ | $\rho_{n4}'$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3,83171 | 7,01559 | 10,17347 | 13,32369 |
| 1 | 1,84118 | 5,33144 | 8,53632 | 11,70600 |
| 2 | 3,05424 | 6,70613 | 9,96949 | 13,17037 |
| 3 | 4,20119 | 8,01524 | 11,34592 | 14,58585 |

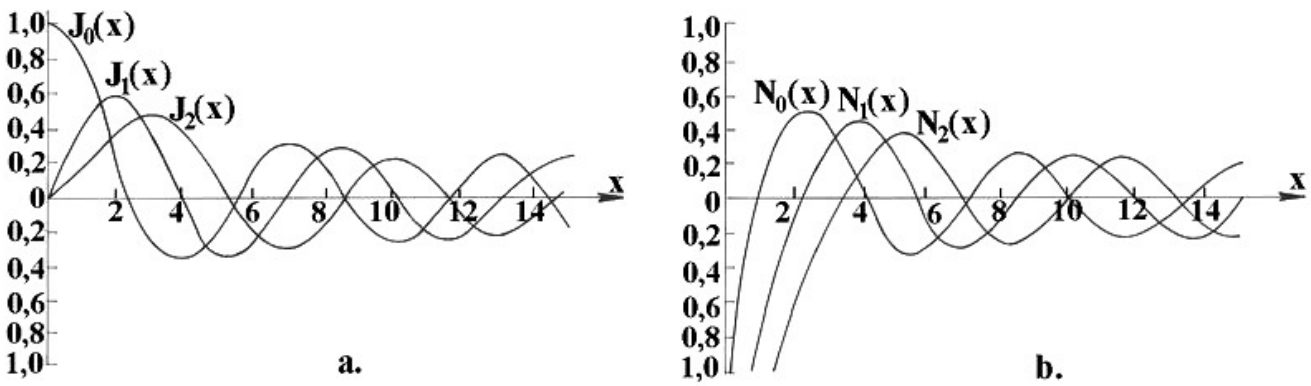



**Fig. A II.2. Variaţii ale funcţiilor Bessel: a – funcţii Bessel de speţa întâia; b – funcţii Bessel de speţa a doua**

Variaţiile funcţiilor $J_n(z)$ şi $N_n(z)$ sunt reprezentate în Fig. A II.2a,b. Referitor la Fig. A II.2a se pot face câteva observaţii utile. Ţinând cont şi de relaţiile de recurenţă (II.2.9), (II.2.10), din

figură se observă că pentru $n = 1,2,...$ rădăcinile succesive ale funcției $J_n(z)$ sunt separate (intercalate) de rădăcinile succesive ale funcției $J_{n+1}(z)$, sau ale funcției $J_n'(z)$. Pentru $z \to 0$ funcția $J_n(z)$ are valori finite. Referitor la Fig. A II.2b se constată de asemenea că pentru $n = 1,2,3,...$ rădăcinile funcției $N_n(z)$ sunt intercalate de rădăcinile funcției $N_{n+}(z)$; pentru $z \to 0$, funcțiile $N_n(z)$ tind asimptotic la $-\infty$.

### A II.2.2. Funcții Bessel modificate

**1°. Relații generale.**

Ecuația Bessel modificată are forma

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\Phi}{dz} - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right)\Phi = 0 \tag{II.2.23}$$

Astfel de ecuații se întâlnesc de exemplu în cazul unor ecuații de propagare cu constanta de propagare $\vec{k}$ imaginară, adică undele sunt puternic atenuate.

Sub formă generală, pentru $n$ real şi întreg, soluția se scrie ca sumă de doi termeni independenți

$$\Phi(z) = A_0 I_n(z) + B_0 K_n(z) \tag{II.2.24}$$

unde $I_n(z)$ şi $K_n(z)$ sunt numite funcții Bessel modificate de speța întâia, respectiv speța doua; adesea $K_n(z)$ este numită funcție Hankel modificată.

Funcțiile $I_n(z)$ şi $K_n(z)$ sunt definite prin expresiile

$$I_n(z) = e^{-jn\pi/2} J_n(jz) \tag{II.2.25}$$

$$K_n(z) = j\frac{\pi}{2} e^{jn\pi/2} H_n^{(1)}(jz) \tag{II.2.26}$$

care satisfac relațiile de recurență

$$\begin{aligned} I_n'(z) - nI_n(z) &= zI_{n+1}(z) \\ zI_n'(z) + nI_n(z) &= zI_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{II.2.27}$$

$$\begin{aligned} zK_n'(z) - nK_n(z) &= -zK_{n+1}(z) \\ zK_n'(z) + nK_n(z) &= -zK_{n-1}(z) \end{aligned} \tag{II.2.28}$$

Din (II.2.27) se scoate

$$\begin{aligned} I_{n+1}(z) - I_{n-1}(z) &= -\frac{2n}{z} I_n(z) \\ I_{n+1}(z) + I_{n-1}(z) &= 2I_n'(z) \end{aligned} \tag{II.2.29}$$

În mod similar din (II.2.28) se scoate

$$\begin{aligned} K_{n+1}(z) - K_{n-1}(z) &= \frac{2n}{z} K_n(z) \\ K_{n+1}(z) + K_{n-1}(z) &= -2K_n'(z) \end{aligned} \tag{II.2.30}$$

Sunt de interes practic două expresii pentru $n = 0$; avem

$$I_0'(z) = I_1(z); \quad K_0'(z) = -K_1(z) \tag{II.2.31}$$

**2°. Valori limită.**

Mai întâi este utilă prezentarea unor dezvoltări analitice pentru funcțiile $I_n(z)$, $K_n(z)$, cu $n$ pozitiv, întreg:

$$I_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

$$K_n(z)=\frac{\pi}{2}\left[I_{-n}(z)-I_n(z)\right]cosec\,\pi n \qquad \text{(II.2.32)}$$

$$I_{-n}(z)=I_n(z)$$

Pentru valori mici ale argumentului, $|z|<<1$, avem

$$I_n(z)\cong\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^2$$

$$K_n(z)\cong\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n)}{2}\left(\dfrac{z}{2}\right)^{-n}, & n>0\\ -\left[log(z/2)+\gamma\right], & n=0\end{cases} \qquad \text{(II.2.33)}$$

Pentru valori mari ale argumentului, $|z|>>1$, avem

$$I_n(z)\cong\frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}}$$

$$K_n(z)\cong\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z} \qquad \text{(II.2.34)}$$

Adesea este utilă o dezvoltare asimptotică a funcției $K_n(z)$, pentru valori ridicate ale argumentului $z$

$$K_n(z)\cong\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z}\left[1+\frac{4n^2-1}{1!8z}+\frac{\left(4n^2-1\right)\left(4n^2-3^2\right)}{2!(8z)^2}+...\right] \qquad \text{(II.2.35)}$$

**A II.2.3. Funcții Bessel sferice**

Ecuația de propagare omogenă în coordonate sferice este de forma

$$\left[\nabla^2+k^2\right]\vec{\Psi}(\vec{r})=0 \qquad \text{(II.2.36)}$$

$$\left[\nabla^2+k^2\right]f(\vec{r})=0 \qquad \text{(II.2.37)}$$

unde: operatorul Laplace are expresia (AI,(I.2.24)) sau (AI,(I.2.27)), după caz; $\vec{k}$ este numărul de undă (constantă de propagare).

Utilizând metoda separării variabilelor $f(\vec{r})=R(r)\Theta(\theta)\Psi(\phi)$ (sau uneori $f(\vec{r})=R(r)Y(\theta,\phi)$), ecuația (II.2.37) este echivalentă cu trei ecuații independente

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{r}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{p^2}{r^2}\right)\right]R(r)=0 \qquad \text{(II.2.38)}$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)+\left(p-\frac{\mu_\theta^2}{\sin^2\theta}\right)\right]\Theta(\theta)=0 \qquad \text{(II.2.39)}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\phi^2}+\mu_\phi^2\right)\Psi(\phi)=0 \qquad \text{(II.2.40)}$$

Ecuația (II.2.38) este o ecuație Bessel în coordonate sferice; ea are soluții numai pentru $p^2 = n(n+1)$ cu $n$ întreg. Făcând substituția $z = kr, R(r) = (kr)^{1/2} R_k(r)$ se obține

$$\frac{d^2 R_k}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dR_k}{dz} + \left[1 - \frac{(n+1/2)^2}{z^2}\right] R_k = 0 \tag{II.2.41}$$

Ultima ecuație este de forma (II.2.1), unde în locul lui $n$ avem $(n+1/2)$; soluțiile sunt de forma

$$\begin{aligned} R_k(r) &= C_1 J_{n+1/2}(z) + C_2 N_{n+1/2}(z) \\ R_k(r) &= D_1 H^{(1)}_{n+1/2}(z) + D_2 H^{(2)}_{n+1/2}(z) \end{aligned} \tag{II.2.42}$$

Funcțiile Bessel, Neumann şi Hankel sferice, notate cu litere mici, se pot exprima cu ajutorul funcțiilor Bessel clasice (cilindrice) prin relația generală

$$c_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} C_{n+1/2}(z) \tag{II.2.43}$$

unde $c_n(z)$ reprezintă oricare din funcțiile sferice: $j_n(z),\ n_n(z),\ h_n^{(1)}(z),\ h_n^{(2)}(z)$. Se poate scrie

$$\begin{aligned} j_n(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(z), \qquad n_n(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} N_{n+1/2}(z) \\ h_n^{(1)}(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} H^{(1)}_{n+1/2}(z), \quad h_n^{(2)}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} H^{(2)}_{n+1/2}(z) \end{aligned} \tag{II.2.44}$$

O formulă generală de dezvoltare pentru funcția $J_{k+1/2}(z)$ este [1]

$$J_{k+1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} z^{k+1/2} \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k \frac{\sin z}{z}, \qquad k = 1,2,3,... \tag{II.2.45}$$

Celelalte funcții $N_{k+1/2}(z),\ H^{(1)}_{k+1/2}(z),\ H^{(z)}_{k+1/2}(z)$ se obțin prin utilizarea relațiilor de legătură de tipul (II.2.6)÷(II.2.8).

Funcțiile Bessel de ordin $n = \pm 1/2, \pm 3/2, ...$, se exprimă de regulă prin funcții elementare. Prezentăm câteva expresii pentru funcții de ordine inferioare ( $j$ fără indici este numărul imaginar $(-1)^{1/2}$ )

$$J_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin z}{z^{1/2}}, \qquad J_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\cos z}{z^{1/2}} \tag{II.2.46}$$

$$J_{3/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(-\frac{\cos z}{z^{1/2}} + \frac{\sin z}{z^{3/2}}\right), \qquad J_{-3/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(-\frac{\sin z}{z^{1/2}} - \frac{\cos z}{z^{3/2}}\right) \tag{II.2.47}$$

$$H^{(1)}_{1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{jz}}{j}, \qquad H^{(1)}_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{jz} \tag{II.2.48}$$

$$H^{(2)}_{1/2}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{-jz}}{j}, \qquad H^{(2)}_{-1/2}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-jz} \tag{II.2.49}$$

Sunt utile câteva expresii uzuale pentru funcțiile Bessel, Neumann şi Hankel sferice (II.2.44) cu $n$ întreg: pentru $n = 0$ avem

$$j_0(z)=\frac{\sin z}{z},\ n_0(z)=-\frac{\cos z}{z},\ h_0^{(1)}(z)=-j\frac{e^{jz}}{z},\ h_0^{(2)}(z)=j\frac{e^{-jz}}{z};\qquad \text{(II.2.50)}$$

pentru $n=1$ şi $n=2$ se obţine

$$j_1(z)=\frac{\sin z}{z^2}-\frac{\cos z}{z},\ n_1(z)=-\frac{\cos z}{z^2}-\frac{\sin z}{z},\ h_1^{(1)}(z)=-\frac{e^{-jz}}{z}\left(1+\frac{j}{z}\right)$$
$$j_2(z)=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\sin z-\frac{3\cos z}{z^2},\ n_2(z)=-\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\cos z-\frac{3\sin z}{z^3},\qquad \text{(II.2.51)}$$
$$h_2^{(1)}(z)=\frac{je^{jz}}{z}\left(1+\frac{3j}{z}-\frac{3}{z^2}\right)$$

În finalul secţiunii se prezintă relaţii de recurenţă pentru funcţiile sferice, precum şi valori limită

**Relaţii de recurenţă.** Ţinând cont de relaţiile generale

$$h_n^{(1)}(z)=j_n(z)+jn_n(z),\qquad h_n^{(2)}(z)=j_n(z)-jn_n(z)\qquad \text{(II.2.52)}$$

se scriu relaţiile de recurenţă

$$\begin{aligned}(2n+1)c_n(z)&=z\left[c_{n+1}(z)+c_{n-1}(z)\right]\\(2n+1)c_n'(z)&=\left[nc_{n-1}(z)-(n+1)c_{n+1}(z)\right]\end{aligned}\qquad \text{(II.2.53)}$$

**Valori limită.** Comportarea asimptotică pentru $z>>1$ (şi $z>>n$) este descrisă de relaţiile

$$j_n(z)\cong\frac{1}{z}\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right),\qquad n_n(z)\cong-\frac{1}{z}\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$h_n^{(1)}(z)\cong(-1)^{n+1}\frac{e^{jz}}{z}\qquad \text{(II.2.54)}$$

Comportarea asimptotică pentru $z<<1$ este descrisă de relaţiile

$$j_n(z)\to\frac{2^n n!\,z^n}{(2n+1)!}\left[1-\frac{z^2}{2(2n+3)}+\ldots\right]$$
$$n_n(z)\to-\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!\,z^{n+1}}\left[1-\frac{z^2}{2(1-2n)}+\ldots\right]\qquad \text{(II.2.55)}$$

## A II.3. Polinoame Legendre

Există mai multe modalităţi de definire a polinoamelor Legendre [1]; în cadrul acestei Anexe prin polinoame Legendre se vor înţelege funcţii Legendre asociate care sunt soluţii ale *ecuaţiei diferenţiale Legendre generalizate* de forma

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta}{dz^2}-2z\frac{d\Theta}{dz}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right]\Theta=0\qquad \text{(II.3.1)}$$

unde $n,m$ pot fi numere reale sau complexe.

Întâi trebuie subliniat că ecuaţia diferenţială (II.2.39) este identică cu ecuaţia diferenţială Legendre (II.3.1). Într-adevăr dacă în (II.2.30) punem $\cos\theta=z$ şi $\sin^2\theta=1-z^2$, se obţine

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{d\theta}{dz}\right]+\left[n(n+1)-\frac{\mu_\theta^2}{1-z^2}\right]\Theta=0\qquad \text{(II.3.2)}$$

care este identică cu (II.3.1).

Forma generală a soluțiilor ecuației (II.3.1) este

$$P_n^m(z)=\frac{1}{2^m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!\,m!}\left(1-z^2\right)^{m/2}F\left(m-n,m+n+1,m+1,\frac{1-z}{2}\right)=$$

$$=\left(1-z^2\right)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_n^m(z)=\frac{\left(1-z^2\right)^{m/2}}{2^n\,n!}\frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}}\left(z^2-1\right)^n=(-1)^{n+m}P_n^m(-z) \qquad \text{(II.3.3)}$$

$$n=0,1,2,3,\ldots \qquad m=0,1,2,\ldots,n$$

unde $P_n^m(z)$ se numesc *funcții Legendre asociate* de speța întâia iar argumentul este cuprins între $-1\le z\le 1$.

În problemele de câmp electromagnetic (excitarea unor sisteme de propagare ghidată sau propagare în spațiul liber) sunt de interes două cazuri particulare

**1°. Coeficienții $m$ şi $n$ au valorile: $n$ întreg, $m=0$**

În acest caz ecuația (II.3.1) (sau (II.3.2) cu $\mu_\theta=0$) devine

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2\Theta}{dz^2}-2z\frac{d\Theta}{dz}+n(n+1)\Theta=0 \qquad \text{(II.3.4)}$$

şi este numită simplu ecuație diferențială Legendre. Soluțiile acestei ecuații se exprimă sub forma a doi termeni

$$\Theta=A_1P_n(z)+A_2Q_n(z) \qquad \text{(II.3.5)}$$

unde; $P_n(z=\cos\theta)$ sunt polinoame (funcții) Legendre de speța întâia ($P_n(z)$ este o funcție pară pentru $n$ par sau impară pentru $n$ impar) şi este o funcție regulată în intervalul $-1\le z\le 1$ $(0\le\theta\le\pi)$; $Q_n(z)$ se numeşte funcție Legendre de speța a doua, care devine infinită la $\theta=0$ şi $\theta=\pi$. În cazul $m=0$ formula de dezvoltare pentru $P_n(z)$ devine

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2-1\right)^n \qquad \text{(II.3.6)}$$

C*âteva valori uzuale şi relații de recurență*

$$P_0(z)=1,\ P_1(z)=z,\ P_2(z)=\frac{1}{2}\left(3z^2-1\right),\ P_3=\frac{1}{2}\left(5z^2-3z\right)$$

$$Q_0(z)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z},\ Q_1(z)=\frac{z}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}-1,\ Q_2(z)=\frac{3z^2-1}{4}\ln\frac{1+z}{1-z}-\frac{3z}{2} \qquad \text{(II.3.7)}$$

$$(n+1)P_n(z)=P_{n+1}'(z)-zP_n'(z)$$
$$(2n+1)P_n(z)=P_{n+1}'(z)-P_{n-1}'(z)$$
$$nP_n(z)=zP_n'(z)-P_{n-1}'(z) \qquad \text{(II.3.8)}$$
$$nzP_n(z)=\left(z^2-1\right)P_n'(z)+nP_{n-1}(z)$$

Funcțiile $Q_n(z)$ satisfac aceleaşi relații de recurență.

Dacă $n$ este întreg $P_n(z)$ şi $P_n(-z)$ nu sunt independente şi sunt legate prin relația

$$P_n(-z)=(-1)^nP_n(z) \qquad \text{(II.3.9)}$$

Funcțiile $P_n(z)$ şi $Q_n(z)$ satisfac relații de ortogonalitate (la fel ca funcțiile trigonometrice şi funcțiile Bessel)

$$\int_{-1}^{1} P_n(z)P_p(z)dz = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \dfrac{2}{2^n+1} & p = n \end{cases} \qquad \text{(II.3.10)}$$

**2°. Coeficienții $m$ şi $n$ sunt întregi.**

Dacă $m$ (sau $\mu_\theta$) este un întreg pozitiv, rămâne valabilă ecuația Legendre generalizată (II.3.1) iar soluția se scrie

$$\Theta(z) = B_1 P_n^m(z) + B_2 Q_n^m(z) \qquad \text{(II.3.11)}$$

unde $P_n^m(z)$ şi $Q_n^m(z)$ sunt numite *funcții* (*polinoame*) *Legendre asociate* de speța întâia, respectiv speța doua. Ambele funcții se anulează pentru $m > n\ (m = 0,1,2,\ldots,n)$ iar $Q_n^m(z)$ devine infinită la $\theta = 0$ şi $\theta = \pi$.

Relația generală de ortogonalitate în intervalul $(-1,1)$ este

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(z)P_p^m(z)dz = \begin{cases} 0 & p \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & p = n \end{cases} \qquad \text{(II.3.12)}$$

De asemenea, avem dezvoltările

$$\left.\begin{aligned} P_n^m(z) &= (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) \\ P_n^m(-z) &= (-1)^{n+m}P_n^m(z) \\ Q_n^m(z) &= (1-z^2)^{m/2}\frac{d^m}{dz^m}Q_n(z) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.3.13)}$$

Câteva relații de recurență

$$\left.\begin{aligned} &(n-m+1)P_{n+1}^m(z) - (2n+1)zP_n^m(z) + (n+m)P_{n-1}^m(z) = 0 \\ &P_{n-1}^m(z) = zP_n^m(z) - (n-m+1)(1-z^2)^{1/2}P_n^{m-1}(z) \\ &P_{n+1}^m(z) = zP_n^m(z) + (n+m)(1-z^2)^{1/2}P_n^{m-1}(z) \\ &(1-z^2)^{1/2}P_n^{m+1}(z) = (n+m+1)zP_n^m(z) - (n-m+1)P_{n+1}^m(z) \\ &(1-z^2)^{1/2}P_n^m(z) = \frac{1}{2n+1}\left[P_{n+1}^{m+1}(z) - P_{n-1}^{m+1}(z)\right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.3.14)}$$

**Valori uzuale**

$$\begin{aligned} P_1^1(z) &= (1-z^2)^{1/2} = \sin\theta & P_3^2(z) &= 15(1-z^2)z \\ P_2^1(z) &= 3(1-z^2)^{1/2}z & P_3^3(z) &= 15(1-z^2)^{3/2} \\ P_2^2(z) &= 3(1-z^2) & P_3^1(z) &= (3/2)(1-z^2)^{1/2}(5z^2-1) \end{aligned} \qquad \text{(II.3.15)}$$

**Armonici sferice.** Funcțiile $P_n^m(z)\cos m\phi$ şi $P_n^m(z)\sin m\phi$ (sau $P_n^m(z)e^{jm\phi}$) sunt numite *armonici tesserale* de grad $n$ şi ordin $m$. Astfel de funcții survin în soluția generală a ecuației de propagare în coordonate sferice (II.2.37); într-adevăr aceste funcții pot fi privite ca produsul soluțiilor ecuațiilor (II.2.39) şi (II.2.40), notate $Y(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Psi(\phi)$. Ecuația diferențială pentru $Y(\theta,\phi)$ este o ecuație cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} + \cot an\,\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + n(n+1)Y = 0 \qquad \text{(II3.16)}$$

Punând condiția de existență a unor soluții regulate în intervalul $0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi$ şi $Y(\theta,\phi+2\pi)=Y(\theta,\phi)$, atunci aceste soluții pot fi obținute numai pentru $n$ întreg.

Dacă *armonicele tesserale* sunt multiplicate cu un set de constante arbitrare şi apoi însumate, se obțin *armonicele sferice de suprafață* de grad $n$

$$Y_n(\theta,\phi)=\sum_{m=0}^{n}[\alpha_{nm}\cos m\phi+\beta_{nm}\sin m\phi]P_n^m(\cos\theta) \tag{II.3.17}$$

Armonicele tesserale formează un set complet de funcții ortogonale pe suprafața unei sfere de rază $r=const$; această proprietate decurge din proprietățile de ortogonalitate ale termenilor $\cos(m\phi)$, $\sin(m\phi)$ şi $P_n^m(\cos\theta)$. Fie o funcție arbitrară $g(\theta,\phi)$, care împreună cu derivatele de ordin unu şi ordin doi, este continuă pe suprafața sferei. Atunci această funcție poate fi reprezentată prin serii absolut convergente ale armonicilor de suprafață

$$g(\theta,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_{n0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}[\alpha_{nm}\cos m\phi+\beta_{nm}\sin m\phi]P_n^m(\cos\theta)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\gamma_{nm}P^{|m|}(\cos\theta)e^{jm\phi} \tag{II.3.18}$$

în care coeficienții $\alpha_{nm},\beta_{nm},\gamma_{nm}$ au expresiile [1]

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{nm}&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\cos m\phi\,d\phi\int_0^{\pi}Y(\theta,\phi)P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\\
\beta_{nm}&=\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\sin m\phi\,d\phi\int_0^{\pi}Y(\theta,\phi)P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\\
\gamma_{nm}&=\frac{1}{2}(\alpha_{nm}-\beta_{nm})=\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}e^{jm\phi}d\phi\int_0^{2\pi}Y(\theta,\phi)P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}\right\} \tag{II.3.19}$$

## A II.4. Funcții gama $(\Gamma)$

Aşa cum s-a constatat în Anexa A II.2, funcțiile $\Gamma$ sunt utilizate pentru exprimarea funcțiilor Bessel sub formă de sume infinite; aici se prezintă pe scurt diferite forme de exprimare a funcțiilor gama.

**a) Forme integrale**

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt \qquad (Re\,z>0) \tag{II.4.1}$$

care este o integrală Euler de speța a doua;

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi j}\int_C e^t t^{-z}dt \qquad (Re\,z<0) \tag{II.4.2}$$

care este numită integrală Hankel; conturul $C$ de integrare pleacă de la $-\infty$ pe tronsonul negativ al axei reale, înconjoară originea pe un drum contra axelor de ceasornic şi revine în punctul de pornire.

$\Gamma(z)$ poate avea puncte singulare în partea finită a suprafeței, care sunt poli simpli determinați de raportul $(-1)^n/n!$ cu $z=-n$ $(n=0,1,2,...)$. Valori uzuale:

$$\Gamma(1/2)=\pi^{1/2},\qquad \Gamma(1)=1,\qquad \Gamma(n+1)=n! \tag{II.4.3}$$

**a) Alte reprezentări**

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{z(z+1)(z+2)...(z+n)}n^z \tag{II.4.4}$$

numită formulă Euler;

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{zC}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k} \tag{II.4.5}$$

numită produs infinit Weyerstrasse iar $C$ este constanta Euler – Maskeronni şi are expresia

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(1/k)-\ln n\right)=-\int_0^{\infty}e^{-t}\ln t\,dt=-\int_0^{1}\ln\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)d\tau\cong 0{,}5772 \tag{II.4.6}$$

**b) Relaţii funcţionale**

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\\&\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}\\&\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}\end{aligned}\right\} \tag{II.4.7}$$

$$\Gamma(nz)=\left[\frac{n^{2nz-1}}{(2\pi)^{n-1}}\right]^{1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)...\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right),\qquad n=2,3,... \tag{II.4.8}$$

Ultima relaţie reprezintă teorema produsului Gauss.

# ANEXA III. TEOREME ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC

## A III.1. Relaţii generale

În această secţiune sunt incluse câteva relaţii generale referitoare la divergenţă, rotor şi gradient, precum şi identităţile Green; datorită faptului că la definirea teoremelor se folosesc relaţii integrale, adesea se utilizează termenul de „*teoreme integrale*”.

**1°. Teorema divergenţei.**

Se consideră volumul simplu conex $V$ delimitat de o suprafaţă închisă şi regulată $S$; mărimile (funcţiile asociate) sunt univoce şi continue în $V$ şi pe $S$; de asemenea toate derivatele parţiale care intervin în integralele de volum şi de suprafaţă sunt continue în $V$ şi pe $S$. Teorema divergenţei, numită şi legea Gauss, afirmă că integrala de volum a divergenţei unei funcţii vectoriale $\vec{F}(\vec{r})$ este egală cu integrala de suprafaţă a componentelor normale ale vectorului care ies din volumul $V$ limitat de suprafaţa închisă $S$

$$\int_V\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r})dV=\oint_S\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{s};\quad d\vec{s}=\hat{n}ds \tag{III.1.1}$$

unde $\hat{n}$ este normala la suprafaţă, îndreptată spre exterior. Dacă $\vec{F}(\vec{r})$ va reprezenta vectorul densitate de flux electric (vector deplasare electrică) $\vec{D}(\vec{r})$, integrala de volum este egală cu sarcina totală cuprinsă în volum, $\int_V\rho dV=Q$, astfel rezultă legea lui Gauss din electrostatică

$$\int_S\vec{D}\cdot d\vec{s}=\int_S\vec{D}\cdot\hat{n}ds=\int_V\rho dV=Q \tag{III.1.2}$$

**2°. Teorema rotorului.**

Forma generală a teoremei este

$$\int_V \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) dV = \int_S d\vec{s} \times \vec{F}(\vec{r}) \tag{III.1.3}$$

Se poate enunța o particularizare importantă: dacă în volumul $V$, finit şi simplu conex, se consideră o suprafață simplu conexă şi regulată care se sprijină pe curba $C$ închisă şi regulată, avem

$$\int_S d\vec{s} \cdot \left[\nabla \times \vec{F}(\vec{r})\right] = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \tag{III.1.4}$$

(uneori se spune că suprafața $S$ subîntinde conturul $C$). Ultima relație reprezintă teorema Stokes şi are enunțul clasic: integrala curbilinie a vectorului $\vec{F}(\vec{r})$ pe conturul închis $C$ este egală cu fluxul rotorului $\nabla \times \vec{F}(\vec{r})$ prin suprafața $S$ care subîntinde conturul $C$; notând $d\vec{s} = \hat{n} ds$ şi $\vec{r} = \hat{r} r$ versorul $\hat{n}$ trebuie să fie în concordanță cu orientarea conturului $C$ după regula burghiului drept. Utilizând produse vectoriale termenii din (III.1.4) se scriu

$$\int_S (d\vec{s} \times \nabla) \times \vec{F}(\vec{r}) = \int_C d\vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) \tag{III.1.5}$$

$$\int_S d\vec{s} \times \nabla \Phi(\vec{r}) = \int_C d\vec{r} \times \Phi(\vec{r}) \tag{III.1.6}$$

unde $\Phi(\vec{r})$ este o funcție scalară.

Ultimele două relații rămân valabile şi pentru volume $V$ nelimitate dacă funcțiile de sub integralele de contur sunt de ordin $Q\left(1/r^2\right)$ când $r \to \infty$.

**3°. Teorema gradientului.**

Fie funcția scalară $\Phi(\vec{r})$, pentru care teorema se scrie

$$\int_V \nabla \Phi(\vec{r}) dV = \int_S d\vec{s}\, \Phi(\vec{r}) \tag{III.1.7}$$

**4°. Identități Green.**

Se consideră funcția vectorială $\vec{F}(\vec{r})$ de forma $\vec{F}(\vec{r}) = \Psi \nabla \Phi$, unde $\Psi$ şi $\Phi$ sunt funcții scalare; ținând cont de teorema divergenței (III.1.1) rezultă

$$\int_V \nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) dV = \int_S (\Psi \nabla \Phi) \cdot d\vec{s} = \int_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \tag{III.1.8}$$

unde $\partial/\partial n$ reprezintă derivata după normala îndreptată spre exteriorul suprafeței $S$ ce înconjoară volumul $V$. Aplicând identitatea vectorială (I.1.17) termenul de sub integrala de volum avem

$$\nabla \cdot (\Psi \nabla \Phi) = \nabla \Psi \cdot \nabla \Phi + \Psi \nabla^2 \Phi \tag{III.1.9}$$

astfel se obține *prima identitate Green*

$$\int_V \left(\nabla \Psi \cdot \nabla \Phi + \Psi \nabla^2 \Phi\right) dV = \int_S \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \tag{III.1.10}$$

Dacă se inversează funcțiile $\Psi$ şi $\Phi$ se obține

$$\int_V \left(\nabla \Phi \cdot \nabla \Psi + \Phi \nabla^2 \Psi\right) dV = \int_S \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} ds \tag{III.1.11}$$

care reprezintă o altă formă a primei identități Green

Scăzând (III.1.11) din (III.1.10) rezultă

$$\int_V \left(\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi\right) dV = \int_S \left(\Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n}\right) ds \tag{III.1.12}$$

care reprezintă *a doua identitate Green*, numită şi *teorema Green*.

Echivalentele bidimensionale ale celor două identități Green sunt

$$\int_{S_0}\left(\nabla_T\Psi\cdot\nabla_T\Phi+\Psi\nabla_T^2\Phi\right)ds_0=\oint_C\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}dl \tag{III.1.13}$$

$$\int_{S_0}\left(\Psi\nabla_T^2\Phi-\Phi\nabla_T^2\Psi\right)ds_0=\oint_C\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)dl \tag{III.1.14}$$

unde: $\nabla_T^2$ este operatorul Laplace bidimensional; $C$ este un contur închis; $S_0$ este aria înconjurată de $C$.

Echivalentele unidimensionale pe direcția $z$ sunt

$$\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)dz=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z_1}^{z_2} \tag{III.1.15}$$

$$\int_{z_1}^{z_2}\left(\Psi\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\Phi\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)dz=\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\Big|_{z_1}^{z_2} \tag{III.1.16}$$

Identitățile Green au şi forme vectoriale [3]; considerând vectorii $\vec{A}$ şi $\vec{B}$, cele două identități Green au expresiile

$$\int_V\left(\nabla\times\vec{A}\cdot\nabla\vec{B}-\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B}\right)dV=\int_V\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\nabla\times\vec{B}\right)dV=\int_S\left(\vec{A}\times\nabla\times\vec{B}\right)\cdot d\vec{s} \tag{III.1.17}$$

$$\int_V\left(\vec{B}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{A}-\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B}\right)dV=\int_S\left(\vec{A}\times\nabla\times\vec{B}-\vec{B}\times\nabla\times\vec{A}\right)\cdot d\vec{s} \tag{III.1.18}$$

## A III.2. Câteva teoreme utilizate în teoria câmpului electromagnetic

La analiza câmpului electromagnetic în diferite medii şi structuri sunt utilizate mai multe teoreme care simplifică calculele în cazuri concrete; câteva dintre aceste teoreme sunt prezentate în Anexa de față.

**1°. Teorema de dualitate.**

Sub formă generală teorema de dualitate se referă la posibilitățile de schimbare reciprocă a mărimilor $\vec{E},\vec{H},\vec{J},\vec{J}_m,\rho,\rho_m$ sau a proprietăților de material, astfel încât forma ecuațiilor Maxwell să rămână invariantă.

Scriem ecuațiile Maxwell simetrice sub formă generală pentru câmpuri armonice [5] (similare cu (1.2.9) – (1.2.14))

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}+\vec{J} \tag{III.2.1}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}-\vec{J}_m \tag{III.2.2}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \tag{III.2.3}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=\rho_m \tag{III.2.4}$$

$$\nabla\cdot\vec{J}+j\omega\rho=0 \tag{III.2.5}$$

$$\nabla\cdot\vec{J}_m+j\omega\rho_m=0 \tag{III.2.6}$$

unde: $\vec{J}$ poate include atât curentul sursă (impregnat) $\vec{J}$ cât şi curentul produs de câmpul $\vec{E}$, anume $\vec{J}_\sigma=\sigma\vec{E}$; $\vec{J}_m$ poate include atât curentul sursă (impregnat) $\vec{J}_{ms}$ cât şi curentul $\vec{J}_{\sigma m}=\sigma_m\vec{H}$. Se observă că (III.2.1) se poate obține din (III.2.2) efectuând schimbările

$$\vec{J}_m\to-\vec{J};\ \vec{E}\to\vec{H};\ \vec{H}\to-\vec{E};\ \mu\to\varepsilon;\ \rho\to\rho_m \tag{III.2.7}$$

În mod similar (III.2.2) se pot obține din (III.2.1) efectuând schimbările

$$\vec{J} \to \vec{J}_m;\ \vec{E} \to \vec{H};\ \vec{H} \to -\vec{E};\ \varepsilon \to \mu;\ \rho_m \to -\rho \tag{III.2.8}$$

Sunt cunoscute mai multe particularizări şi modalități de aplicare ale acestei teoreme.

a) Considerăm că într-un mediu dat câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ şi curenții $\vec{J},\vec{J}_m$ sunt determinați de ecuațiile (III.2.1) – (III.2.6), şi pentru înlăturarea oricărei confuzii sunt notați cu indicele 1; cu ajutorul transformărilor de tipul (III.2.7), (III.2.8) putem determina noile câmpuri şi curenți notați cu indicele 2. Avem transformările

$$\begin{aligned} &\vec{E}_1 \to \vec{H}_2;\ \vec{J}_1 \to \vec{J}_{m2};\ \rho_1 \to \rho_{m2};\ \mu_1 \to \varepsilon_2 \\ &\vec{H}_1 \to -\vec{E}_2;\ \vec{J}_{m2} \to -\vec{J}_1;\ \rho_{m1} \to -\rho_2;\ \varepsilon_1 \to \mu_2 \end{aligned} \tag{III.2.9}$$

Dacă ne referim la unul şi acelaşi mediu, ecuațiile Maxwell rămân neschimbate prin utilizarea transformărilor

$$\begin{aligned} &\vec{E}_1 \to (\mu/\varepsilon)\vec{H}_2;\ \vec{J}_1 \to (\varepsilon/\mu)\vec{J}_{m2};\ \rho_1 \to (\varepsilon/\mu)\rho_{m2} \\ &\vec{H}_1 \to -(\varepsilon/\mu)\vec{E}_2;\ \vec{J}_{m1} \to -(\mu/\varepsilon)\vec{J}_2;\ \rho_{m1} \to (\varepsilon/\mu)\rho_2 \end{aligned} \tag{III.2.10}$$

b) Considerăm cazurile particulare când sunt prezente fie numai curenții sursă electrici $\vec{J}_s$, fie numai curenții sursă magnetici $\vec{J}_{ms}$. Utilizăm notațiile introduse în Cap. 1, secțiunea 1.2.3, se pot scrie transformările

$$\vec{E}_A \to \vec{H}_F;\ \vec{H}_A \to -\vec{E}_F;\ \vec{J} \to \vec{J}_m;\ \vec{A}(\vec{r}) \to \vec{F}(\vec{r});\ \varepsilon_A \to \mu_F;\ \mu_A \to \varepsilon_F \tag{III.2.11}$$

în care indicele $''A''$ defineşte mărimile derivate din potențialul vectorial (magnetic) $\vec{A}(\vec{r})$ iar indicele $''F''$ defineşte mărimile derivate din potențialul vectorial (electric) $\vec{F}(\vec{r})$.

**2°. Teorema suprapunerii.**

Această teoremă statuează că într-un mediu liniar intensitatea totală a câmpului $(\vec{E},\vec{H})$ produsă de două sau mai multe surse este egală cu suma (vectorială) a intensităților câmpurilor produse de fiecare sursă individuală care acționează (sau radiază) independent de celelalte. Particularizăm teorema pentru două surse electrice $\vec{J}_1$ şi $\vec{J}_2$ (se elimină indicele suplimentar $''s''$ deoarece s-a presupus că $\vec{J}_1,\vec{J}_2$ reprezintă surse); pentru a determina câmpul total cauzat de prezența simultană a celor două surse vom defini câmpul produs de fiecare sursă separat. Câmpurile $(\vec{E}_1,\vec{H}_1)$ produse de sursa $\vec{J}_1$ satisfac ecuațiile Maxwell

$$\nabla \times \vec{H}_1 = \vec{J}_1 + j\omega\varepsilon\vec{E}_1 \tag{III.2.12}$$

$$\nabla \times \vec{E}_1 = -j\omega\mu\vec{H}_1 \tag{III.2.13}$$

Analog, câmpurile $(\vec{E}_2,\vec{H}_2)$ produse de sursa $\vec{J}_2$ satisfac ecuațiile

$$\nabla \times \vec{H}_2 = \vec{J}_2 + j\omega\varepsilon\vec{E}_2 \tag{III.2.14}$$

$$\nabla \times \vec{E}_2 = -j\omega\mu\vec{H}_2 \tag{III.2.15}$$

După rezolvarea separată a ecuațiilor (III.2.12), (III.2.13) şi (III.2.14), (III.2.15) se determină câmpurile $(\vec{E}_1,\vec{H}_1)$, respectiv $(\vec{E}_2,\vec{H}_2)$; prin adunarea celor două grupuri de soluții se obține câmpul total $(\vec{E},\vec{H})$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2;\quad \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \tag{III.2.16}$$

**3°. Teorema de unicitate.**

Adesea valorile câmpului electromagnetic într-un mediu dat reprezintă soluții ale unui sistem de ecuații; este important de a şti *a priori* dacă soluția este unică, sau care sunt condițiile necesare pentru ca soluția să fie unică. Sub forma cea mai generală teorema se referă la câmpul

dintr-un volum $V$ mărginit de suprafața închisă $S$ şi are următorul enunț: *Într-o regiune $V$ complet umplută cu un mediu disipativ, câmpul armonic $(\vec{E},\vec{H})$ este în mod unic determinat de către curenții sursă* (*impregnați*) *în această regiune, plus componentele tangențiale ale câmpului electric sau magnetic pe suprafața închisă $S$ care limitează volumul $V$*. Teorema poate fi demonstrată direct presupunând că există două soluții notate $(\vec{E}_1,\vec{H}_1)$ şi $(\vec{E}_2,\vec{H}_2)$; ambele câmpuri trebuie să satisfacă ecuațiile Maxwell în mediul considerat $(\rho=0,\rho_m=0,\sigma=0,\sigma_m=0)$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}_1&=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}_1\\ \nabla\times\vec{E}_1&=-\vec{J}_m-j\omega\mu\vec{H}_1\end{aligned}\right\} \tag{III.2.17}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}_2&=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}_2\\ \nabla\times\vec{E}_2&=-\vec{J}_m-j\omega\mu\vec{H}_2\end{aligned}\right\} \tag{III.2.18}$$

Făcând diferența acestor două seturi de ecuații se obține

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}_d&=j\omega\varepsilon\vec{E}_d\\ \nabla\times\vec{E}_d&=-j\omega\mu\vec{H}_d\end{aligned}\right\} \tag{III.2.19}$$

în care $\vec{E}_d=\vec{E}_1-\vec{E}_2$, $\vec{H}_d=\vec{H}_1-\vec{H}_2$. Rămâne de arătat că câmpurile $(\vec{E}_d,\vec{H}_d)$ sunt zero dacă în volumul $V$ nu sunt incluse surse iar câmpurile produse de către un set de componente tangențiale electrice şi magnetice se anulează.

Sunt cunoscute mai multe detalieri (variante) ale acestei teoreme. Un corolar des utilizat afirmă: dacă un câmp electromagnetic are componente tangențiale electrice şi magnetice zero pe suprafața închisă $S$ care limitează volumul $V$ fără surse şi conținând un mediu disipativ, atunci câmpul se anulează în orice punct din $V$.

O demonstrație concretă a teoremei de unicitate poate fi dată prin utilizarea teoremei Poynting. Se poate arăta că una din următoarele trei condiții este necesară şi suficientă pentru a defini un câmp unic în interiorul volumului $V$, presupus disipativ şi fără surse

$$\begin{aligned}&\hat{n}\times\vec{E}\quad specificat\ pe\ S\qquad (a)\\ &\hat{n}\times\vec{H}\quad specificat\ pe\ S\qquad (b)\\ &\hat{n}\times\vec{E}\quad specificat\ pe\ S_1\quad (o\ portiune\ din\ S)\\ &\hat{n}\times\vec{H}\quad specificat\ pe\ S_2\quad (restul\ din\ S)\end{aligned} \tag{III.2.21}$$

unde $S_2=S-S_1$.

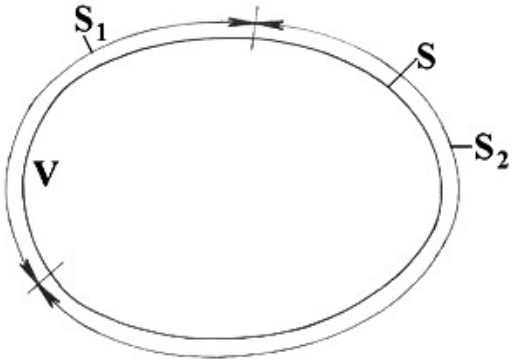



**Fig. A III.1. Ilustrarea teoremei de unicitate**

Presupunând că sunt prezente câmpurile $(\vec{E}_1,\vec{H}_1)$ şi $(\vec{E}_2,\vec{H}_2)$ care satisfac ecuațiile Maxwell, atunci şi câmpurile $(\vec{E}_d,\vec{H}_d)$ satisfac ecuațiile Maxwell; prin urmare câmpurile $(\vec{E}_d,\vec{H}_d)$ trebuie să satisfacă şi teorema Poynting sub formă integrală (1.4.28) pentru un mediu disipativ şi fără surse $(\vec{J}_s=0,\vec{J}_{ms}=0,\rho=0,\rho_m=0,\sigma=0,\sigma_m=0)$

$$\frac{1}{2}\int_S \left(\vec{E}_d \times \vec{H}_d^*\right)\cdot d\vec{s} = -\frac{1}{2}\int_V \left(\omega\varepsilon''\left|\vec{E}_d\right|^2 + \omega\mu''\left|\vec{H}_d\right|^2\right)dV + j2\omega\int_V \left(\frac{\varepsilon'}{4}\left|\vec{E}_d\right|^2 - \frac{\mu'}{4}\left|\vec{H}_d\right|^2\right)dV \quad \text{(III.2.22)}$$

Dacă ambele câmpuri $\left(\vec{E}_1, \vec{H}_1\right)$ şi $\left(\vec{E}_2, \vec{H}_2\right)$ satisfac una din condiţiile (III.2.21) atunci termenul stâng al relaţiei (III.2.22) se anulează deoarece $\left(\vec{E}_d \times \vec{H}_d^*\right)\cdot \hat{n} = \hat{n} \times \vec{E}_d \cdot \vec{H}_d = 0$. Prin urmare termenii din membrul drept trebuie să se anuleze; prima integrală este totdeauna reală şi pozitivă pentru orice mediu fizic cu $\varepsilon'' \neq 0, \mu'' \neq 0$; se va anula numai dacă $\vec{E}_d = 0$ şi $\vec{H}_d = 0$, astfel avem $\vec{E}_1 = \vec{E}_2, \vec{H}_1 = \vec{H}_2$, adică câmpul în interiorul volumului $V$ este unic determinat, dacă una din condiţiile (III.2.21) este satisfăcută.

**4°. Teorema de reciprocitate Lorentz.**

Câmpul electromagnetic satisface anumite relaţii de reciprocitate care sunt utile la deducerea unor proprietăţi ale sistemelor electromagnetice; aceste relaţii sunt deosebit de utile la studiul antenelor şi a proceselor de excitare.

Considerăm întâi un mediu isotrop şi liniar în care există două seturi de surse $\left(\vec{J}_1, \vec{J}_{m1}\right)$ şi $\left(\vec{J}_2, \vec{J}_{m2}\right)$ (Fig. A III.2a) care pot radia simultan sau individual, dând naştere câmpurilor $\left(\vec{E}_1, \vec{H}_1\right)$, $\left(\vec{E}_2, \vec{H}_2\right)$; aceste câmpuri satisfac ecuaţii Maxwell de forma

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}_1 &= \vec{J}_1 + j\omega\varepsilon\vec{E}_1 \\ \nabla \times \vec{E}_1 &= -\vec{J}_{m1} - j\omega\mu\vec{H}_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.2.23)}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}_2 &= \vec{J}_2 + j\omega\varepsilon\vec{E}_2 \\ \nabla \times \vec{E}_2 &= -\vec{J}_{m2} - j\omega\mu\vec{H}_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(III.2.24)}$$

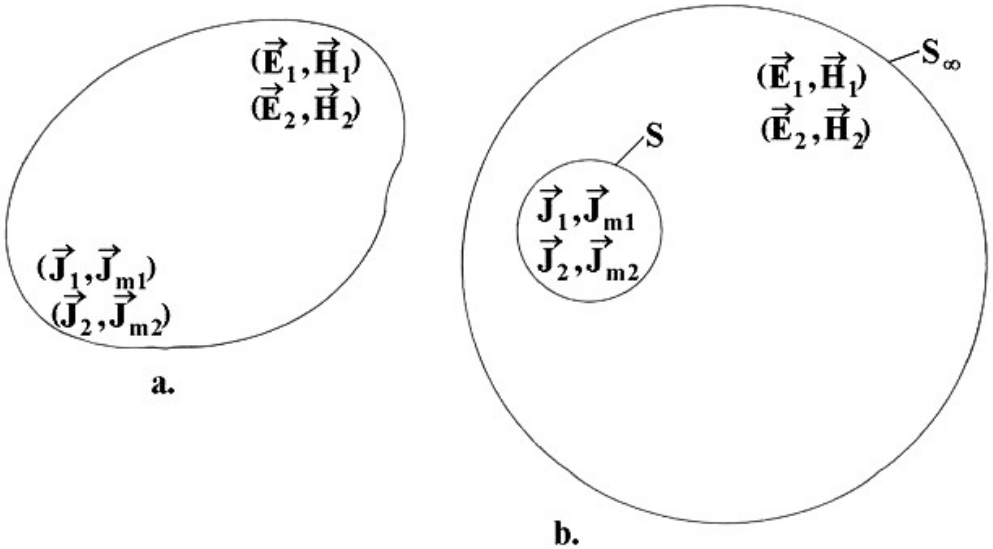



**Fig. A III.2. Ilustrarea teoremei de reciprocitate: a – teorema Lorentz; b – observarea câmpurilor într-o regiune fără surse**

Efectuăm o dezvoltare vectorială de forma (I.1.20)

$$\nabla \cdot \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right) = \vec{H}_2 \cdot \nabla \times \vec{E}_1 - \vec{E}_1 \cdot \nabla \times \vec{H}_2$$

şi ţinând cont de ecuaţiile Maxwell de mai sus, avem

$$\nabla \cdot \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right) = -j\omega\mu\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 - \vec{H}_2 \cdot \vec{J}_{m1} - j\omega\varepsilon\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 - \vec{E}_1 \cdot \vec{J}_2 \quad \text{(III.2.25)}$$

Schimbând indicii 1 şi 2 între ei se poate scrie o relaţie similară pentru $\nabla\cdot\left(\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right)$; scăzând cele două expresii se obţine relaţia

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}_1\times\vec{H}_2-\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right)=-\left(\vec{E}_1\cdot\vec{J}_2-\vec{H}_1\cdot\vec{J}_{m2}\right)+\left(\vec{E}_2\cdot\vec{J}_1-\vec{H}_2\cdot\vec{J}_{m1}\right) \qquad \text{(III.2.26)}$$

care reprezintă *teorema de reciprocitate Lorentz sub formă diferenţială*. Luând integrala de volum a ultimei relaţii şi aplicând teorema divergenţei termenului stâng rezultă

$$\oint_S\left(\vec{E}_1\times\vec{H}_2-\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right)\cdot d\vec{s}=-\int_V\left(\vec{E}_1\cdot\vec{J}_2-\vec{H}_1\cdot\vec{J}_{m2}-\vec{E}_2\cdot\vec{J}_1+\vec{H}_2\cdot\vec{J}_{m1}\right)dV \qquad \text{(III.2.27)}$$

care reprezintă *teorema de reciprocitate Lorentz sub formă integrală*; adesea relaţia (III.2.27) este identificată ca formă generalizată a teoremei de reciprocitate.

Ne referim acum la cazul particular când sursele $\left(\vec{J}_1,\vec{J}_{m1}\right),\left(\vec{J}_2,\vec{J}_{m2}\right)$ sunt situate într-un volum mic limitat de suprafaţa $S$ iar câmpurile $\left(\vec{E}_1,\vec{H}_1\right)$ şi $\left(\vec{E}_2,\vec{H}_2\right)$ sunt observate în regiunea cuprinsă între sfera $S$ şi o sferă $S_\infty$ de rază $r\to\infty$ (AIII. 2b). Având în vedere că într-un mediu cu pierderi foarte mici (dar finite) la distanţe $r$ mari amplitudinea unei componente scade mai repede decât $(1/r)$ reiese că integrala de suprafaţă pe $S_\infty$ se anulează. Întrucât în volumul cuprins între $S$ şi $S_\infty$ nu există surse, integrala de suprafaţă pe o suprafaţă închisă $S_1$ din acest volum se va anula. Termenul stâng din (III.2.27) devine egal cu zero

$$\oint_{S_1}\left(\vec{E}_1\times\vec{H}_2-\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right)\cdot d\vec{s}_1=0 \qquad \text{(III.2.28)}$$

Este evidentă egalitatea

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}_1\times\vec{H}_2-\vec{E}_2\times\vec{H}_1\right)=0 \qquad \text{(III.2.29)}$$

iar ultimele două relaţii reprezintă forme ale teoremei de reciprocitate Lorentz pentru cazul special al regiunii fără surse. Ca urmare a anulării termenului stâng, din (III.2.27) rezultă

$$\int_V\left(\vec{E}_1\cdot\vec{J}_2-\vec{H}_1\cdot\vec{J}_{m2}\right)dV=\int_V\left(\vec{E}_2\cdot\vec{J}_1-\vec{H}_2\cdot\vec{J}_{m1}\right)dV \qquad \text{(III.2.30)}$$

care reprezintă o formă des utilizată a teoremei.

Revenind la expresia (III.2.27) trebuie observat că în general ea nu reprezintă relaţia de putere deoarece nu apar mărimile conjugate; aceeaşi observaţie este adevărată şi pentru (III.2.26). Fiecare din integralele (III.2.30) poate fi interpretată ca un cuplaj între un set de câmpuri $\left(\vec{E},\vec{H}\right)$ şi un set de surse $\left(\vec{J}_1,\vec{J}_{m1}\right)$ care produce un alt set de câmpuri. Acest cuplaj este definit ca *reacţie Rumsey*; fiecare din integralele (III.2.30) se notează

$$<1,2>=\int_V\left(\vec{E}_1\cdot\vec{J}_2-\vec{H}_1\cdot\vec{J}_{m2}\right)dV \qquad \text{(III.2.31)}$$

$$<2,1>=\int_V\left(\vec{E}_2\cdot\vec{J}_1-\vec{H}_2\cdot\vec{J}_{m1}\right)dV \qquad \text{(III.2.32)}$$

Expresia $<1,2>$ reprezintă reacţia (cuplajul) câmpurilor $\left(\vec{E}_1,\vec{H}_1\right)$ produse de sursele $\left(\vec{J}_1,\vec{J}_{m1}\right)$ faţă de sursele $\left(\vec{J}_2,\vec{J}_{m2}\right)$ care produc câmpurile $\left(\vec{E}_2,\vec{H}_2\right)$; expresia $<2,1>$ se defineşte în mod similar, adică reprezintă reacţia (cuplajul) câmpurilor $\left(\vec{E}_2,\vec{H}_2\right)$ produse de sursele $\left(\vec{J}_2,\vec{J}_{m2}\right)$ faţă de sursele $\left(\vec{J}_1,\vec{J}_{m1}\right)$ care produc câmpurile $\left(\vec{E}_1,\vec{H}_1\right)$. Pentru ca teorema de reciprocitate să fie valabilă trebuie să aibă loc egalitatea

$$<1,2>=<2,1> \qquad \text{(III.2.33)}$$

Detaliind teorema de reciprocitate se poate afirma: câmpul $\vec{E}_1$ în punctul $\vec{r}_1$ datorat curentului $\vec{J}_1$ din punctul $\vec{r}_2$ este egal cu câmpul $\vec{E}_2$ din punctul $\vec{r}_2$ produs de sursa $\vec{J}_2=\vec{J}_1$ din punctul $\vec{r}_1$.

**5°. Principii de echivalență.**

Principiul (teorema) de echivalență a câmpului se referă la înlocuirea unui set dat de surse (originale) ale câmpului electromagnetic printr-un set echivalent de surse convenabil alese; aceste surse virtuale sunt numite echivalente cu sursele originale, într-o anumită regiune a spațiului, deoarece ele produc acelaşi câmp într-o regiune exterioară surselor. Acest principiu este deosebit de util în teoria antenelor la formularea problemelor de difracție şi împrăştiere; el poate sugera metode aproximative de obținere a soluțiilor în cazul unor structuri radiante complicate. Principiul echivalenței câmpului se bazează pe teorema unicității definită prin relațiile (III.2.21). Datorită faptului că sursele echivalente (virtuale) sunt reprezentate prin curenți de suprafață electrici şi magnetici notați $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$ definiți în secțiunea (1.3.2), unii autori [5] utilizează denumirea de *principiul echivalenței de suprafață*.

Există mai multe variante ale principiului de echivalență; cele mai cunoscute sunt: teorema de echivalență Love, principiul de echivalență Schelkunoff, principiul Babinet, principiul Schwarz de reflexie, metoda generală a imaginilor.

Pentru a stabili conceptele de bază ale principiului echivalenței Love ne referim la Fig. A III.3a,b. Considerăm setul de surse $\left(\vec{J}_1,\vec{J}_{m1}\right)$ localizate în regiunea $V_1$ delimitată de o suprafață închisă (imaginară) $S$, care radiază câmpul $\left(\vec{E}_1,\vec{H}_1\right)$ în tot spațiul; în regiunea $V_2$ câmpul $\left(\vec{E}_1,\vec{H}_1\right)$ este considerat fără surse. Presupunem acum că sursele $\left(\vec{J}_1,\vec{J}_{m1}\right)$ sunt îndepărtate şi postulăm că în interiorul volumului $V_1$ există câmpul $\left(\vec{E},\vec{H}\right)$ iar în $V_2$ (exteriorul lui $V_1$) este prezent câmpul inițial $\left(\vec{E}_1,\vec{H}_1\right)$ neschimbat (Fig. A III.3b). Câmpurile din $V_1$ şi $V_2$ trebuie să satisfacă ecuațiile Maxwell, astfel ele trebuie să satisfacă condiții la limită pentru componentele tangențiale electrice şi magnetice (1.3.56) şi (1.2.57); acest fapt presupune existența unor surse echivalente $\left(\vec{J}_s,\vec{J}_{ms}\right)$ care acționează pe suprafața $S$

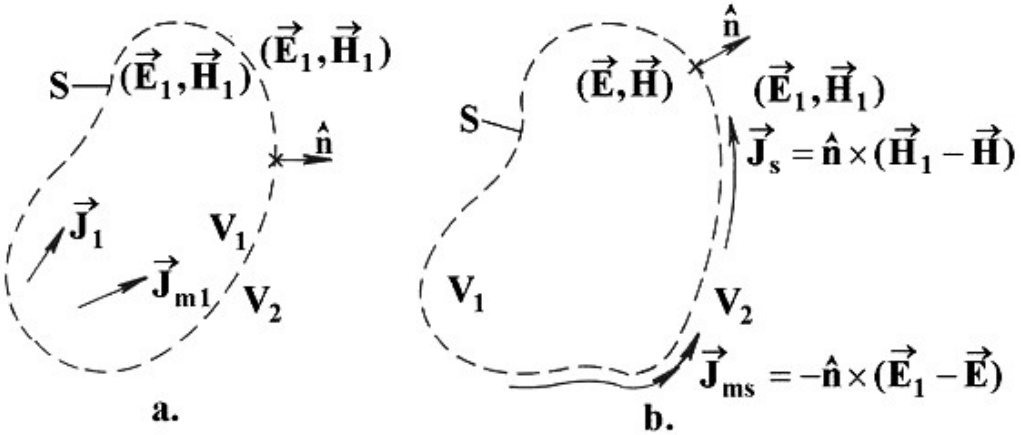



**Fig. A III.3. Ilustrarea principiului de echivalență: a – principiul de echivalență Love; b – reprezentarea surselor echivalente prin curenții de suprafață**

$$\vec{J}_s=\hat{n}\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}\right) \tag{III.2.34}$$

$$\vec{J}_{ms}=-\hat{n}\times\left(\vec{E}_1-\vec{E}\right) \tag{III.2.35}$$

unde $\vec{J}_s\left[A/m\right]$ reprezintă o densitate de curent (echivalent) electric iar $\vec{J}_{ms}\left[V/m\right]$ reprezintă o densitate de curent (echivalent) magnetic; aceşti curenți radiază în spațiul nelimitat $V_2$. Trebuie observat că în formalismul prezentat sursele echivalente $\left(\vec{J}_s,\vec{J}_{ms}\right)$ produc acelaşi câmp numai în exteriorul suprafeței închise $S$; în interiorul acestei suprafețe (volumul $V_1$) noile surse echivalente produc câmpul $\left(\vec{E},\vec{H}\right)$, care diferă față de $\left(\vec{E}_1,\vec{H}_1\right)$ produs de sursele originale; prin urmare sursele $\left(\vec{J}_s,\vec{J}_{ms}\right)$ de pe suprafața $S$ sunt echivalente cu $\left(\vec{J}_1,\vec{J}_{m1}\right)$ numai în exteriorul suprafeței.

Întrucât regiunea de interes este cea din exteriorul suprafeței $S$, putem admite că câmpul $(\vec{E},\vec{H})$ poate avea orice valoare, inclusiv zero, $\vec{E}=0,\vec{H}=0$; astfel (III.2.34) şi (III.2.35) iau forma

$$\vec{J}_s=\hat{n}\times\vec{H}_1;\quad \vec{J}_{ms}=-\hat{n}\times\vec{E}_1 \tag{III.2.36}$$

care reprezintă *principiul echivalenței Love* ilustrat în Fig. A III.4a. Deşi s-au utilizat ambele surse echivalente $\vec{J}_s$ şi $\vec{J}_{ms}$, în probleme concrete, ca urmare a teoremei de unicitate, este suficient să fie utilizat fie $\vec{J}_s$, fie $\vec{J}_{ms}$. Într-adevăr dacă presupunem că în interiorul suprafeței imaginare $S$ avem $\vec{E}=0,\vec{H}=0$, aceste valori nu sunt perturbate dacă proprietățile mediului din interiorul lui $S$ sunt modificate; dacă mediul este înlocuit printr-un conductor electric perfect atunci curentul $\vec{J}_s$ este scurtcircuitat $(\vec{J}_s=0)$ şi singura sursă echivalentă care radiază în spațiul liber este $\vec{J}_{ms}$ (Fig. A III.4b). Presupunem acum că în interiorul suprafeței $S$ este plasat un conductor magnetic perfect care scurtcircuitează curentul $\vec{J}_{ms}(\vec{J}_{ms}=0)$ şi singura sursă care poate radia în spațiul liber este $\vec{J}_s$ (Fig. A III.4c).

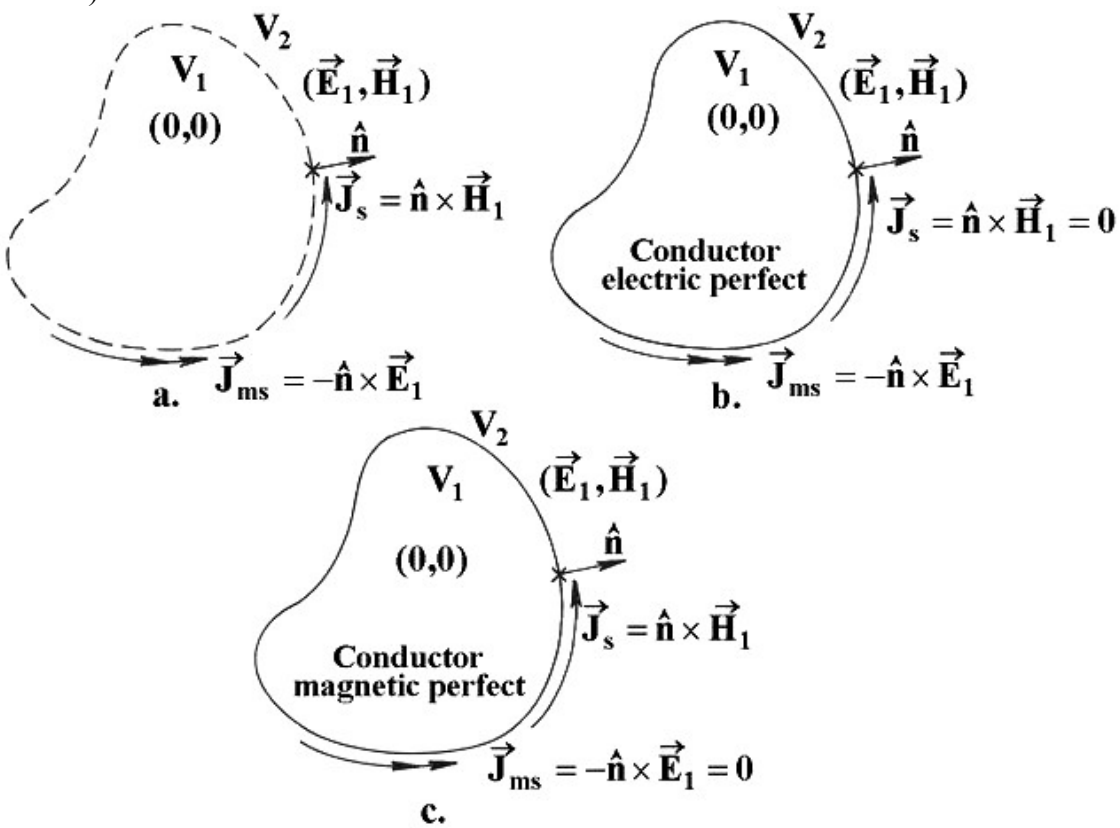



**Fig. A III.4. Detalierea principiului de echivalență pentru cazuri particulare: a – interiorul suprafeței umplut cu dielectric ideal; b – interiorul suprafeței umplut cu un conductor electric perfect; c - interiorul suprafeței umplut cu un conductor magnetic perfect**

# ANEXA IV. FUNCȚII GREEN

## A IV.1. Funcții Green de spațiu liber

O metodă larg răspândită pentru rezolvarea ecuațiilor de propagare cu surse (cu membrul drept diferit de zero) se bazează pe utilizarea funcțiilor Green. Acest tip de ecuații survin în principal în problemele de radiație a câmpului electromagnetic şi în cele de excitare a ghidurilor şi cavităților rezonante. Sub forma cea mai generală funcția Green pentru câmpurile armonice $G(\vec{r},\vec{r}')$ reprezintă răspunsul spațial al unui sistem fizic liniar la o sursă de excitare punctuală de tip funcție

Dirac $\delta(\vec{r}-\vec{r}')$. Sunt cunoscute o multitudine de forme ale funcţiilor Green, deoarece există o multitudine de sisteme electromagnetice. În Anexa de faţă se prezintă o introducere asupra celor mai răspândite funcţii Green.

**Funcţia Green scalară.** Această funcţie este definită prin ecuaţia generală

$$\nabla^2 G_0(\vec{r},\vec{r}')+k_0^2 G_0(\vec{r},\vec{r}')=-\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.1.1}$$

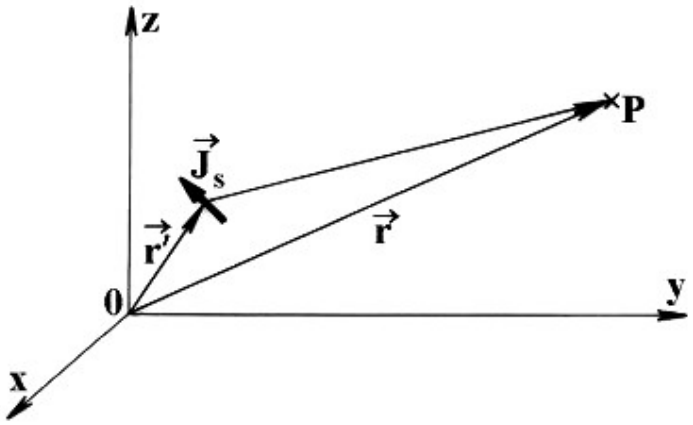



**Fig. A IV.1. Sistem de vectori pentru definirea funcţiei Green scalare**

în care s-a presupus sistemul de vectori din Fig. A IV.1. Ecuaţia diferenţială (IV.1.1) singură este insuficientă pentru a determina în mod unic funcţia Green $G(\vec{r},\vec{r}')$; este necesar să fie utilizate anumite condiţii la limită. Aceste condiţii sunt: a) condiţia de radiaţie la infinit (Sommerfeld) dacă regiunea considerată se întinde la infinit; b) condiţii la limită adecvate în cazul regiunilor limitate. Dacă se consideră că sursa punctuală se află în originea sistemului de coordonate avem $\vec{r}'=0$ şi $\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\delta(\vec{r})$ iar (IV.1.1) se scrie

$$\left[\nabla^2+k_0^2\right]G_0(\vec{r})=-\delta(\vec{r}) \tag{IV.1.2}$$

Trebuie observat că în acest caz $G_0(\vec{r})$ se bucură de simetrie sferică şi reprezintă o funcţie numai de $\vec{r}$ ; operatorul Laplace în coordonate sferice (I.2.24) se simplifică, astfel ultima relaţie devine

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)+k_0^2\right]G_0(\vec{r})=-\delta(\vec{r}) \tag{IV.1.3}$$

În orice punct al spaţiului, exceptând $\vec{r}=0$, soluţia ultimei ecuaţii coincide cu cea a unei ecuaţii omogene scrisă sub forma

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(rG_0(\vec{r})\right)+k_0^2\left(rG_0(\vec{r})\right)=0 \tag{IV.1.4}$$

Notând $rG_0(\vec{r})=u$, ultima ecuaţie ia forma clasică

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k_0^2\right)u(\vec{r})=0 \tag{IV.1.5}$$

a cărei soluţie generală are forma

$$u(\vec{r})=C_1e^{-jk_0r}+C_2e^{jk_0r} \tag{IV.1.6}$$

unde $C_1, C_2$ sunt constante; pentru cazul considerat $r\neq 0$ se poate scrie

$$G_0(\vec{r})=\frac{1}{r}\left(C_1e^{-jk_0r}+C_2e^{jk_0r}\right) \tag{IV.1.7}$$

Primul termen din (IV.1.7) reprezintă o undă care se propagă de la sursă spre infinit iar al doilea reprezintă o undă care se propagă de la infinit spre regiunea unde este situată sursa. Deşi ambii termeni se anulează când $r \to \infty$, al doilea termen trebuie înlăturat deoarece nu există o undă care vine de la infinit; această condiție este numită *condiția de radiație* la infinit (Sommerfeld) exprimată prin relația

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\partial G_0(\vec{r})}{\partial r} + jk_0 G_0(\vec{r})\right) = 0 \qquad |\vec{r}\,G_0(\vec{r})| < K \tag{IV.1.8}$$

în care $K$ este o constantă finită. Este evident că numai primul termen din (IV.1.7) satisface condiția Sommerfeld, astfel constanta $C_2$ trebuie să fie zero. Constanta $C_1$ se determină impunând condiții asupra comportării funcției $G_0(\vec{r})$ în vecinătatea originii; în acest scop scriem (IV.1.2) sub forma

$$\nabla\cdot\left(\nabla G_0(\vec{r})\right) + k_0^2 G_0(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}) \tag{IV.1.9}$$

şi efectuăm integrarea pe un mic volum sferic de rază $r_0$, făcând $r_0 \to 0$

$$\lim_{r_0\to\infty}\int_V\left[\nabla\cdot\nabla G_0(\vec{r}) + k_0^2 G_0(\vec{r})\right]dV = -\lim_{r_0\to\infty}\int_V \delta(\vec{r})dV \tag{IV.1.10}$$

Luând în considerare proprietățile funcției $\delta(\vec{r})$ (II.1.19) termenul drept ia valoarea *-1*; utilizând teorema divergenței primul termen din stânga ia valoarea $-4\pi C_1$; al doilea termen din stânga devine zero deoarece $G_0(\vec{r})$ variază ca $(1/r)$ iar $V$ este proporțional cu $r^3$. Prin urmare din (IV.1.10) scoatem $C_1 = 1/4\pi$ iar funcția Green $G_0(\vec{r})$ capătă expresia

$$G_0(\vec{r}) = \frac{e^{-jk_{0r}}}{4\pi r} \tag{IV.1.11}$$

Dacă sursa punctuală este situată în punctul $\vec{r}'$, atunci funcția Green satisface ecuația generală (IV.1.1) şi soluția este de forma

$$G_0(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{IV.1.12}$$

## A IV.2. Funcții Green diadice

### 1°. Funcții diadice $\overline{\overline{D}}$.

O funcție diadică $\overline{\overline{D}}$ este formată de către produsul a două funcții vectoriale

$$\overline{\overline{D}} = \vec{A}\vec{B} \tag{IV.2.1}$$

unde, în coordonate cartesiene $\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z, \vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$. Funcția diadică $\overline{\overline{D}}$ ca atare nu are o interpretare fizică directă; totuşi ea poate acționa asupra unei alte funcții vectoriale astfel încât rezultatul să aibă o semnificație mai relevantă.

Sunt utile câteva proprietăți ale funcțiilor diadice.

Se disting două tipuri de produse scalare între funcția diadică şi un vector oarecare $\vec{C}$:

- produsul scalar anterior

$$\vec{C}\cdot\overline{\overline{D}} = (\vec{C}\cdot\vec{A})\vec{B} = \vec{B}(\vec{C}\cdot\vec{A}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}); \tag{IV.2.2}$$

- produs scalar posterior

$$\overline{\overline{D}}\cdot\vec{C} = \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C}) = (\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A} = (\vec{C}\cdot\vec{B})\vec{A} \tag{IV.2.3}$$

Ultimele două relații permit definirea transpusei funcției $\overline{\overline{D}}$, notată $\overset{\sim}{\overline{\overline{D}}}$, fiind adevărate relațiile

$$\overset{\sim}{\overline{\overline{D}}} = \vec{B}\vec{A} \tag{IV.2.4}$$

$$\overline{\overline{D}} \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot \overset{\sim}{\overline{\overline{D}}} \tag{IV.2.5}$$

Totdeauna din produsele scalare între $\overline{\overline{D}}$ şi un vector rezultă un vector.

Se disting, de asemenea, două tipuri de produse vectoriale

$$\overline{\overline{D}} \times \vec{C} = \vec{A}\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \tag{IV.2.6}$$

$$\vec{C} \times \overline{\overline{D}} = \left(\vec{C} \times \vec{A}\right)\vec{B}\,; \tag{IV.2.7}$$

aceste produse vectoriale reprezintă funcții diadice prin definiție.

Prin introducerea formulelor descompuse în coordonate cartesiene ale lui $\vec{A}$ şi $\vec{B}$ în relația de definiție (IV.2.1) se obține

$$\overline{\overline{D}} = \begin{pmatrix} A_x B_x \hat{x}\hat{x} + A_x B_y \hat{x}\hat{y} + A_x B_z \hat{x}\hat{z} + \\ + A_y B_x \hat{y}\hat{x} + A_y B_y \hat{y}\hat{y} + A_y B_z \hat{y}\hat{z} + \\ + A_z B_x \hat{z}\hat{x} + A_z B_y \hat{z}\hat{y} + A_z B_z \hat{z}\hat{z} \end{pmatrix} \tag{IV.2.8}$$

care poate fi scrisă condensat

$$\overline{\overline{D}} = \hat{x}\vec{D}^{(x)} + \hat{y}\vec{D}^{(y)} + \hat{z}\vec{D}^{(z)} \tag{IV.2.9}$$

în care s-a notat

$$\begin{aligned} \vec{D}^{(x)} &= \hat{x}A_x B_x + \hat{y}A_y B_x + \hat{z}A_z B_x = B_x \vec{A} \\ \vec{D}^{(y)} &= \hat{x}A_x B_y + \hat{y}A_y B_y + \hat{z}A_z B_y = B_y \vec{A} \\ \vec{D}^{(z)} &= \hat{x}A_x B_z + \hat{y}A_y B_z + \hat{z}A_z B_z = B_z \vec{A} \end{aligned} \tag{IV.2.10}$$

astfel sunt evidente relațiile

$$\vec{D}^{(x)} = \overline{\overline{D}} \cdot \hat{x}, \quad \vec{D}^{(y)} = \overline{\overline{D}} \cdot \hat{y}, \quad \vec{D}^{(z)} = \overline{\overline{D}} \cdot \hat{z} \tag{IV.2.11}$$

Asupra funcției diadice $\overline{\overline{D}}$ pot fi aplicați operatorii divergență şi rotor;

- divergența funcției $\overline{\overline{D}}$ se defineşte ca

$$\nabla \cdot \overline{\overline{D}} = \left[\nabla \cdot \vec{D}^{(x)}\right]\hat{x} + \left[\nabla \cdot \vec{D}^{(y)}\right]\hat{y} + \left[\nabla \cdot \vec{D}^{(z)}\right]\hat{z}\,; \tag{IV.2.12}$$

- rotorul funcției $\overline{\overline{D}}$ este

$$\nabla \times \overline{\overline{D}} = \left[\nabla \times \vec{D}^{(x)}\right]\hat{x} + \left[\nabla \times \vec{D}^{(y)}\right]\hat{y} + \left[\nabla \times \vec{D}^{(z)}\right]\hat{z} \tag{IV.2.13}$$

Se defineşte *funcția diadică unitate* (diada unitate) prin expresia

$$\overline{\overline{I}} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \tag{IV.2.14}$$

care posedă două proprietăți importante ilustrate prin două identități

$$\vec{A} \cdot \overline{\overline{I}} = \overline{\overline{I}} \cdot \vec{A} = \vec{A} \tag{IV.2.15}$$

$$\nabla \cdot \left(\overline{\overline{I}}\Psi(\vec{r})\right) = \nabla \Psi(\vec{r}) \tag{IV.2.16}$$

unde $\Psi(\vec{r})$ este o funcție scalară de poziție.

**2°. Funcții Green diadice de spațiu liber.**

Există mai multe căi de obținere a unor expresii convenabile ale funcțiilor Green diadice de spațiu liber. Aceste funcții sunt utilizate mai ales în probleme de radiație, astfel o metodă clasică ia în considerare ecuația de propagare Helmholtz neomogenă pentru potențialul vectorial $\vec{A}(\vec{r})$ (1.2.39) în spațiul liber

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) + k_0 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \tag{IV.2.17}$$

considerându-se că singura sursă este curentul electric $\vec{J}(\vec{r})$. Dacă se admite că $\vec{J}(\vec{r})$ este reprezentat de o sursă punctuală $\delta(\vec{r})$ situată în origine ecuația (IV.2.17) este de forma (IV.1.2), exceptând permeabilitatea $\mu_0$; soluția în acest caz are forma (IV.1.11), prin urmare se poate scrie

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \tag{IV.2.18}$$

în care s-a admis că $\delta(\vec{r})$ este orientat după $x$. Dacă sursa reprezintă o distribuție de curenți $\vec{J}(\vec{r})$, soluția completă se obține prin suprapunere, care aici va fi o integrală pe volumul ce conține sursele

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \vec{J}(\vec{r}) dV \tag{IV.2.19}$$

Admițând că sursele sunt situate într-un volum elementar $V'$ cu centrul în $\vec{r}'$, generalizăm ultima expresie sub forma

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int_V \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \overline{\overline{I}} \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV_0' \tag{IV.2.20}$$

în care s-a introdus funcția diadică unitate $\overline{\overline{I}}$ şi s-a ținut seama de proprietatea (IV.2.15).

Cantitatea

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}') = \frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \overline{\overline{I}} = G_0(\vec{r},\vec{r}') \overline{\overline{I}} \tag{IV.2.21}$$

reprezintă *funcția diadică de spațiu liber* pentru potențialul vectorial $\vec{A}(\vec{r})$. Astfel pentru o distribuție arbitrară de surse soluția pentru potențialul vectorial poate fi scrisă ca

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu_0 \int_V \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' \tag{IV.2.22}$$

Având în vedere această expresie a potențialului vectorial se pot scrie expresii pentru vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{H}$ conform relațiilor (1.2.41), (1.2.42)

$$\vec{H}(\vec{r}) = (1/\mu_0) \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \tag{IV.2.23}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \left[ 1 + \frac{1}{k_0^2} \nabla\nabla \cdot \right] \vec{A}(\vec{r}) \tag{IV.2.24}$$

Introducând soluția (IV.2.20) în ecuația neomogenă (IV.2.17) şi inversând operațiile de integrare şi diferențiere se obține

$$\int_V \left(\nabla^2 + k_0^2\right) \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') dV' = -\vec{J}(\vec{r}) \tag{IV.2.25}$$

Pentru ca ultima ecuație să fie validă este necesar ca $\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}')$ să fie o soluție a ecuației

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right) \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}') = -\overline{\overline{I}} \delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.2.26}$$

deoarece

$$\int_V \delta(\vec{r}-\vec{r}')\overline{\overline{I}}\cdot\vec{J}(\vec{r}')dV' = \vec{J}(\vec{r}) \tag{IV.2.27}$$

**3°. Funcţii Green diadice pentru câmpul electric.**

Adesea este necesară definirea funcţiilor Green diadice pentru câmpurile $\vec{E}(\vec{r})$ şi $\vec{H}(\vec{r})$. Referindu-ne întâi la câmpul electric $\vec{E}(\vec{r})$ se va lua ecuaţia de propagare (1.2.18) cu $\rho = 0$, care se poate pune sub forma

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - k_0^2\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu_0\vec{J}(\vec{r}) \tag{IV.2.28}$$

Funcţia Green diadică pentru câmpul electric $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')$ va fi o soluţie a ecuaţiei

$$\left(\nabla\times\nabla\times - k_0^2\right)\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') = \overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.2.29}$$

Pentru găsirea soluţiei se utilizează metoda Levine – Schwinger [3]. Făcând divergenţa ultimei expresii rezultă

$$-k_0^2\nabla\cdot\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') = \nabla\cdot\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}') = \nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.2.30}$$

deoarece $div\,rot = 0$; în continuare aplicăm operatorul gradient ultimei expresii, obţinând

$$\nabla\nabla\cdot\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') = -\left(1/k_0^2\right)\nabla\nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.2.31}$$

Pe baza identităţii vectoriale (I.2.25) ecuaţia (IV.2.29) se poate pune sub forma

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') - \nabla\nabla\cdot\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') = -\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.2.32}$$

Ţinând cont de (IV.2.31) ultima relaţie devine

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') = -\left(\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.2.33}$$

care arată că funcţia $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')$ se poate obţine din funcţia Green scalară $\overline{\overline{G}}_0(\vec{r},\vec{r}')$ care satisface o ecuaţie de forma (IV.1.2)

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)\overline{\overline{G}}_0(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{IV.2.34}$$

a cărei soluţie este dată de (IV.1.12) prin aplicarea operatorului diadic $\left(\overline{\overline{I}} + \nabla\nabla/k_0^2\right)$ asupra lui $\overline{\overline{G}}_0(\vec{r},\vec{r}')$. Într-adevăr, având în vedere că operatorii $\left(\overline{\overline{I}} + \nabla\nabla/k_0^2\right)$ şi $\left(\nabla^2 + k_0^2\right)$ sunt comutativi, se poate scrie

$$\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') = \left(\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)\overline{\overline{G}}_0(\vec{r},\vec{r}') = \left(\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)\frac{e^{-jk_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{IV.2.35}$$

## A IV.3. Funcţii Green bidimensionale

Dacă sursa are un caracter bidimensional (cazul sursei liniare infinite) atunci este convenabilă utilizarea funcţiilor Green bidimensionale. Funcţia Green scalară bidimensională este soluţia ecuaţiei Helmholtz neomogene

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)\overline{\overline{G}}_{0b}(x,y;x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{IV.3.1}$$

iar funcţia Green diadică bidimensională pentru câmpul electric va fi soluţia ecuaţiei

$$\left(\nabla\times\nabla\times - k_0^2\right)\overline{\overline{G}}_{be}(x,y;x',y') = \overline{\overline{I}}_b\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{IV.3.2}$$

care are forma

$$\overline{\overline{G}}_{be}(x,y;x',y')=\left(\overline{\overline{I}}_b+\frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right)\overline{\overline{G}}_{0b}(x,y;x',y') \tag{IV.3.3}$$

Există mai multe proprietăți ale funcțiilor Green diadice pentru câmpul electric; două dintre acestea au un caracter general:

- condiția de reciprocitate

$$\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')=\overline{\overline{G}}_e(\vec{r}',\vec{r}); \tag{IV.3.4}$$

- condiția de simetrie

$$\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')=\tilde{\overline{\overline{G}}}_e(\vec{r},\vec{r}') \tag{IV.3.5}$$

În cazul mediilor limitate, cu condiții la limită finite se utilizează funcții Green modificate care satisfac numai condiția de reciprocitate, dar în general nu satisfac condiția de simetrie.

**Transformate Fourier.** O metodă foarte răspândită de exprimare a funcțiilor Green pentru regiuni limitate este cea a transformatelor Fourier.

Pentru exemplificare se consideră o problemă bidimensională în coordonate cartesiene descrise de ecuația Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)G=-\delta(x-x')\delta(z-z') \tag{IV.3.6}$$

cu condiția la limită $G=0$ pentru $x=0$ şi $x=a$. Se aplică transformările Fourier ambilor termeni; transformata Fourier directă după $z$ a funcției $G(x,z)$ este

$$g(x,h)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,z)e^{jhz}dz \tag{IV.3.7}$$

iar cea inversă se scrie

$$G(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,h)e^{-jhz}dh \tag{IV.3.8}$$

Similar se poate scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}G\right)e^{jhz}dz=-h^2g(x,h), \tag{IV.3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z-z')e^{jhz}dz=e^{jhz'},\ \delta(z-z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-jh(z-z')}dh \tag{IV.3.10}$$

astfel ecuația (IV.3.6) se scrie sub forma

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+k^2-h^2\right)g(x,h)=-\delta(x-x')e^{jhz'} \tag{IV.3.11}$$

Pentru găsirea soluției acestei ecuații pot fi utilizate două procedee. În cadrul primului procedeu se consideră condiția la limită $G=0$ la $x=0$ şi $x=a$, rezultând

$$g(x,h)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n(x)\Psi_n(x')}{k_n^2-k^2+h^2}e^{jhz'} \tag{IV.3.12}$$

în care: $k_n=n\pi/a$, $\Psi_n(x)=(2/a)^{1/2}\sin k_n x$. Soluția completă pentru $G(x,z;x',z')$ este

$$G(x,z;x',z')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n(x)\Psi_n(x')}{k_n^2-k^2+h^2}e^{-jh(z-z')}dh \tag{IV.3.13}$$

A doua procedură porneşte de la dezvoltarea funcției Green într-o serie de funcții proprii

$$G(x,z;x',z')=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)\Psi_n(x')G_n(z,z') \tag{IV.3.14}$$

în acest caz se poate scrie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2-k_n^2\right)G_n(z,z')=-\delta(z-z') \tag{IV.3.15}$$

Soluția acestei ecuații este de forma

$$G_n(z,z')=\frac{y_1(z>)y_2(z<)}{D} \tag{IV.3.16}$$

unde: $z>$ semnifică $z>z'$ iar $z<$ semnifică $z<z'$; notațiile din ultima relație sunt

$$\begin{aligned} &y_1(z)=e^{-jq_nz},\ y_2(z)=e^{jq_nz}\\ &D=2jq_n, \qquad q_n=\left(k^2-k_n^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{IV.3.17}$$

Introducând (IV.3.16) în (IV.3.14) rezultă expresia

$$G(x,z;x',z')=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Psi_n(x)\Psi_n(x')}{2jq_n}e^{-jq_n|z-z'|} \tag{IV.3.18}$$

care constituie o alternativă la (IV.3.13).

## ANEXA V. TRANSFORMAREA SCHWARZ - CHRISTOFFEL

Din studiul liniilor de transmisie de tip microstrip s-a observat că impedanța caracteristică se poate determina cu suficientă precizie utilizându-se relația $Z_c=(\varepsilon\mu)^{1/2}/C$ (3.4.8). Pentru determinarea capacității pe unitate de lungime $C$ în general este necesară rezolvarea ecuației Laplace bidimensionale cu condiții de frontieră relativ complicate; sunt cunoscute mai multe metode de rezolvare, dintre care două sunt mai des utilizate la liniile de transmisie cu mod TEM de propagare: transformările conforme şi metoda variațională.

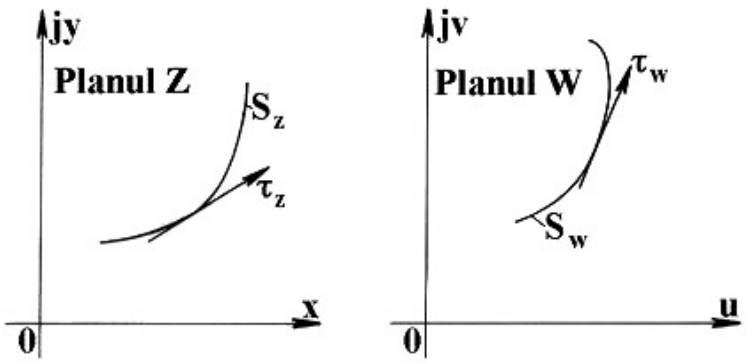



**Fig. A V.1. Ilustrarea transformărilor Schwarz – Christoffel**

În această anexă se prezintă pe scurt transformarea Schwarz – Christoffel, care constă în transformarea axei reale din planul $Z=x+jy$ într-un poligon general din planul $W=u+jv$, astfel încât semiplanul superior din planul $Z$ se transformă în domeniul interior al poligonului din planul $W$. Pentru deducerea relațiilor generale ale transformărilor considerăm curbele $S_z$ din planul $Z$ şi $S_w$ din planul $W$ (Fig. A V.1); notăm cu $\tau_z$ şi $\tau_w$ tangentele unitate la cele două curbe, definite prin relațiile

$$\tau_z = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta Z}{|\Delta Z|} = \lim_{\Delta Z \to 0} e^{j\varphi_z}$$
$$\tau_w = \lim_{\Delta W \to 0} \frac{\Delta W}{|\Delta W|} = \lim_{\Delta W \to 0} e^{j\varphi_w} \qquad \text{(V.1)}$$

în care s-au utilizat notațiile

$$\Delta Z = |\Delta Z| e^{j\phi_z}, \qquad \Delta W = |\Delta W| e^{j\phi_w}$$

Notând relația de transformare $W = F(Z)$ avem

$$\frac{dW}{dZ} = \lim_{\Delta Z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta Z} = F'(Z) = \frac{\Delta W / |\Delta W|}{\Delta Z / |\Delta Z|} \left| \frac{\Delta W}{\Delta Z} \right| = \frac{\tau_w}{\tau_z} |F'(Z)| \qquad \text{(V.2)}$$

Unghiul făcut de $\tau_w$ cu axa $u$ se poate pune sub forma

$$< \tau_w = < \tau_z + < F'(z) \qquad \text{(V.3)}$$

care de regulă se mai scrie

$$\Phi_w = \Phi_z + \Phi_{F'} \qquad \text{(V.4)}$$

În scopul găsirii unor relații analitice între $W$ şi $Z$ se pleacă de la funcția

$$F'(Z) = A(Z - x_1)^{-k_1} (Z - x_2)^{-k_2} \ldots\ldots\ldots (Z - x_N)^{-k_N} = A \prod_{i=1}^{N} (Z - x_i)^{-k_i} \qquad \text{(V.5)}$$

unde: $A$ este o constantă arbitrară care serveşte pentru rotirea şi mărirea figurii în planul $W$; $x_1 < x_2 < \ldots\ldots\ldots < x_N$ şi $k_i$ este un număr real. În cazul particular când curba $S_z$ coincide cu axa $x$ din planul $Z$, atunci unghiul unități de tangentă a curbei $S_w$ devine $(\phi_z = 0)$

$$\phi_w = \phi_{F'} = < A - \sum_{i=1}^{N} k_i < (Z - x_i) \qquad \text{(V.6)}$$

unde argumentul intervalelor $(x - x_i)$ se scrie

$$< (x - x_i) = \begin{cases} \pi & pentru\ x < x_i \\ 0 & pentru\ x > x_i \end{cases} \qquad \text{(V.7)}$$

Prin urmare, pentru orice parcurgere $x_i$ din planul $Z$, unghiul $\phi_w$ se schimbă discontinuu prin cantitatea $k_i \pi$, fiind descris un poligon ca în Fig. A V.1b. Unghiurile exterioare ale poligonului sunt $k_i \pi$, şi dacă poligonul este închis aceste unghiuri se însumează până la valoarea $2\pi$; astfel se poate scrie

$$\sum_{i}^{N} k_i = 2 \qquad \text{(V.8)}$$

Punctele $x_i$ din planul $Z$ sunt transformate în punctele $W_i = F(x_i)$ din planul $W$. Funcția de transformare (de desenare a poligonului în planul $W$) este dată de relația

$$W = \int^{Z} F'(Z) dZ + B = A \int^{Z} \prod_{i=1}^{N} (Z - x_i)^{-k_i} dZ + B \qquad \text{(V.9)}$$

unde $B$ este o constantă arbitrară care serveşte la translarea figurii în planul $W$. Efectuarea ultimei integrale, în general nu este posibilă; excepție fac cazurile când $|k_i| = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2$; se va observa că în această transformare există câte un factor pentru fiecare vârf al poligonului ce corespunde unei valori finite a lui $x$; nu există termeni pentru $x = \pm\infty$.

În aplicații practice poate să apară necesitatea de transformare a unui poligon dat din planul $W$ în valori ale abscisei $x$ din planul $Z$. În aceste cazuri apare necesitatea unei transformări inverse, anume obținerea lui $Z$ ca funcție de $W$, $Z = Z(W)$; în general efectuarea acestei transformări inverse este dificilă, şi atunci uzual se procedează la un set de încercări succesive ale transformării directe (V.9), astfel încât să se obțină transformarea axei $x$ din $Z$ în poligonul dat din $W$; această procedură este favorizată de condiția că trei din punctele $x_i$ pot fi alese arbitrar.

Pentru ilustrarea transformării Schwarz–Christoffel, utilizând procedura de încercări succesive, se consideră linia microstrip simetrică cu secțiunea transversală arătată în Fig. AV.2a; datorită proprietăților de simetrie este suficient să ne referim numai la un singur cadran (Fig. AV.2b). Dacă intervalul $h$ dintre stripul (conductorul) central şi plăcile exterioare este suficient de mic în comparație cu lărgimea $D$ a stripurilor exterioare, câmpul pe marginile acestor stripuri poate fi aproximat cu zero; în acest caz problema condițiilor la limită se poate simplifica admițând că stripurile exterioare sunt infinit de largi. Se presupune că mediul dintre stripuri este aerul cu parametrii $(\varepsilon_0, \mu_0)$. Aşa cum rezultă din Fig. A V.2b pe anumite porțiuni ale cadranului considerat gradientul normal de potențial este zero; referindu-ne acum la poligonul din planul $W$ (Fig. A V.3a) cu originea în centrul de simetrie al structurii, capacitatea se poate defini atunci când punctele $W_1$ şi $W_2$ tind la $-\infty$. Ca prim pas pentru rezolvarea acestei probleme de condiții la limită, se va efectua transformarea inversă $W \to Z$ (Fig. A V.3b); astfel condițiile la limită le poligonului $W$ sunt transferate pe axa reală din planul $Z$. Având în vedere că unghiurile exterioare ale poligonului sunt egale cu $\pi/2$, toți parametrii $k_i$ sunt egali cu $+1/2$. Funcția de transformare (V.9) capătă forma

$$W = A_1 \int^Z (Z - x_1)^{-1/2} (Z - x_2)^{-1/2} (Z - x_3)^{-1/2} (Z - x_4)^{-1/2} dZ + B = \\ = A \int^Z \left[ \left(1 - \frac{Z}{x_1}\right)\left(1 - \frac{Z}{x_4}\right)(Z - x_3)(Z - x_2) \right]^{-1/2} dZ + B \qquad \text{(V.10)}$$

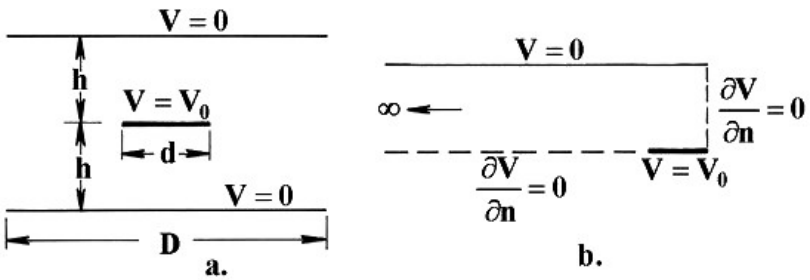



**Fig. A V.2. Linie microstrip simetrică pentru ilustrarea transformării Schwarz – Christoffel prin utilizarea procedurii de încercări succesive: a – linie microstrip simetrică; b – reducerea la un singur conductor**

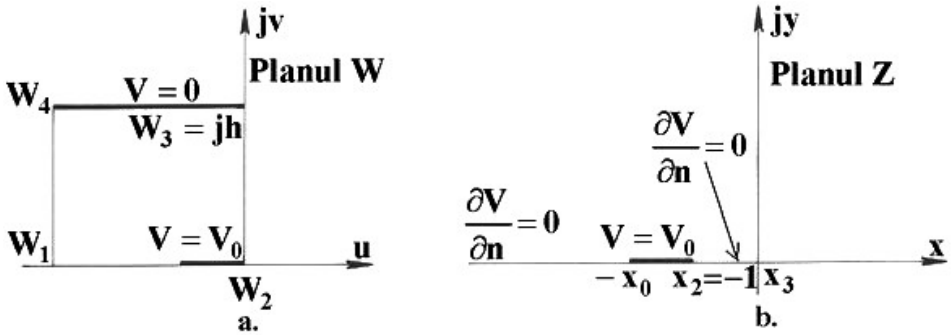



**Fig. A V.3. Transformarea inversă W → Z : a - poligonul W; b – transformare în planul Z**

în care $A = A_1 (x_1 x_4)^{-1/2}$. În scopul acoperirii întregii axe $x$, admitem că $x_1$ şi $x_4$ tind la infinit iar termenii corespunzători de sub integrală devin egali cu $1$. De asemenea, dacă alegem $x_2 = -1$ şi $x_3 = 0$, funcția de transformare devine

$$W = A\int^{Z} \frac{dZ}{[Z(Z+1)]^{1/2}} + B = 2\,ln\left[Z^{1/2} + (Z+1)^{1/2}\right] + B \tag{V.11}$$

Când $W = 0$ avem $Z = -1$, iar când $W = jh$ avem $Z = 0$, astfel din ultima relație se scoate

$$\begin{aligned} 2A\,ln(-1)^{1/2} &= j\pi A = -B \\ jh &= B \end{aligned} \tag{V.12}$$

Expresia finală a transformării devine

$$W = -\frac{2h}{\pi} ln\left[Z^{1/2} + (Z+1)^{1/2}\right] + jh \tag{V.13}$$

Luăm cum valorile $W = -d/2$ şi fie valoarea corespunzătoare $Z = -x_0$; din (V.13) scoatem

$$\begin{aligned} x_0^{1/2} + (x_0 - 1)^{1/2} &= e^{\pi d/4h} \\ x_0 &= cos\,h^2(\pi d/4h) \end{aligned} \tag{V.14}$$

La această etapă a analizei se constată că dificultățile în determinarea condițiilor la limită în planul $Z$ (Fig. AV.3b) sunt în esență la fel de mari ca în configurația originală (Fig. AV.4). Drept urmare se încearcă găsirea unei noi funcții de transformare care să transforme axa $x$ din planul Z intr-un dreptunghi din planul $W'$ (Fig. AV. 4). Dacă transformarea este efectuată, atunci capacitatea pe unitate de lungime se determină imediat deoarece problema condițiilor la limită în planul $W'$ este una elementară. Referindu-ne la Fig. AV.4 capacitatea lineică se determină conform relației $C_w = \varepsilon_0 / v_0$, unde $v_0$ reprezintă distanța dintre plăci în planul $W'$. Considerăm trei puncte în planul $W'$ şi valorile corespunzătoare în planul $Z$

$$\begin{aligned} W_1' &= 0 \rightarrow Z = -x_0 \\ W_2' &= 1 \rightarrow Z = -1 \\ W_3' &= 1 + jv_0 \rightarrow Z = 0 \end{aligned} \tag{V.15}$$

Ținând cont de aceste valori funcția de transformare ia forma

$$W' = A_1\int^{Z} \frac{dZ}{[Z(Z+x_0)(Z+1)]^{1/2}} + B_0 \tag{V.16}$$

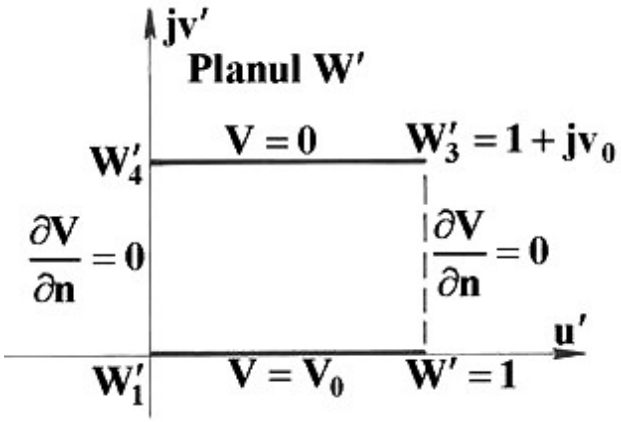



**Fig. A V.4. Transformare bazată pe utilizarea planului W'**

Integrala din ultima relație nu poate fi evaluată în termenii unor funcții elementare; totuşi ea reprezintă o *integrală eliptică inversă* şi pentru evaluarea ei sunt disponibile tabele de valori. Pentru evaluarea constantelor $A_1$ şi $B_0$ se substituie valorile particulare ale lui $Z$ şi cele corespunzătoare

ale lui $W'$ (V.15) în relația (V.16). fiind dat că limita superioară a integralei este o valoare negativă sau zero, se face schimbarea de variabilă $Z = -\lambda^2$, astfel (V.16) devine

$$W' = \frac{j2A_1}{x_0^{1/2}} \int^{(-Z)^{1/2}} \frac{d\lambda}{\left[\left(1-\lambda^2\right)\left(1-\lambda^2/x_0\right)\right]^{1/2}} + B_0 \tag{V.17}$$

Se defineşte *funcţia eliptică inversă* $sn^{-1}(x,k)$ prin integrala

$$sn^{-1}(x,k) = \int_0^x \frac{d\lambda}{\left[\left(1-\lambda^2\right)\left(1-k^2\lambda^2\right)\right]^{1/2}} \tag{V.18}$$

unde $x$ poate fi o variabilă complexă iar $k$ este numit „*modulul*" funcţiei eliptice. Având în vedere că $B_0$ din (V.17) reprezintă încă o constantă arbitrară, ea poate fi pusă ca limita inferioară a integralei, astfel se poate scrie

$$W' = A_0\, sn^{-1}\left[(-Z)^{1/2}, x_0^{1/2}\right] + B_0 \tag{V.19}$$

deoarece $x_0^{1/2}$ corespunde lui $k$ din (V.18); noua constantă este $A_0 = j2A_1 / x_0^{1/2}$. În cazul particular $k^2 = 0,\ (x_0 \to \infty)$ integrala (V.18) se integrează uşor

$$\int_0^{(-Z)^{1/2}} \frac{d\lambda}{\left(1-\lambda^2\right)^{1/2}} = sn^{-1}(-Z)^{1/2} \tag{V.20}$$

Funcţia eliptică particulară care intervine în (V.19) reprezintă o generalizare a *funcţiei sinus inverse*, astfel se justifică utilizarea notaţiei $sn^{-1}\left[(-Z)^{1/2}, k\right]$. Funcţia eliptică $x = f_e = snW$, unde $W$ este dată de integrala de tip (V.18) reprezintă o funcţie dublu periodică, adică o funcţie care este periodică pe cele două direcţii ale planului complex. Într-o celulă unitară sau dreptunghi cu laturile egale cu două perioade, funcţia $f_e = snW$ ia toate valorile posibile când $W$ variază în toată celula. Prin urmare, când $f_e$ ia toate valorile posibile funcţia inversă $W = sn^{-1} f_e$ variază în toată celula sau dreptunghiul respectiv; acesta este motivul pentru care funcţiile eliptice inverse totdeauna se găsesc în desenul (interiorul) unor poligoane rectangulare finite. În momentul în care una din laturile poligonului devine infinită, funcţia eliptică inversă degenerează în funcţii inverse trigonometrice sau hiperbolice.

Punând condiţiile la limită de tipul (V.15) din (V.19) se poate scrie

$$A_0\, sn^{-1}\left(x_0^{1/2}, x_0^{-1/2}\right) + B_0 = 0 \tag{V.21}$$

$$A_0\, sn^{-1}\left(1, x_0^{-1/2}\right) + B_0 = 1 \tag{V.22}$$

$$B_0 = 1 + j\nu_0 \tag{V.23}$$

Scoatem pe $B_0$ din primele două relaţii şi introducem în cea de a treia; rezultă

$$\nu_0 = \frac{-j\, sn^{-1}\left(1, x_0^{-1/2}\right)}{sn^{-1}\left(x_0^{1/2}, x_0^{-1/2}\right) - sn^{-1}\left(1, x_0^{-1/2}\right)} \tag{V.24}$$

În general funcţia $sn(x+jy)$ este periodică după $x$ cu perioada $4K$, unde

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\left[\left(1-\lambda^2\right)\left(1-k^2\lambda^2\right)\right]^{1/2}} \tag{V.25}$$

şi periodică după $y$ cu perioada $2K'$, unde

$$K' = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\left[\left(1-\lambda^2\right)\left(1-\lambda^2+k^2\lambda^2\right)\right]^{1/2}} = \int_1^{1/k} \frac{d\lambda}{\left[\left(1-\lambda^2\right)\left(1-k^2\lambda^2\right)\right]^{1/2}} \tag{V.26}$$

Astfel sunt evidente relaţiile $\left(k = x_0^{1/2}\right)$

$$sn^{-1}(1,k) = K;\, sn\, K = 1;\, sn(K - jK') = 1/k;\, sn^{-1}(1/k, k) = K - jK' \tag{V.27}$$

**Tabelul AV.1. Reprezentarea mărimilor $x_0$, k, k′ şi $v_0$ pentru câteva rapoarte d/h**

| $d/h$ | $x_0$ | $K$ | $K'$ | $v_0$ | $Z_c(\Omega)$ | $Z_{c\ aprox}(\Omega)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6,3 | 1,64 | 2,26 | 0,695 | 65,5 | 94,2 |
| 4 | 134 | 1,57 | 3,84 | 0,41 | 38,6 | 47,1 |
| 8 | $0{,}25e^{4\pi}$ | 1,57 | 6,98 | 0,225 | 21,2 | 23,6 |
| 10 | $0{,}25e^{54}$ | 1,57 | 8,55 | 0,184 | 17,3 | 18,8 |
| 20 | $0{,}25e^{10\pi}$ | 1,57 | 16,4 | 0,0958 | 9,03 | 9,4 |

Introducând aceste relaţii (V.24) se obţine

$$v_0 = \frac{K}{K'} = \frac{K(k)}{K(k')} \tag{V.28}$$

unde $k' = \left(1-k^2\right)^{1/2}$. Mărimea $K$ definită de (V.25) este numită *integrală eliptică completă* de speţa I-a şi uzual este tabelată. În cazul particular $k \to 0$ $\left(k^2\lambda^2 << 1\right)$ integrala (V.25) ia forma

$$K = \int_0^1 \frac{d\lambda}{\left(1-\lambda^2\right)^{1/2}} \tag{V.29}$$

şi este numită integrală *pseudoeliptică completă*, fiind integrabilă prin funcţii elementare.

În Tabelul V.1 sunt reprezentate valorile mărimilor $x_0$, $k$, $k'$ şi $v_0$ pentru câteva rapoarte $d/h$ uzuale; valoarea lui $x_0$ pentru raportul dat $d/h$ se determină din (V.14). Capacitatea pe unitate de lungime a liniei este $C = 4\varepsilon_0/v_0$, deoarece valoarea $C_w = \varepsilon_0/v_0$ se determină pentru un singur cadran (Fig. AV. 4). În Tabelul V.1 sunt date şi valorile pentru impedanţele caracteristice $Z_c$ şi $Z_{c,aprox}$.

Impedanţa caracteristică a liniei umplute cu aer este $Z_c = (\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}/C = 30\pi v_0$, unde $v_0$ are expresia (V.24). Impedanţa aproximativă se defineşte prin relaţia $Z_{c,aprox} = (\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}/C_p$, unde $C_p$ reprezintă capacitatea electrostatică lineică a unei structuri de plăci paralele; avem $C_p = 2d\varepsilon_0/h$ şi $Z_{c,aprox} = Z_0 h/2d$, unde $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ este impedanţa de spaţiu liber. Din Tabelul V.1 se

observă că pentru valori $d/h > 4$ erorile impedanței $Z_{c,aprox}$ sunt mai mici de *1%* dacă se fac aproximările $K = 2$ şi $K' = (ln\,2 + \pi d/4h)$. Într-adevăr pentru $d \geq 4h$ se pot scrie aproximările

$$\begin{gathered} k = x_0^{1/2} = 2e^{-\pi d/4h} \\ k' = 1 - 2e^{-\pi d/4h} \cong 1 \\ k/(1-k') = e^{\pi d/4h} \\ K = \pi/2\,,\ K' \cong (ln\,2 + \pi\, d/4h) \end{gathered} \tag{V.30}$$

În acest caz rezultă o valoare aproximativă pentru $v_0$, anume

$$v_0 = \frac{\pi}{2(ln\,2 + \pi\, d/4h)} \tag{V.31}$$

şi se poate scrie

$$C = \frac{4\varepsilon_0}{v_0} = \frac{8\varepsilon_0}{\pi}(ln\,2 + \pi\, d/4h) \tag{V.32}$$

$$Z_c = \frac{Z_0\pi}{8(ln\,2 + \pi\, d/4h)} \tag{V.33}$$

În cazul rapoartelor $d/h$ foarte mari se poate neglija $ln\,2$ la numitor şi se obține

$$C = \frac{8\varepsilon_0}{\pi}\frac{\pi\, d}{4h} = \frac{2d\varepsilon_0}{h} = C_p \tag{V.34}$$

$$Z_c = \frac{Z_0\pi}{2\pi\, d/4h} = \frac{Z_0 h}{2d} = Z_{c,aprox} \tag{V.35}$$

Subliniem, de asemenea, că prin utilizarea transformării Schwarz – Christoffel şi a funcțiilor eliptice se pot obține expresii riguroase pentru pierderile în pereții metalici [3].

# Bibliografie Anexe

1. G.A. Korn, T.M. Korn „Mathematical Handbook for Scientists and Engineers", McGraw – Hill, N.Y. – Toronto – London, (1961)
2. R. Chatterjee „Elements of Microwave Engineering", Ellis Horwood Ltd, John Wiley and Sons, N.Y., (1986)
3. R.E. Collin „Field Theory of Guided Waves", sec. edition, IEEE Press, N.Y., (1991)
4. M.H. Choudhury „Electromagetism", Ellis Horwood Ltd, John Wiley and Sons, N.Y., (1989)
5. J.L. Volakis, A. Chattergee, L.C. Kempel „Finite Element Method for Electromagnetics", IEEE Press, Oxford, Tokyo, Melbourne, (1998)
6. C.A. Balanis „Antenna Theory", sec. edition, John Wiley and Sons, Inc., N.Y., (1997)
7. C.T. Tai „Diadic Green's Functions in Electromagnetic Theory", Intex Educational Publishers, Scranton – San Francisco – Toronto – London, (1970)

# CUPRINS VOL. II.

## INTERACȚIUNI CU MATERIA. APLICAȚII


## CAP. 8. INTERACȚIUNEA CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE CU MATERIA

8.1. Polarizarea mediilor dielectrice. Considerente generale ……
8.2. Polarizarea în câmpuri de înaltă frecvență …….
8.3. Curbe generale de dispersie a permitivității electrice …….
8.4. Diagrame Debye, Cole-Cole ……..
8.5. Proprietăți importante ale materialelor feritice ……...
8.6. Fenomene de rezonanță magnetică. Pierderi ……..

## CAP. 9. UNDE ELECTROMAGNETICE PLANE ÎN DIFERITE MEDII. FENOMENE DE INTERFAȚĂ

9.1. Unde plane în medii dielectrice cu pierderi. Adâncime de pătrundere ……..
9.2. Unde plane în medii cu pierderi conductive ……...
9.3. Fenomene de transmisie şi reflexie ……
9.4. Vector Poynting normal. Reflexie totală ……
9.5. Propagare în medii dielectrice anisotrope …….
9.6. Propagare în medii magnetice anisotrope ……...
9.7. Difracția undelor electromagnetice pe obstacole dielectrice şi metalice ……

## CAP. 10. ACȚIUNEA CÂMPURILOR ELECTROMAGNETICE ASUPRA ȚESUTURILOR VII

10.1. Proprietăți dielectrice importante ale țesuturilor vii …….
10.2. Mecanisme de interacțiune pe domenii de frecvență ……...
10.3. Rată specifică de absorbție (SAR) ……
10.4. Modele pentru studiul interacțiunilor undelor cu țesuturile şi organismele vii ……
10.5. Constante de propagare în diferite țesuturi. Procese de transmisie şi reflexie …….
10.6. Rezonanțe particulare ……...

## CAP. 11. EFECTE BIOLOGICE ALE CÂMPURILOR DE MICROUNDE ŞI DE FRECVENȚE ÎNALTE

11.1. Procese de atenuare. Adâncime de pătrundere …….
11.2. Efecte primare: termice şi nontermice ……..
11.3. Nivele de expunere. Dozimetrie ……...
11.4. Standarde de protecție ……..
11.5. Efecte asupra unor organe importante ale ființelor vii …….
11.6. Efecte asupra unor sisteme: nervos, endocrin, imunitar, creştere embrionară …….

## CAP. 12. MĂSURĂRI ASUPRA MATERIALELOR ŞI A ŢESUTURILOR VII PRIN TEHNICI DE MICROUNDE

12.1. Sistemul de parametri *S*. Matricea generală a parametrilor de împrăştiere ……..
12.2. Metode cu eşantion în ghidul de undă. Relaţia Roberts - Von Hippel …….
12.3. Metoda ISC. Evaluarea erorilor ……
12.4. Perturbarea cavităţii rezonante …….
12.5. Metode interferometrice ……...
12.6. Metode reflectometrice în domeniul timp şi în domeniul frecvenţă ……
12.7. Metode de spaţiu liber ……..
12.8. Utilizarea „analizorului de reţea” …….

## CAP. 13. CÂTEVA APLICAŢII INDUSTRIALE ŞI MEDICALE ALE MICROUNDELOR ŞI FRECVENŢELOR ÎNALTE

13.1. Aplicaţii în industria alimentară. Conservarea şi prepararea alimentelor ……
13.2. Aplicaţii în industria chimică şi farmaceutică …….
13.3. Alte aplicaţii: metalurgie, industria lemnului şi a ceramicii ……
13.4. Metode de diagnoză şi tratament ……..

## CAP. 14. BLOCURI COMPONENTE ALE INSTALAŢIILOR DE MICROUNDE

14.1. Joncţiuni şi cuploare direcţionale …….
14.2. Dispozitive nereciproce cu ferită. Circulatoare ……
14.3. Transformatoare de adaptare ……
14.5. Antene de laborator ……..
14.6. Generatoare de microunde ……
14.7. Sisteme de modulare şi detecţie ……...

## CAP. 15. INTRODUCERE ÎN METODELE NUMERICE

15.1. Metoda diferenţelor finite …….
15.2. Metoda elementului finit ……...
15.3. Metoda momentelor …….
15.4. Metode iterative ……